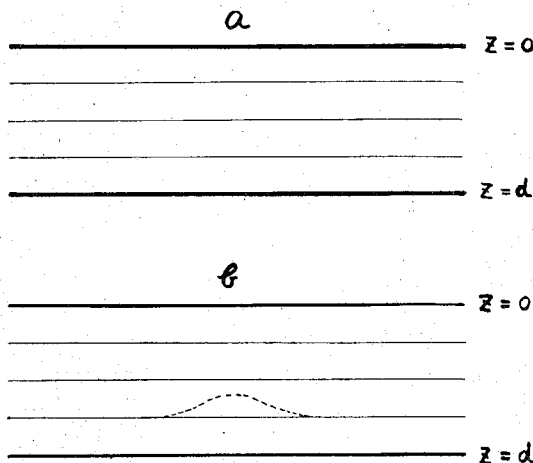


熱対流について(II)

山口 七郎*

前号の(Ⅰ)においては、§1で熱対流の例として、鍋に入れた水を下から熱すると上下を往復する対流が起り熱を上に乗ぶこと、陸地が広範囲にわたって太陽によって熱せられた場合水蒸気を含んだ空気の対流によって積雲が一定間かくをおいて生ずること(米国のフロリダ州の上空 5000~8000m から飛行機でこの積雲の模様をとった写真が数枚(3)の118頁と119頁の間にのっている。雲はきれいに平行な列をなしている。)、南洋の海面が熱せられて、多湿の空気が激しい対流を起こし、地球の自転によるコリオリ力(転向力)のため水平面内でまわる渦が多数発生しそれが発達すると台風になるらしいこと、太陽外層に熱対流が起っている証拠としての粒状組織(Granulation)と大きな粒状組織(Supergranulation)(平均の速度は太陽表面近くでいずれも約0.4km/s)、星の大気から出てくる線スペクトルに乱流速度が観測されるのは一つには熱対流によって星の大気に速度場がつくられるためであること、を述べた。

§2のa)では実験室における水平な二つの面で仕切られた流体層に生ずる熱対流についての観測結果をのべた。ここでつけ加えたいことは、ベナール細胞(今世紀のはじめベナールが厚さ1cm以下の液体の層を下から熱して対流細胞を観察した)は下からの加熱による不安



a(上). 温度の変動が全くない場合.
b(下). 温度の変動がある場合の一例.

第7図 下から加熱されている流体層における等温線(面).

定性の他に液体の表面張力の温度による変化にも起因していることである。

§2. 実験室の熱対流(続き)

b) 線型理論

対流についての実験結果は理論的にどのようにして説明されるであろうか。

いま下から熱せられている流体層を考える。それが完全に一樣に熱せられて水平面内で温度の変動が全くなければ(第7図a), そうしてかきませなければ、いくら下から熱しても、全体が浮き上がることはできないので、対流は起らない。すなわち対流が生じるためには水平面内で温度(密度)は変動しなければならぬ。そこで温度 T は水平面内での平均(上に $-$ をつけて示す) $\bar{T}(z, t)$ とそれからのずれ T' に分ける必要がある。従って対流場は、流体の速度 $\mathbf{u}=(u, v, w)$, および平均の温度プロファイル \bar{T} , 温度変動 T' , で記述される。これらは次の方程式によって決定される。

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} = -\operatorname{grad} \varpi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \gamma T' \mathbf{e} \quad (2)$$

