圧縮性回転流体の平衡形状論その後

宮　本　昌　典*

昨年の本誌2月号で，筆者は圧縮性回転流体の平衡形状論の分野におけるチャンドラセカール一派の活動状況を紹介したが，その後さらにこの分野で進展がみられた．Ap. J., Vol. 140 (1964) に同時に掲載された圧縮性高速回転流体の平衡形状に関する独立な二つの論文は非常に興味深いものであった．クレローの地球形状理論を拡張して，長年，近接連星の模型づくりに携わってきたコパール一派と，テンソル表示によるヴィリアル方程式から出発して回転流体の平衡形状とその安定性の問題を総括的に解決しようとしているチャンドラセカール一派とが高速回転するガス体の平衡形状をそれぞれ異った方法論に基いて求めているからである．それぞれの館で主役を演ずるのは R. A. James と P. H. Roberts である．かなり一方的な私見を混え，双方の研究を筆者なりに嚙み砕いて紹介しよう．

1.　圧縮性回転流体の特徴

ある物理的特徴をもった回転流体が最終的に定常状態に落着くと，一般的には静水圧平衡の条件と熱力学的な平衡の条件を同時に満すような平衡状態が実現する．もっともらしい熱エネルギーの発生のもとに，静水圧平衡と輻射平衡の条件を同時に満さなければならないときには，例えばフォンツァイペルの定理 (H. von Zeipel, 1924) が示すように回転流体が一様回転することは許されない．回転の影響が一次の摂動と考えられるときに，高温度主系列星と赤色矮星について静水圧平衡の条件の他に対流平衡や輻射平衡の条件を加え球殻状の成層を仮定すると，最近ロックスブルフ (I.W. Roxburgh, M.N. **128**, No. 2, 3, 1964) が示したように，球殻が互に異なった角速度で回転するような平衡状態もあり得る．

本稿では，熱エネルギーの発生を無視して「回転流体がそれ自体に固定した軸のまわりに一様回転しつつ静水圧平衡が実現したときに，回転流体が示す形状と内部の成層 (stratification) を求める」という理想化された相対平衡の問題だけに議論を制限する．

$p=f(\rho)$ なる状態方程式に従う圧縮性回転流体が静水圧平衡の条件を満すと，等圧面，等密度面，等ポテンシャル面（引力と遠心力によるポテンシャル面）が必らず互に一致する．従って平衡形状とその成層を求める問題はポテンシャルの分布を求める問題に帰着される．

ポテンシャルの分布は，グリーンの定理が示すように，回転流体内の密度分布と表面におけるポテンシャルまたはその勾配（重力）が与えられてはじめて一義的にきまる．一方，密度分布と表面の形は静水圧平衡の条件を満す状態になっていなければならない．ところが平衡の条件を満す密度分布と表面の形を求めるにはポテンシャルの分布を知る必要がある．この問題を真向から解くことはイタチゴッコの観があり，数学的には積分微分方程式 (integro-differential epuation) と称する面倒な函数方程式を解かなければならない．この困難を避けるために，解の完全性ということには眼をつむって，あらかじめ回転流体の形と成層とをある程度自由度を残した表式で仮定し，平衡条件に抵触しないようにそれらの自由度を固定するという手段が，地球のゼオイドを理論的に求めたクレロー (A.C. Clairaut 1743) 以来採用されて来た．

流体の圧力が密度の増加函数ならば，少くとも平衡状態にある静止球については，密度は自由表面から中心に向って必らず単調増加するということをリアプーノフ (A. Liapounoff, 1918) が証明したが，回転流体の場合にも，平衡状態では質量が中心に向って集中し，その不均一の度合は圧縮性が著しいほど顕著になると予想してよかろう．ポリトロープ状態方程式 $p=K\rho^{1+1/n}$ を用いると，n を適当に選ぶことによって少くとも質量の中心集中度に関しては任意の圧縮性流体を考えることができる，という便宜さからジェームスとロバーツの取扱う圧縮性流体はこの状態方程式に従う気体である．

