第 3 積 分 に つ い て

堀　源　一　郎*

§ 1.　恒例の恒星系天文学勉強会が 7 月 22 日～24 日信州菅平で行なわれた．そのさい第 3 積分について話をする機会があった．本稿はそれに手を加えたものである．

与えられた重力場のなかの質点の運動はポテンシャルを $V(\vec{r}, t)$ とすると（$V>0$, 無限遠点で $V\to 0$）運動方程式

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla V \tag{1}$$

で与えられる．(1) は 6 階の微分方程式で，その一般解は

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(t,\ c_1, \cdots, c_6) \\ \dot{\vec{r}} \equiv \vec{v} &= \vec{v}(t, c_1, \cdots, c_6) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

と書ける．$c_1, \cdots, c_6$ は 6 ケの任意定数である．

$\vec{r},\ \vec{v},\ t$ の函数 $E(\vec{r}, \vec{v}, t)$ があり，引数 $\vec{r},\ \vec{v}$ に (2) を代入したとき，t が消し合って E 全体としては t に依らぬとき

$$E(\vec{r},\ \vec{v},\ \vec{t}) = c \tag{3}$$

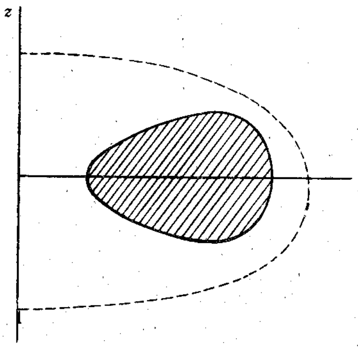
を運動方程式 (1) の積分という．c は積分定数．

重力場が定常で軸対称とすると直ちに 2 ケの積分

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\vec{v}^2 - V(r, \theta) = c_1, \quad E_2 \equiv r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi} = c_2 \tag{4), (5}$$

がでてくる．ただし φ, θ は極座標の経度，緯度．

$E_1=c_1$ が積分なら $E_1{}^2=c_1{}^2$ も積分だが，こんなものを除くと上の 2 つ以外の積分は知られていない．



第 1 図　第 1，第 2 積分の与える運動域
…… 内は第 1 積分による
—— 内は第 1，2 積分よる

§ 2.　運動方程式 (1) は 6 階であるから独立な積分は 6 ケ存在する．実際 6 ケの積分 $E_j(\vec{r}, \vec{v}, \vec{t}) = c_j$ $(j=1, \cdots, 6)$, を $\vec{r},\ \vec{v}$ について解いたものが一般解 (2) であると考えられる．そうすると 6 ケの積分のうち 2 ケだけ求まっている．第 3 番目を求めることはどれほどの意義があるのか？

まず積分 (4), (5) から運動についてどれだけの性質が引き出せるかをみよう．(4) だけからだと

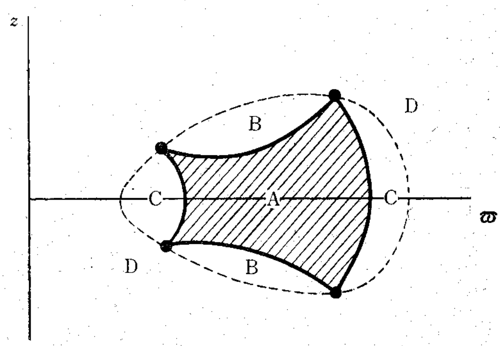
$$V(r, \theta) = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - c_1 \geqq -c_1. \tag{6}$$

$c_1 \geqq 0$ のとき $V \geqq -c_1$ は“正の量が負の量より大きい”というだけで情報量 0 だが $c_1<0$ なら $V \geqq -c_1>0$ は運動の可能な範囲についていくばくかの情報を与える．ただしこの情報は“実数の 2 乗は負にならぬ”という当り前のことしか $\vec{v}$ について使っていないので至極大まかなものである．つぎに (5) も一緒に考える．(5) は $\dot{\varphi}$ が，$c_2 \neq 0$ なる限り，$\neq 0$ を示す．だから上で $\vec{v}^2 \geqq 0$ としたのは認識不足だったわけだ（$\vec{v}^2=0$ は不可能）．実際 (4), (5) から

$$V(r,\ \theta) - \frac{c_2{}^2}{2r^2\cos^2\theta} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - c_1 \geqq -c_1 \tag{7}$$