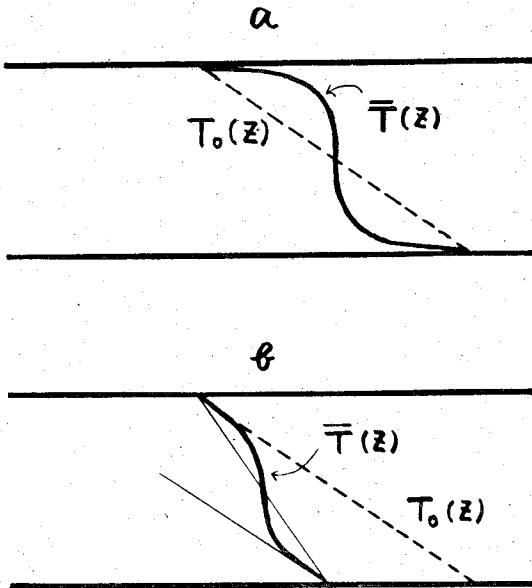
$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) T' - \frac{\partial}{\partial z} w T' = \kappa \nabla^2 T' + \beta w e_3 \quad (3)$$

上の式で、 ϖ の項は圧力の項であるが(1)を使って消去できる。 ν, κ はそれぞれ粘性、熱伝導に関する係数、 γ は重力の加速度 g に比例する既知の定数、 $\mathbf{e}=(0, 0, e_3)$ は垂直上方を示す単位ベクトル(z 軸を下向きにとる場合は $e_3=-1$) である。

$$\beta = -e_3 \frac{\partial \bar{T}(z, t)}{\partial z} \quad (\text{重力方向への温度勾配})$$

$\bar{T}(z, t)$ についての方程式も簡単に出るが、 \bar{T} が t に関して変化する場合(初期の静止状態に微小な変動を与え、時間的に積分して行って最終状態を求める方法の場合)には、全熱流量 $H = \kappa \beta(z, t) + e_3 w T'$, も z, t による。そこで今は最終状態のみに着目する。最終状態が定常対流(層流的対流)なら問題ないが、乱流的対流の場合、 \mathbf{u}, T' は時間的に変動する部分をもつ(§3のc)参照)。ここで最終状態においては、水平面内で平均した量 $\bar{T}, w T'$ などは、時間的に変動しないと仮定する。

* 京大理
S. Yamaguchi; On Thermal Convection.



a. ΔT 下を固定した場合。
 b. 全熱流量 H を固定した場合 (上端の温度は固定)。

第8図 対流の二種類の問題。

そうすると \bar{T} の方程式から全熱流量 H は z にもよらない定数であることがわかる。

$$H = \kappa \beta(z) + e_s \overline{wT'} \quad (4)$$

第1項は熱伝導, 第2項が対流, による熱流量を示す。また (2) 式の最後の項は, 流体塊が周囲より熱い ($T' > 0$) とき, 上方 (e の方向) に加速されることを示す。(3) 式の最後の項は, 流体塊が1秒間に $e_s w$ だけ上方に動くので, 動いた距離に温度勾配 β をかけた量だけ, 周囲より温度が増加することを示す。

$\bar{T}(z)$ を求めるには, (4) 式を積分すればよいが, 水平な二面をもつ流体層における対流の問題に二種類あるのでその各場合について考える。

初期の静止状態と最終状態をくらべた時,

A. 上下面の温度差 ΔT が固定されて, H が増加する場合 (第8図 a)。

B. H が不変で, ΔT が減少する場合 (第8図 b)。

この各場合について, β , ΔT , H が初期と最終でどう変わるかを下に示す。

A では

$$\beta_0 = \frac{\Delta T}{d} = \frac{H_0}{\kappa} \rightarrow \beta(z) = \beta_0 - e_s \frac{\overline{wT'} - \langle wT' \rangle}{\kappa} \quad (4A)$$

$$H_0 = \kappa \frac{\Delta T}{d} \rightarrow H = H_0 + e_s \langle wT' \rangle$$

B では

$$\beta_0 = \frac{H}{\kappa} = \frac{\Delta T_0}{d} \rightarrow \beta(z) = \beta_0 - e_s \frac{\overline{wT'}}{\kappa} \quad (4B)$$

$$\Delta T_0 = \frac{H}{\kappa} d \rightarrow \Delta T = \Delta T_0 \left(1 - \frac{e_s \langle wT' \rangle}{H} \right)$$