回転流体の密度の不均一が極端に著しい極限では，その平衡形状は $n=5$ に対応するロッシュ模型 (Roche model) となる．この模型では，角速度 ω と平均密度 $\langle\rho\rangle$ で組合わされた回転パラメータ $\omega^2/2\pi G\langle\rho\rangle$ が単調に増加すると，その平衡形が非圧縮性回転流体のように分岐現象を起して軸対称性を失うことなく，まず赤道上から静水圧平衡が破れる．赤道上にポテンシャルの特異線が現われるからである．この状態のロッシュ模型内部においては，流体要素に働く引力と圧力勾配による外向きの力と遠心力とが至る処で釣合っているが，赤道上では釣合を保つためにもはや圧力勾配は必要ではなく，引力と遠心力とが釣合って無重力状態が実現する．このように赤道上から平衡形状が壊れること (epuatorial ejection) を赤道分離 (epuatorial beak-up) とジーンズは名ずけた（以下，J. H. Jeans 1919).

*　東京天文台
M. Miyamoto: Equilibrum Configuration of Rotating Compressible Masses II

一方，中心への質量の集中が全くない極限では，$n=0$に対応する非圧縮性回転流体の周知の平衡形状が実現する．この場合には，回転パラメータを適当に変化させると，一つの線状排列 (linear series) から他の独立な線状排列が分岐するという数学的に興味深い現象が起る．順次マクローリン回転楕円体──→ヤコビ楕円体──→西洋梨型の平衡形状系列を辿るとき，一度も平衡形状のどこかで無重力状態になることはなく，至るところで流体要素は鉛直線方向に引きつけられ内部からの圧力（いわば流体の抗力）と釣合っている．部分的に静水圧平衡が破れるような事態が起これば，ことごとく内部は不均衡になる．ジーンズは西洋梨型に関する線型化された安定論（リアプーノフ，ジーンズによると，西洋梨型はヤコビ楕円体より分岐した瞬間から不安定）から，回転パラメータがある値に達したときある線状排列から独立な線状排列に属する形状が芽生えて分岐するという現象が，最終的に単一回転流体を複数個に引きちぎる結果を誘導するのだと想像し，平衡形状のこのような壊れ方を分裂分離 (fissional break-up) と名ずけた．

分裂分離のコースを辿る流体塊は回転平衡に対して“液体的”といってよいし，赤道分離のコースを辿るものは“気体的”と考えてよかろう．それでは，どのような圧縮性をもった流体塊が回転平衡に対してそれぞれの性質を帯びるのであろうか．

ジーンズは，まず，楕円体からわずか偏倚した非圧縮性回転流体の形状の探索法を工夫した．取扱う流体がわずか圧縮性をもつなら，その回転流体のポテンシャル分布は，非圧縮性回転流体のものとわずか異なったものとなるだろう．だとしたらこの探索法を圧縮性回転流体の形状を求める問題にもある程度利用できる．つぎに彼は，非圧縮性回転流体の既知の形状を基礎とするわずか圧縮性のある回転流体の形状を調べ，臨界ポリトロープ指数 $n_c=0.83$ を境にして回転流体の特徴が二分されることをつきとめた．$n>n_c$ の回転流体は分岐の条件を満すことなく赤道上で無重力状態が実現し，平衡形状が終結するまで終始“マクローリン的な”軸対称形 (pseudo-spheroid) を保ち，$n<n_c$ の回転流体は分岐点においても赤道上が無重力状態になることはなく，従って三軸不等の“ヤコビ的な”平衡形状 (pseudo-ellipsoid) へと分岐し得ることを意味する．ジーンズ流の宇宙開闢論はともかく，回転流体の圧縮性如何によって，赤道分離と分裂分離の二種類のメカニズムを通して単一回転流体の平衡が破れることを指摘した仕事は，粗削りではあったが高く評価されてよかろう．

ジーンズの得た臨界ポリトロープ指数の値は，後述のジェームスの数値計算 ($n_c=0.808$) によってかなりよい値を与えていることが確かめられることになる．圧縮性があまり著しくないという仮定，従って非圧縮性回転流体の平衡形状からの圧縮性に伴う偏倚がわずかであるという仮定から出発した一次の議論で，ジーンズがもっともらしい値に近ずき得たのは，実際の臨界値が，圧縮性がさして著しくない範囲にあったことによるのであって，その意味ではジーンズは幸運児であった．

