圧縮性回転体の平衡形状論の近況

宮本昌典*

最近チャンドラセカール（S. Chandrasekhar）グループはテンソルヴィリアル（Tensor Virial）方程式を利用して，圧縮性廻転流体の平衡形状及びその微小振動のモードについて活発な研究を行なっている．この研究から，脈動星の理論の分野でまず注目されることは，廻転していないガス球の振動にはいくつかのモードが縮退していたことが明らかになったことであり，さらに圧縮性廻転流体の半径方向の振動モード以外のずれ振動，ねじれ振動までも統一とれた形で取扱える可能性を示したことであろう．(S. Chandrasekhar & N. R. Lebovitz, 1962, Ap. J., **135**, 248, 1082)．一方，平衡形状に関する成果だけをとりあげてみても，テンソルヴィリアル方程式なる道具の生産性は高かったことがわかる．ここでは彼らの一連の研究の中から圧縮性廻転流体の平衡形状（後の付記参照）に関する議論の部分だけをピックアップして紹介しようと思う．

非圧縮性廻転流体の平衡形状とその安定性については，マクローリン（Maclaurin）の廻転楕円体から始まりヤコビ（Jacobi）の楕円体，西洋梨型平衡形状を経て連星系を形成する段階まで，数学的には殆んど完全に近いところまで研究しつくされている．しかしながら，圧縮性廻転流体ということになると問題は飛躍的に複雑になって，いわば圧縮性が無限大の回転流体という極限の場合に限ってその平衡形状——ロッシュモデル（Roche Model）——が求まっているだけである．

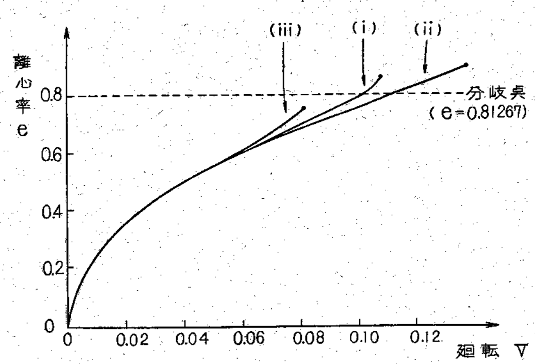
圧縮性回転流体の回転速度が小さな場合には，ポリトロープ・ガス球（polytropic gas sphere）の微小回転による形状と密度分布のわずかな変化をレーン・エムデン（Lane-Emden）方程式に基ずいて摂動法で求めることもできたが（E. A. Milne, 1923, M. N., **83**, 118.; H. von Zeipel, 1924, M. N., **84**, 665; S. Chandrasekhar, 1933, M. N., **93**, 390)，回転速度が大きなときにどのような形状になるかということに対しては解答を与え得るはずがなかった．したがって回転を徐々に大きくしていったときに圧縮性回転流体の場合にも非圧縮性回転流体の場合のように“マクローリン的な”形状（対称面２つ）から“ヤコビ的な”形状（対称面３つ）が分岐（bifurcation）するのかしないのか，そしてどの程度の回転速度を与えると平衡形状が存在しなくなるのか，動摂法を使うかぎり未解決のままであった．

ところが最近チャンドラセカールとレボビッツは，圧縮性回転流体の平衡形状がたがいに直交する３つの対称面しかもたないと仮定して，圧縮性回転流体のテンソルヴィリアル方程式からこの廻転流体が平衡形状になっていれば必ず満さなければならない条件式（平衡形状であるための必要条件）を導き，回転速度が小さなときには２つの対称面をもつ軸対称の平衡形状だけが存在し得て，回転速度がある限界を越えて大きくなると必ずしも軸対称である必要はなくなり，３つの対称面をもつ形状であっても平衡の条件が満される可能性が生ずることを取扱う回転流体の圧縮性になんら制限を加えることなしに一般的に証明した（S. Chandrasekhar & N. R. Levobitz 1962, Ap. J., **135**, 238)．即ち，回転速度を徐々に大きくしていくと，非圧縮性回転流体の場合に対応して“マクローリン的”な形状から“ヤコビ的な”形状が分岐し得ることがわかったのである．