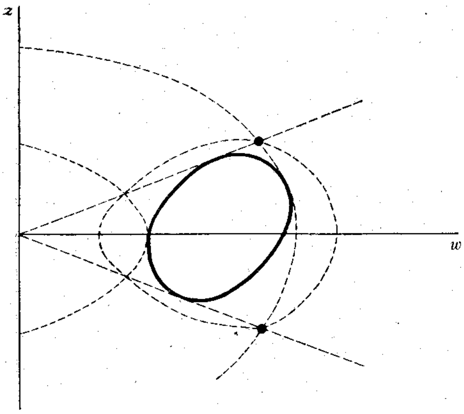
を得る．第 1 図に (6), (7) の与える運動可能領域を示す（赤道面対称も仮定した）．積分 (5) による情報の改善がよくわかる．

(7) の不等式は再び $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ が負にならぬことを使って得られた．さきほどの考え方からすると，たとえば“$\dot{r}$ と $\dot{\theta}$ は同時に 0 とならないかも知れぬ．たとえ $\dot{r}=\dot{\theta}=0$ が実現してもそれが第 1 図の卵形の周上いたるところで起るとは限らない”というようなことが予想される．ここで，運動可能の領域をさらにせばめるような



第 2 図　改善された運動域 A

* 東大理
G. Hori; On the Third Integal.



第３図　ケプラー運動の運動域は第４積分により閉曲線になる.（実線）

積分はどんなものか，と考えてみよう．積分のもっとも一般的の形は (3) であるが，

i）重力場は定常で軸対称なのだから $-\infty<t<+\infty$ の運動領域に関する情報を与える積分は t, φ を陽に含まない;

ii）$\dot{\varphi}$ が出て来たらその都度 (5) を使って c_2 で置き換える;

とすると積分は極座標を使って

$$E_3 \equiv E_3(r,\ \theta,\ \dot{r},\ \dot{\theta},\ c_2) = c_3 \qquad (8)$$

となるだろう．一方 (4), (5) を一緒にして

$$E_1{}^* \equiv \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r,\theta)+\frac{c_2{}^2}{2r^2\cos^2\theta} = c_1. \qquad (4^*)$$

(8), (4*) からどんなことがいえるか？

両式を $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ について解けば

$$\dot{r} = f(r,\theta,c_1,c_2,c_3),\quad \dot{\theta} = g(r,\theta,c_1,c_2,c_3) \qquad (9)$$

をうるだろう．たとえば f をうるのに (4*) から $\dot{\theta}$ を r, θ, $\dot{r}$ で表わしたものを (8) に代入し，それから $\dot{r}$ について解くと考えれば f の中には $\sqrt{(r,\ \theta\ \text{のある函数})}$ がはいってくるだろうというようなことを考えると $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ が実数となるためには r, θ がある限られた範囲にあることが予想される．この範囲が第１図卵形の内部にあること* は当然で運動の領域のより良い知識をあたえる．

* 卵形の外では $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2<0$ で $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ の少くとも１つは実数でない．

領域は一般に第２図のようになる（と思う）．図で r, θ 面内の速度ベクトルを改めて $\vec{v}$ とかくと，

領域A：　$\vec{v}^2>0$, $\vec{v}$＝実ベクトル（運動領域）
〃 B, C：$\vec{v}^2>0$, $\vec{v}$＝虚ベクトル
〃 D：　$\vec{v}^2<0$, $\vec{v}$＝虚ベクトル