2. ジェームスの研究

ジェームス (R.A. James, 1964, Ap. J. **140**, 552) は，圧縮性回転流体のポテンシャル分布や密度分布をアプリオリに Zonal Harmonics や Tesseral Harmonics で級数展開可能と考えた．実際のところこの級数展開の収斂性は，ラプラース (P.S. Laplace, 1825) 以来古くから議論されているが「Desideratum of Tisserand」といわれて未だに一般的に確かめられていない．収斂性はともかく，展開項をより多くとりさえすれば議論は一般的になると単純に予想しよう．

このような体球函数による展開で，解析的に連星の平衡形状を論じて来たのはコパール (Z. Kopal, Figure of Equilibrium of Celestial Bodies, 1960, に集大成されている) である．彼は，回転とか潮汐に起因する連星の歪みを示す卓越項が二項含まれるように，クレローの理論を拡張しているので，クレローやチャンドラセカールによる一次の摂動論より議論を一般化している．しかしながら分岐や安定性というような微妙な問題を数値的に吟味するにはまだまだ粗雑な近似である．コパール門下のジェームスは解析的にすっきりと形状を求めることに見切りをつけ，いわばがむしゃらに展開項を 10×10 項とりあげ，平衡条件に抵触しないように展開係数を数値的

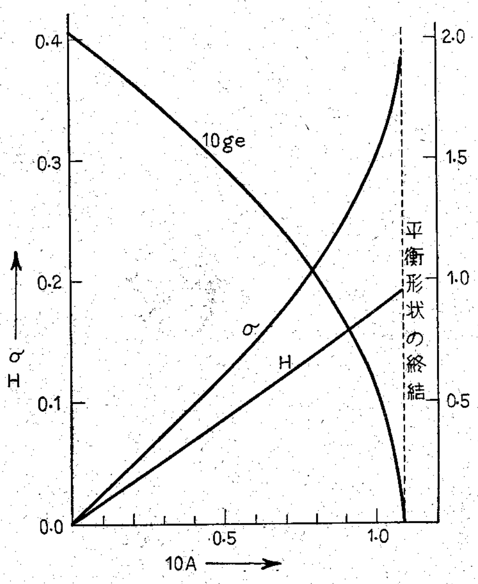


図 1　幾何学的扁率 σ，力学的扁率 H，赤道上の重力 g_e の変化．但し，$A=\omega^2/8\pi G\rho_c$ n=1.5（ジェームスの計算による）

に求めた．実際には，回転流体の平衡形状は回転軸に直交する対称面を必らず有するというリヒテンシュタイン（L. Lichtenstein, 1918）の証明から，数値的に決めるべき係数は 10～20 項となる．

ジェームスは，ポリトロープ状態方程式と完全縮退気体の状態方程式に従う回転流体の平衡形状を調べたが，ここではロバーツの研究と比較する意味でポリトロープ気体による議論だけを紹介する．彼はまず Zonal Harmonics による展開によって“マクローリン的な”形状を調べた．回転パラメータ $A\equiv\omega^2/8\pi G\rho_c$（$\rho_c$ は中心密度）を小刻みに増加させながら，one-step 前の回転が小さなときの解（展開係数）から外捜してつぎつぎに形状を求めた．その際，回転流体のポテンシャルを解析函数で表わせる内部領域と，解析函数で表わせない歪んだ表面領域とに分け，最終的には自由表面における境界条件を満すように異った領域の解を解析接続した．ところが $n\geq 3$ の回転流体に対しては，回転が速まると表面領域において解が発散してしまうという困難が生ずる．この困難は，圧縮性が著しく且つ回転が速まると平衡形状はロッシュ模型に近づき，赤道近傍の密度とその逓減率が非常に小さくなるために，密度ゼロの表面が数値的に確定しにくくなることに起因すると解釈される．数値計算法のこの欠陥から，彼の議論は $n<3$ の範囲に制限されてはいるが，圧縮性回転流体の非常に精密な平衡形状を数値的に与えたことになる．