では“マクローリン的”な形状が具体的にどのような離心率(扁平度)になったときに“ヤコビ的”な形状が分岐するのだろうか．ロバーツ(P. H. Roberts, 1962, Ap. J., **136**, 1108)は，圧縮性回転流体の平衡形状は広義の楕円体(対称面２つまたは３つ)であり，回転流体の等密度面がことごとく相似な楕円体面をなすと仮定して，マクローリンからヤコビへの分岐は，非圧縮性回転流体の場合と全く同様に，回転を徐々に大きくしていったときにマクローリンの回転楕円体の離心率が 0.81267 になったところで起こり，この分岐点での離心率は回転流体内部の密度分布の法則に全く無関係に与えられるという結果を得た．したがってこのような特殊な形状をもって平衡形状とみなす限り，楕円体面座標に関する密度分布則がポリトロープ・ガス球的であっても，シュミットの密度法則(銀河系のモデル)であっても分岐点の離心率はそれとは全く無関係に決ってしまう（その離心率を与える回転の大きさは密度法則に依存する)．ロバーツが圧縮性回転流体の平衡形状として考えた等密度面がことごとく相似な楕円体面をなす形状は，確かに回転流体が静水圧平衡の状態にあるための必要条件は満しているが，十分条件は満していない．それは等密度面がごとごとく相似な楕円体面をなすと仮定して後述の３つの独立な方法で求めた平衡形状が一致しないことから明らかであるが，密度分布を規定するポアッソン（Poisson）の方程式と圧縮性流体の状態方程式に無関係に人為的に等密度面を仮定

* 東京天文台

M. Miyamoto: The Recent Results Concerning with Equilibrium Configurations of Rotating Compressible Masses.



第１図　近似的な三つの方法により求められた廻転の大きさと平衡形状の離心率との関係．但し，$V=\dfrac{\omega^2}{2\pi G\lambda}$で，$\lambda$は中心密度，$\omega$は角速度，Ｇは重力の定数（ロバーツによる）

しているから，十分条件を満している保証がないわけである．平衡状態にある圧縮性回転流体の等密度面は，相似な楕円体面になってはおらず，多分中心から表面に近ずくほど扁平になるような曲面をなすだろうからロバーツの結果は近似的なものではあるけれども，離心率がどの程度大きくなったときに分岐が起こるか目安がついたことは大きな収獲であろう．

ここまで圧縮性回転流体の平衡形状を概観できたところで次に調べるべきことは，さきにチャンドラセカールとレボビッツが導いた静水圧平衡になるための必要条件を満たし，かつポアッソンの方程式と圧縮性流体の状態方程式を満たす平衡形状の扁平度，赤道半径，密度分布が回転速度を徐々に大きくしたときにどのように変っていくかということであり，さらに静水圧平衡になるための必要条件だけから独立に求まった近似的な分岐点以前で必要十分条件を満たす平衡形状がなくなってしまうのか，あるいは分岐点以後まで存続し得るのかということである．表現を変えれば，圧縮性回転流体の平衡形状系列として“マクローリン的”な形状から始まり“ヤコビ的”な形状まで存続し得るのかということであり，これは非常に興味ある問題である．これに対する近似的な解答はロバーツ（P. H. Roberts, 1963, Ap. J., **137**, 1129）によって与えられた．彼はポリトロープ状態方程式に従い静水圧平衡にある圧縮性回転流体の等密度面はことごとく相似な楕円体面をなす（静水圧平衡にあるための必要条件だけを満たす）と仮定し，圧縮性回転流体の密度分布を決める方程式としてポリトロープ・ガス球の密度分布を決めるレーン・エムデン方程式と相似な形の方程式を導き，ポリトロープ指数$n=1$の場合に次の３つの法で近似解を求めた．