卵形上の４点で $\vec{v}=0$; それ以外の線上では $\vec{v}^2=0$, $\vec{v}$＝虚ベクトル．さて $\vec{v}$ が実ベクトルから虚ベクトルにうつるためには少くとも１つの成分が実数から虚数にならねばならぬ．そしてこれは $\vec{v}$ を r, θ で表わそうと，$\varpi(=r\cos\theta)$, z で表わそうと関係しない．適当な直交曲線座標を使って $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$ としよう．第２図のAでは v_1, v_2 ともに実数であるが，AからBには入った時

i）v_1, v_2 ともに虚数となる;

ii）どちらか１つ，たとえば v_1 のみ虚数になる;

の２つの場合がある．ii) の場合はBで $\vec{v}^2=v_1{}^2+v_2{}^2>0$＝実数，しかるに $v_2{}^2$ も実数，よって $v_1{}^2$ は実数，v_1 は純虚数となる．一方 A, B の境界は無限小歩けば渡ってしまうので v_1 が実数から純虚数に無限小の変化で移るとすれば０を通るしかない．すなわち境界では $v_1=0$ となる．ゆえに解曲線は境界に接し，境界は解曲線の包絡線となる．かくして運動はBに滲透し得ない．ii) は採用した座標系により変数分離ができた場合である．(A, C の境界では v_2 が０になる．) しかし，変数が分離されようとされまいとにかかわらず (8) が求まれば第２図の運動領域は決定されるのである．

§ 3.　だがまだ３つの積分が残っているという反問に対しては

i）残る３ケの積分によって第２図が改良されることはない;

ii）必要とあらば残る３積分は不定積分を３つ実行するだけで求められる（最終倍乗子の理論による).

とつけ加えれば十分であろう．第３積分 (8) の意義はこの辺にあろう．

菅平では ii) に重点をおいて話したが，本稿の話——とくに変数分離の新らしい見方——の方が面白いと思う．最後にわれわれ熟知のケプラー運動について § 2 の議論を具体化しよう．ポテンシャルを $V=\mu/r$ とすると，第３積分は

$$E_3 \equiv (\vec{r}\times\vec{v})^2 = r^4\dot{\theta}^2+c_2{}^2\sec^2\theta = c_3 \qquad (10)$$

これと (4*) とから

$$\dot{r}^2+\frac{c_3}{r_2}-\frac{2\mu}{r} = 2c_1. \qquad (11)$$

(10), (11) は (9) に対応する．$\dot{r}$, $\dot{\theta}$ が実数であることから

$$\left.\begin{array}{c} \cos^2\theta \geqq c_2{}^2/c_3 \\ -\dfrac{\mu+\sqrt{\mu^2+2c_1c_3}}{2c_1} \leqq r \leqq -\dfrac{\mu-\sqrt{\mu^2+2c_1c_3}}{2c_1} \end{array}\right\} \qquad (12)$$

を得る．A, B の境界は線分，A, C の境界は円弧となる．それぞれの境界上では $\dot{\theta}=0$, $\dot{r}=0$ が成り立っているがこれは $(r,\ \theta)$ で変数分離が実現されていることにほかならない．

もし練習のために (r, θ) の代わりに (ϖ, z) を使えば第3積分は

$$(z\dot{\varpi}-\varpi\dot{z})^2+\frac{\varpi^2+z^2}{\varpi^2}c_2^2=c_3,$$

(4*) は

$$\frac{1}{2}(\dot{\varpi}^2+\dot{z}^2)-\frac{\mu}{\sqrt{\varpi^2+z^2}}+\frac{c_2^2}{2\varpi^2}=c_1.$$

これから

$$r^2\dot{\varpi}=z\left(c_3-\frac{r^2}{\varpi^2}c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\pm\varpi(2c_1r^2+2\mu r-c_3)^{\frac{1}{2}}$$

$$r^2\dot{z}=-\varpi\left(c_3-\frac{r^2}{\varpi^2}c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\pm z(2c_1r^2+2\mu r-c_3)^{\frac{1}{2}}.$$