ジェームスはポリトロープ指数 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 に対して“マクローリン的な”形状を求め，回転パラメータ A に対する赤道半径，極半径，赤道上の重力，主慣性能率等の変化を与えている．ちなみに，$n=1.5$ の場合に，A に対する幾何学的扁率 σ，力学的扁率 H，赤道上の重力 g_e の変化の様子を図 1 に示した．いずれの変化も単調で，赤道上の重力がゼロになった瞬間に，すなわち赤道上の気体が自重で“のっかる”ことなく遠心力で“ふわっと”浮んでしまったときに平衡形状は終結する．このあたりの状況は，ロッシュ模型において赤道上にポテンシャルの特異線が現われることと同じである．彼の計算によると，A に対する諸元の変化の傾向は上記いずれの n に対しても同様で，$n\geq 0.7$ の回転流体は A を単調増加させるときに，いずれも赤道上が無重力状態になり軸対称の平衡形がなくなるという．図 2 は，赤道上が無重力状態になる最終的な軸対称形，すなわち終結形の A, σ, H を n に対して示したものである．この図からうなずけるように，ジェームスは終結形の幾何学的扁率と力学的扁率は n に対してあまり敏感でないことに注意した．完全縮退気体の回転流体に対しては，この事実はもっと歴然としている（James, Ibid., Fig. 2）．独立な方法論によって圧縮性回転流体の平衡形状を調べたロバーツも計らずも同様な事実を指摘することになる（第 3 節参照）．

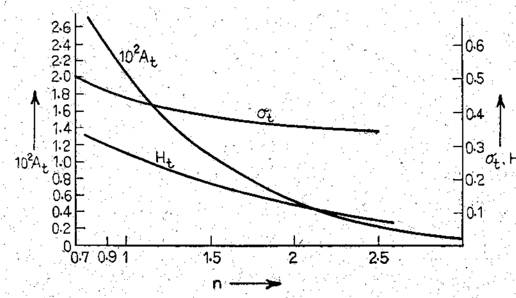


図 2　終結形に関する回転パラメータ A_t，幾何学的扁率 σ_t，力学的扁率 H_t．但し，横軸はポリトロープ指数 n．（ジェームスによる）

対称軸をもたない“ヤコビ的な”平衡形状を求めるためには，ポテンシャルや密度分布を Tesseral Harmonics で展開しなければならない．このような展開によって“ヤコビ的な”形状を原理的に得ることはできるが，“マクローリン的な”形状と同程度の精度を得るには飛躍的に多くの展開係数を決めなければならない．残念ながらジェームスの用いたマーキュリー電子計算機の性能が不充分で，この計算を完全に遂行できなかった．しかし，求めようとする“ヤコビ的な”形状の“マクローリン的な”形状からの偏倚がごくわずかで，ポテンシャルや密度分布の非対称項を一次の微小な摂動と見做せる場合には計算は可能だった．ジーンズ以来懸案の臨界ポリトロープ指数をより正確に捜し当てるという問題を調べるには一次の摂動論でこと足りる．

ポアンカレー（H. Poincaré, 1885）は平衡形状の線状排列，分岐現象，安定性との間の互に緊密な関係を洞察し，ラーメ函数を巧に用いてマクローリン回転楕円体やヤコビ楕円体近くの平衡形状として，いわゆるポアンカレー曲面（ゾーナル形，セクトリアル形，西洋梨型など）を捜し出した．ジェームスによる平衡形状の分岐と安定性の議論はポアンカレーの思想に則っている．

分岐の概念はつぎのように解釈できる；「回転流体の物理状態に一対一対応して丁度直線上の点のように稠密に並ぶある平衡形状の線状排列（例えば“マクローリン的な”形状の連続列）から他の独立な線状排列（例えば“ヤコビ的な”形状の連続列）が分岐する瞬間の平衡形状に限って，微小振動を誘起させることなく依然として平衡を維持させ得るような，特別なモードの一次の微小変形を施すことができる．この変形を施した形状は考えている線状排列から分岐すべき独立な平衡形状の“萌芽形”になっている」．ジェームスは，「既知の“マクローリン的な”形状に，軸対称性を失わせるいろいろなモードの一次の微小変形を施したとき，それら変形の中に，回転パラメータのある値に対して平衡を乱さない特別な