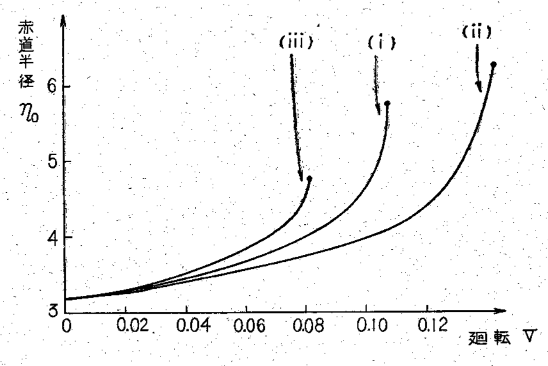
i）変分原理によって，圧縮性回転流体の質量を一定にして離心率と密度分布を変えたときに，回転流体の全エネルギーが停留値をとるように平衡形状を決める．

ii）静水圧平衡の条件が回転軸上で厳密に満たされるように平衡形状を決める．

iii）静水圧平衡の条件が赤道面内で厳密に満たされるように平衡形状を決める．

ii)，iii）の結果はポリトロープ指数$n=1$の回転流体の平衡形状として両極端を与え，i）は平均的な意味をもっているはずである．これら３つの近似法で求められた平衡形状の離心率，赤道半径の変化の様子を第１図，第２図に示してある．曲線端の黒点はそれぞれ平衡形状系列の終結点を示すもので，これより大きな回転速度を与えるともはや平衡形状は存在しなくなることを意味する．回転速度を徐々に大きくしていくとある回転速度のところで回転流体の境界がなくなり，圧縮性流体が無限遠まで拡ってしまう．ポリトロープ指数$n<5$のガス球に対するレーン・エムデン解(密度)は中心から有限の距離でゼロ点をもつが，回転を与えると$n<5$の場合でもゼロ点が存在しなくなるような事情が起こる．例えば，$n=1$のガス球の場合には，レーン・エムデン方程式のリッター（Ritter）による厳密解が知られているが，この解はガス球の中心からの距離が増すにつれて振幅が小さくなるような振動解で最初のゼロ点をガス球の境界と考えている．ところがこのガス球に回転を与えると，この振動解のレベルが上昇し，ある回転速度の限界を越すと完全に正の値をとるようになりゼロ点はもたなくなってしまう．即ち圧縮性流体が無限遠まで拡ってしまう，ロバーツはこの臨界点を平衡形状系列の終結点の物理学的な定義とした．

まず第１図から明らかなように，３つの方法で得られた結果は，回転が小さな場合いずれもよく一致している．これは，回転が小さな場合には平衡形状の等密度面がことごとく相似な楕円体面をなすという近似がかなりよいことを示している．またこの場合には，かつてチャンド



第２図　廻転の大きさと平衡形状の赤道半径との関係．但し，赤道半径の単位は$(K/2\pi G)^{1/2}$で，Ｋはガスの性質に関係した定数，Ｇは重力の定数（ロバーツによる）

ラセカールが摂動法で得た結果ともよく一致している．しかし回転が速くなると採用した方法でかなりの差異を生じ，前述の近似が悪くなることがわかる．ここでｉ）の変分原理で得られた結果が ii), iii) の方法で得られた結果の平均的なものを示していることに注目すれば，変分原理で得られた結果が$n=1$の圧縮性回転流体の形状を最もよく表現していると想像してもよいであろう．“マクローリン的” な形状から “ヤコビ的” な形状が分れる分岐点はロバーツにより近似的に与えられていたから，その位置を第１図の点線で示してある．したがって iii) の方法で得られる平衡形状は分岐点以前でなくなりｉ）の方法で得られる平衡形状は “ヤコビ的” な形状までも存続し得ることになる．それではどちらの解答が正しいのだろうか．