$\dot{\varpi}$, $\dot{z}$ が実数ということから再び (12) を得る．ただし A, B; A, C の境界上で $\dot{\varpi}$, $\dot{z}$ ともに0にならぬ．(ϖ, z) で変数分離が実現せぬからである．いいかえると“変数分離に導びかない ϖ, z を使っても正しい結論をうる”ということになる．

さて残る3ケの積分は

$$E_4\equiv\sin^{-1}\frac{\sqrt{E_3}\sin\theta}{(E_3-E_2^2)^{1/2}}-\cos^{-1}\frac{(E_3/r)-\mu}{(\mu^2+2E_1E_3)^{1/2}}$$

$=c_4$（近点の不動；軌道が楕円）

$$E_5\equiv\frac{\mu}{(-2E_1)^{3/2}}\cos^{-1}\frac{2E_1r+\mu}{(\mu^2+2E_1E_3)^{1/2}}+\frac{1}{2E_1}(2E_1r^2+2\mu r-E_3)^{1/2}-t$$

$=c_5$（ケプラー方程式）

$$E_6\equiv\varphi-\sin^{-1}\frac{E_2\tan\theta}{(E_3-E_2^2)^{1/2}}=c_6,$$ （昇交点の不動）

となる．

一般論からするとこれらの積分は運動域を第2図以上にせばめないはずである．ここで筆者は弁解しなければならぬ．実は第4積分が第2図の領域情報をさらに改善する．改善てなものではない．実は2次元の領域が1次元の閉曲線に縮退してしまう*（第3図）．これまったくもって運動が周期的であるからだ．

* E_6 積分のため，r, θ, φ 空間でも領域は1次元閉曲線となる．

ケプラー運動はこの意味で（r, θ で変数分離が可能だからではなく，周期的なので）一般の力学系の代表としては工合が悪い．ケプラー運動に無限小の摂動を加えて第3積分まではそのまま成立し，E_4 と E_6 が歩み無限小の長年項をもつような架空のケプラー運動を考えれば，昇交点，近点は無限にゆっくりと回転し，周期性はのぞかれ，領域は第3積分までで完全に規定される．このような架空のケプラー運動は定常軸対称重力場のあたえる運動の良いモデルである（と思う）．

以上第3積分について筆者の所感である．独断がありましたら乞御寛容．

一般相対論および重力に関するロンドン会議に出席して

成　相　秀　一*

去る7月1日から 10 日まで，ロンドン大学の機械工学教室で，一般相対論および重力に関する国際会議が行なわれた．本会議に先立って，6月 28 日から重力場の量子化と重力崩壊とについての非公式の研究会が予定されていたので，私は学術会議から派遣された阪大理学部の内山教授とともに 26 日の夜羽田を発った．高所恐怖症の私であるが，どうやら無事に 27 日の昼前ロンドン空港に着いた．

翌朝，会場とこれからの2週間を過すはずの大学宿舎との下検分を兼ねて，少し早目に会場内の登録所へ出掛けた．待つほどもなく，今度の会議の世話役をしているキルミスター氏の秘書が姿を現わし，彼女からわれわれの宿舎たるティザード・ホールの位置を教えられた．それは，会場から道路一つ距てた，歩いて5分もかからないところにあり（ハイドパークのすぐ近く），前夜のホテルとは較べものにならない快適かつ壮大な建物であった．

最初の予定では，内山先生は量子化の会（第1会場）に，私は重力崩壊の会（第2会場）に出席することにしていた．ところが，後者は 30 日だけという掲示が出ていたので，私もまた第1会場へ出席した．（この掲示は間もなく訂正され，第2会場の方もほとんど同時に開会されたそうであるが，後の祭りであった．もっとも，量子化の問題も興味があることおよび英会話がからきし駄目なことを顧慮すれば，終始第1会場に出席したことを私はそれほど後悔していない．）

議長は，1957 年に数カ月を京都の基研で過し，竹原へも夫妻で訪問されたプリンストン大学のホイーラー教授であった．昨秋から今年の 1 月にかけて阪大に滞在し，京都と竹原とで講義をしてもらったノースカロライ

* 広島大理論物理学研究所