モードの変形が存在し得れば，この線状排列は分岐し得る」と分岐の性質を裏がえしに解釈した．彼はまず，既知の“マクローリン的な”形状に Tesseral Harmonics で展開された一次の微小変形を重ね合わした．この形状も平衡を保つためには，釣合の境界条件を満すことごとくゼロでない展開係数が確定しなければならない．この要請は Harmonics の各々の位数に対応する固有値問題に帰着できる．既知の線状排列上どこかでゼロとなる固有値があれば，その“マクローリン的な”形状は分岐点にあって，しかもこの特別な固有値に対応する微小変形は“ヤコビ的な”線状排列に滑かに接続させる橋渡しの役をつとめることになる．あらゆる次数，位数の Harmonics に対応する固有値の挙動を数値的に調べることは不可能である．彼は非圧縮性回転流体の理論から類推して，“ヤコビ的な”形状へと最初に分岐させる支配的な変形は，2次の Harmonics で表わせるだろうと考え，$P_2^2(\mu)\cos 2\phi$(or $\sin 2\phi$) で表わせる変形に対応する固有値のうちの一つが，$n<0.808\pm0.0004$ の“マクロリン的な”形状に対しては終結形に到達する以前にゼロとなり得ることを確かめた．臨界ポリトロープ指数 $n_c=0.808$ で象徴される回転流体を境にして，これより乏しい圧縮性の回転流体は，平衡形状が終結する以前に，少くとも上記2次の Harmonics を重ね合わした形状を“萠芽形”とする線状排列へと分岐し得ることを意味する．ロバーツは，かなり強い制限を加えて平衡形状の模型を作り，$n=1$ の場合にも分岐が起こることを仄めかした（天文月報 57 巻2号の拙稿を参照頂きたい）が，ジェームスによるとこの場合には分岐は起こらない．

ジーンズは平衡形状の壊れ方によって回転流体の特徴を二分したが，“マクローリン的な”形状が“ヤコビ的な”形状に分岐し得たとしても，西洋梨型に分岐する保証は少しもない．$n<n_c$ の回転流体に対しては，軸対称形が“ヤコビ的な”形状に分岐してから西洋梨型にさらに分岐することなく，細長い形状の両端二点で無重力状態が実現する壊れ方も考えられるはずである．ジェームスによる奮迅の努力を頼んでも“両端分離”の終結形まで追跡できなかったことは遺憾である．

安定論の立場からジェームスの結果を眺めてみよう．一つの線状排列を辿るとき分岐点では安定の交換（exchange of stability）が行なわれるから，非圧縮性回転流体の理論を借用すると，分岐の“萠芽形”を形づくる上記モードの微小変形は，分岐点以前の“マクローリン的な”形状に安定な振動を誘起させ，分岐点においては運動を伴わない中性な変形となり，分岐点以後では不安定な運動を誘起させることになる（この変形は“ヤコビ的な”形状の線状排列まで乗越すと安定な振動を誘起させる）．さらに推断が許されて，“マクローリン的な”形状の線状排列に沿って，順次2次，3次，‥‥の Harmonics で表わせる変形に対応した分岐と安定の交換が起ると考えられるなら，$n>n_c$ の“マクローリン的な”形状は終結形に至るまであらゆるモードの変形に対して長年不安定（secularly unstable）にはならないともいえる．