圧縮性回転流体にどの程度大きな回転を与えると平衡形状がなくなるかという大ざっぱな目安はポアンカレー(Poincarè),ジーンズ(Jeans)によって与えられていたが，ロバーツは独特な思考実験の後，$n=1$の圧縮性回転流体に対する平衡形状系列の正確な終結点(離心率)よりも i) で得られた終結点の方が大きく見積りすぎてあり，iii) で得られたものは小さく見積りすぎてあることを確めて平衡形状系列の終結点を比較的狭い範囲におさえることができた．ロバーツが得た分岐点は確かにこの範囲内に入ってはいるけれども，厳密な意味で終結点が分岐点より前にあるのか後にあるのか確かなことはいえなかった．仮にｉ）の方法で得られた結果を採用するなら，少なくとも$n=1$の圧縮性回転流体の平衡形状系列としては “ヤコビ的な” 形状まで存続し得るだろうが，もっと確かなことについては今後の研究を待たなければならない．

つぎに第２図をながめて非常に顕著なことは，i)~iii) いずれの方法で求めた赤道半径もともに，平衡形状系列の終結点近くで回転のわずかの変化に対して非常に敏感になり，わずか回転を増すだけで赤道半径が著しく伸びてしまうことであろう．これはなにか材料力学でいう金属の降伏現象を思わせる．わずかの回転をもった圧縮性回転流体としての原始星または原始星雲を考えるとき，これらの物理状態が時間とともに徐々に変化する結果，これらは角運動量を保存しながら徐々に凝縮していくだろう．したがって，原始星または原始星雲は各瞬間ごとの物理状態と回転速度に対応した平衡形状を形づくりながら時間とともに準静的に変形していくものと考えられるから，もしこのような降伏現象が一般の圧縮性回転流体に起こるものならば，ある段階でこの凝縮をくいとめるようななんらかの機構が現われない限りこれらは平衡形状の終結点近くで加速度的にあるいは破局的に非常に扁平な形になることを暗示していることになる．しかしこの段階ではもはや準静的な変形ではあり得ないから，多分別の理論を必要とする構造を示し始めるだろう．

（付記）

彼等による非圧縮性回転流体の議論で次の結果を付記しておきたい；非圧縮性回転流体に任意の無限小変形を与えた場合に，その回転流体が長年安定であるか不安定であるかという問題は，古典的には流体各部分の無限小変形によるポテンシャルエネルギーの変化の様子をラーメ函数を使って調べられ，回転（正確には角運動量）を徐々に大きくしていくときに，長年安定の平衡形状を（数学的必然性とは無関係に）接続したものが，球から出発するマクローリンの回転楕円体→ヤコビの楕円体というポアンカレーの平衡形状系列であったが，この方法ではマクローリンの回転楕円体に与えられた変形がどのように残留して，必然的に次のヤコビの楕円体に移行するのか明らかではなかった．ところがレボビッツ（N. R Lebovitz, 1961, Ap. J., **134**, 500）は回転流体に与えられた変形に関係ある諸量をテンソルに拡張して表示し，更にこれら諸量が回転流体全体にわたって積分された形で考慮れたテンソルヴィリアル方程式から出発して，マクローリンの回転楕円体には五種類の独立な微小振動が存在し得ることを見出した．これら振動のうちには，マクローリンの回転楕円体が長年不安定なる分岐点で，振動周期が無限大になるものが一つあって，分岐点で時間に無関係になるこの変形が，とりもなおさずヤコビの楕円体に連続させるような変形であることを確めた．

藤堂家旧蔵渋川春海作天球儀

井本　進*

藤堂家にあった天球儀を，筆者は約 27 年間座右において眺めてきた．すなわちこの天球儀が私の所有となったのは昭和 11 年 10 月 24 日のことであって，大阪市の高島屋で開かれた古書展で購入したのであった．

たまたま昨年の春，筆者はこの天球儀が藤堂家にあったほどのものであるから，相当な人の製作に違いなく，

* 大阪科学技術センター