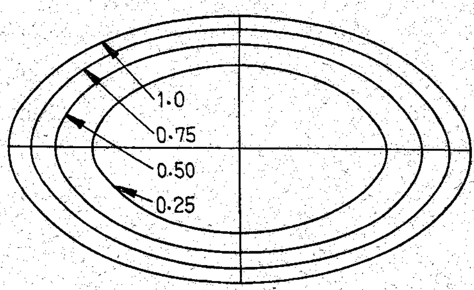
3. ロバーツの研究

ジェームスの平衡問題の解き方が，直接静水圧平衡の偏微分方程式から出発し，あらわに等ポテンシャル面の表現を仮定せず，回転流体内部の一点一点で要求した精度で平衡を成立させる方法であったのに対し，ロバーツは，「束縛条件に適合するように回転流体の成層を仮想変化させたとき，回転流体の全ポテンシャルエネルギーが停留値をとるなら，その回転流体は平衡状態にある」という偏微分方程式の帰結から出発した．このような変分原理に従うと，直接現われる量は回転流体全体にわたって積分された量のみとなるから，あらかじめ等密度面のもっともらしい表現を仮定し，部分的には平衡が多少破れていても回転流体全体が平衡状態になるよう最適の等密度面の形を決定するのには有利である．それのみか，最近チャンドラセカールとレボビッツ（S. Chandrasekhar and N. Lebovitz, 1962, Ap. J., **136** など）によって発案されたポテンシャルエネルギーテンソル，スーパーマトリックスなどの表式も利用できる．

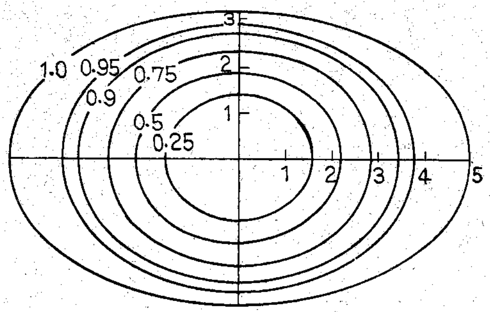
変分原理の方法によって，ロバーツはまず，平衡状態にある圧縮性回転流体の内部から表面に至るまで，等密度面はことごとく同一離心率の回転楕円体面をなすと仮定し，与えられた全質量と角運動量に対し最適の離心率を求めた（P.H. Roberts, 1963, Ap.J., **137**, 1129）．実際には，圧縮性回転流体の場合，中心から外層部に向って等密度面は扁平になるはずだから，彼の方法によると，質量密度を掛けた一種の平均値としての離心率は，中心近くの小さな離心率で代表されてしまう．

この不都合を避けるために，次に，等密度面の分布に融通性を与え，等密度面は回転楕円体面をなしその離心率は中心から外層部に向って単調に増加すると仮定し，全質量と角運動量との保存を束縛条件とするラグランジの不定乗数法によって，最適の等密度面の分布を決めようとした（1963, Ap. J., **138**, 809）．最終的にはクレローの方程式に帰着される微分方程式を数値的に解くことになる．クレローの方程式は，地球の自転による効果を一次の摂動と見做し得るとき，地球の形と密度分布とを関係づける微分方程式である．クレローはこの方程式によって，地球内部の密度分布に関して特殊な仮定を設けることなく，地球の扁率と表面重力との関係式，クレローの定理を得ることに成功したのであった．

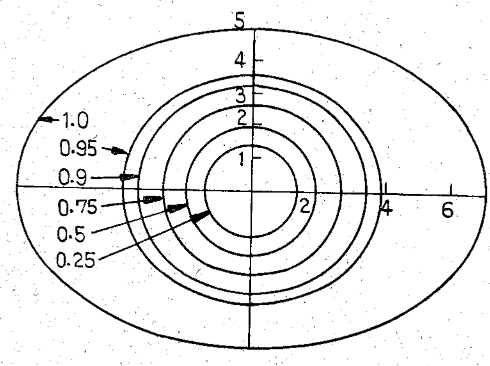
このようにしてロバーツは，平衡状態にある圧縮性回転流体の等密度面を回転楕円体面で近似するという方法



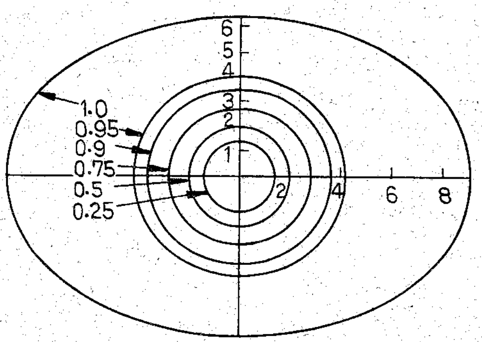
(イ) $n=0.0$



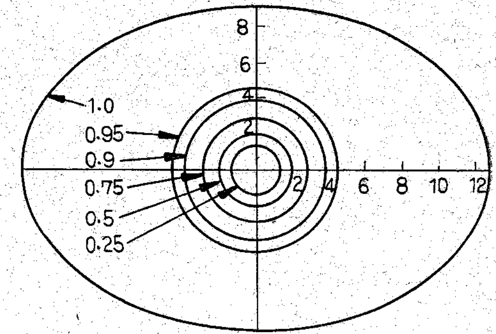
(ロ) $n=1.5$



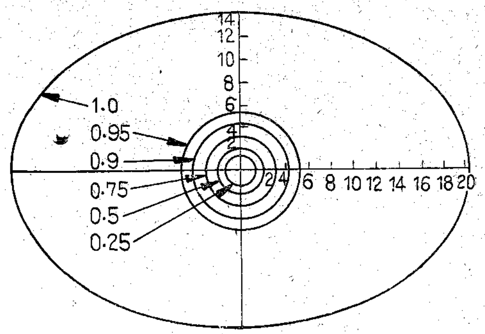
(ハ) $n=2.5$



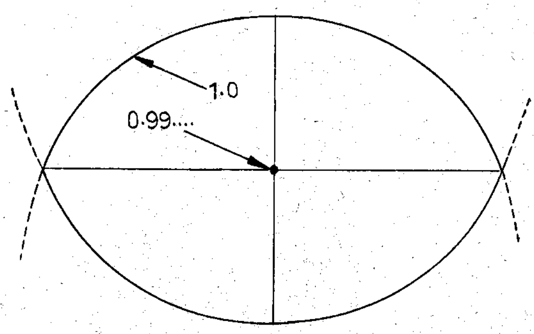
(ニ) $n=3.0$



(ホ) $n=3.5$



(ヘ) $n=4.0$



(ト) $n=5.0$

図 3 いろいろなポリトロープ指数に対する平衡形状の終結形．但し，数字を附した面は各々の質量を含む等密度面．(ロ)～(ヘ)はロバーツらによる．(イ)はマクローリン回転楕円体の分岐形．(ト)はロッシュ形状．

に関しては，可能な限り努力し尽したことになる．しかしながらまだ障壁がある．等密度面の表現を回転楕円体面に制限して離心率を中心から外層部に向って単調増加させても，あらゆる回転パラメータに対して等密度面の極半径が中心から表面に向って単調に増加するという保証はないから，数学的には矛盾が生ずる．圧縮性が著しい回転流体の場合，回転が速まって終結形の少し手前まで至ると，回転の影響が顕著に現われるごく表面近くの領域で，異なった等密度面が互に交叉するという不合理が生ずる．平衡状態にある圧縮性回転流体の等密度面は2次曲面ではあり得ないというヴォルテラ（V. Volterra, 1903）の一般的な証明から，あるいは赤道部の尖ったロッシュ形状の類推から，この矛盾は当然予想されることではあった．

このような模型を考えるとき自己撞着に落入るとはいっても，それは“マクローリン的な”形状の赤道上が無

重力状態になって線状排列が終結する極めて近くで起こるものであり，その上矛盾を含んだ領域はごく表面の稀薄大気の部分に限られているので，ロバーツもいうように，異なった等密度面が互に接触した瞬間をもって考えている線状排列が終結するとしても数値的な誤差は少ないだろう（Margaret Harley and P.H. Roberts, 1964, Ap. J., **140**, 583）．図3は，この意味の終結形をいろいろなポリトロープ指数に対して示したものである．比較のために，マクローリン回転楕円体の分岐形とロッシュ形状を並べておいた．ロバーツらが与えたいずれの形状も，厳密に解けば，赤道上に特異線の現われたロッシュ形状のように赤道付近が鋭くとびでた形状を示すはずである．図からもある程度推測できるが，得られた具体的な数値からロバーツらは「少なくとも $1.5 \leq n \leq 5.0$ の圧縮性回転流体に関しては，平衡が破れる瞬間の表面離心率はほとんど同一で $e \approx 0.7$ であり，そのときの回転パラメータもほとんど同一で $\omega^2/2\pi G\langle\rho\rangle \approx 0.36$ である」と主張している．圧縮性回転流体のこのような特徴をジェームスも認めている．ちなみにロッシュ形状の場合，$e \approx 0.75$, $\omega^2/2\pi G\langle\rho\rangle \approx 0.36$ である．この結果をもっと強調するなら，少なくとも終結形に関しては，圧縮性にほとんど関係なくロッシュ形状そのものだといえる．まさにこの事実によって，回転が速い場合に，ジェームスは $n \geq 3$ の平衡形状について数値計算に失敗し，ロバーツは解析的に首尾一貫した模型づくりに失敗したと考えられる．

圧縮性の著しい高速回転流体の形状がロッシュ形状に近づくという現象は次のように説明できるだろう；圧縮性が著しいほど質量は中心に向って集中し，さらに回転軸から離れるほど外層大気は強く回転の影響をうけ，外部に向って引きだされるから，回転流体の外層大気はきわめて稀薄になるだろう．したがって，大気自身の重力は内部層の成層を乱すほど与らないのは勿論のこと，大気自体の成層にも影響しない．大気の成層は内部層による重力と遠心力とだけで決められてしまうだろう．しかも，回転によって内部層の密度分布は球対称分布からわずかばかり偏倚するだろうが，これに起因する重力の乱れも大気の成層にほとんど寄与しないだろう．それゆえ，圧縮性高速回転流体の平衡形状はロッシュの模型に酷似すると考えられる．実際，図から明らかなように，n がある程度大きくなると質量のほとんどが中心に集中し，しかも中心近くの等密度面は終結形においてすらほとんど球面をなしている．この現象を見透して，高速回転するエディントンこの模型星（$n=3$）の形状を非常に要領を得た方法で近似したのが故竹田新一郎氏である（1934, Mem. College of Sci., Kyoto Imp. Univ. (A), **17**, 197）．

竹田氏は，高速回転流体（$n=3$）の場合でも，大半の質量を含む中心核の等密度面はチャンドラセカール（1933, M.N., **93**, 390）による一次の摂動論で説明できるとし，外層大気の成層はジーンズによって考案された"一般化ロッシュ模型（generalized Roche model）"で与えられると考えた．しかし，中心核と外層大気との境界をどこに選ぶかという任意性が残されているために，竹田模型はユニークに決まらないという難点がある．とはいえこの境界を適当に選べば，平衡形状をかなりの精度で得られるに違いない．なお，欲をいうなら，竹田模型で外層大気の成層を求める際，歪んだ中心核の重力の乱れまで考慮したいものである．竹田氏によると，$n=3$ の終結形に対しては，表面離心率はロッシュ形状の値 0.75，回転パラメータは 0.35 ぐらいになるという．近似の方法を考え合わせれば当然の帰結ともいえる．

ロバーツは，彼の模型の表面領域に含まれる数学的な矛盾を取除くために，表面近くの成層を"一般化ロッシュ模型"で説明しようと妥協案を提案しているが，所詮竹田氏の簡潔でしかも実質的な方法論に帰順してしまうのではなかろうか．ジェームス，ロバーツの研究を待たなくとも，竹田模型に於いて，$n \geq 3$ の高速回転流体の本質は巧みに把握されていると思われる．

竹田氏，ジェームス，ロバーツらの努力によって，単一の状態方程式，一様回転，静水圧平衡という三つの強い制限に適合する圧縮性回転流体の平衡問題は急速に解決されつつある（少くとも数値的には）が，まだまだ行手にはこれらの制限を緩めた一般的な問題が立ちはだかっている．

天文電報の規約の改訂

天文電報の中央局は長らくデンマークのコペンハーゲン天文台に置かれてきたが，同所がこれ以上その仕事を続けていくことが困難になってきた．それで昨年のハンブルクの IAU 第 11 回総会では，コペンハーゲンからの申入れにもとずき，第6委員会で審議された（本誌昨年 12 月号 254 頁参照）．

その後の通報によると天文電報中央局は，1965 年1月1日よりスミソニアン天文台（Smithonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Mass., 02138, USA）にうつされ，Owen Gingerich 氏が責任者となり，天文電報および Circular の印刷発行の事務を遂行することとなった．

中央局の移転とともに，電報の形式もいくつかの改訂が行なわれた．