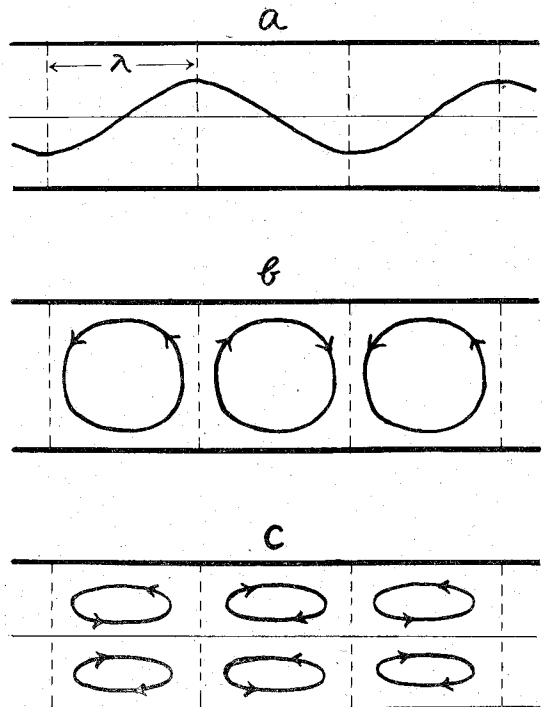
上の式で $\langle \rangle$ は, 流体層全体にわたって平均をとったもの (— のついた量を z について平均) を表わす。

A の場合は, 対流の実験及びその理論的説明にこれまでとられて居る考え方である。B の場合は, 星の外層の対流の問題の原型と考えられる。(3) 式の β は (4A) または (4B) を使って消去できる。A, B の場合共に, 方程式を無次元化すると, 方程式の係数は二つの無次元の数

$$P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{\beta_0 r d^4}{\kappa \nu}$$

だけしか含まない。

そこで以上の方程式をもとにして, まず, 線型理論を説明する。静止している流体層 (第7図 a) に, 速度または温度の微小な変動を与えると, その変動が消えてしまう場合 (安定), 変動が発達して対流が生じる場合 (不安定), 及び変動が成長も減衰もしない与えられたそのままの場合 (中性安定, marginally stable) とがある。中性安定の場合と, 不安定な場合のごく初期に限れば, $|u|$, $|T'|$, は非常に小さく, (2), (3) 式において, これ



a. 温度変動又は垂直速度の半波長 λ の変動。
 b. 固有解 ($m=0$)。
 c. 固有解 ($m=1$)。

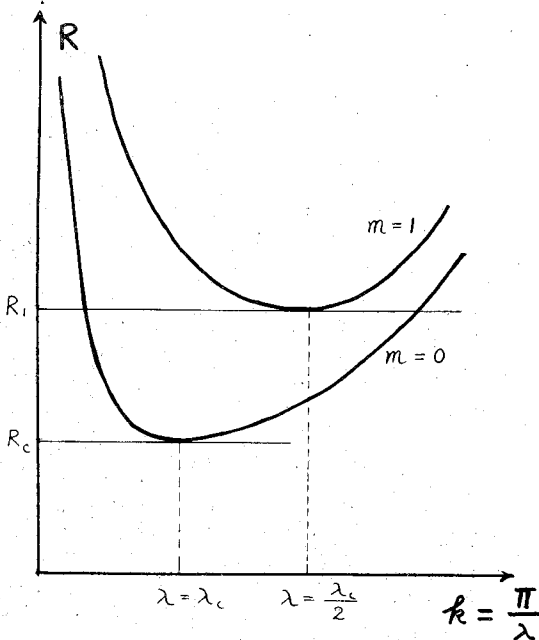
第9図 半波長 λ の変動と固有解。

らについて2次の項は無視できる。そうして $\beta = \beta_0 = \text{一定}$, である。こうして線型化した方程式ができる。

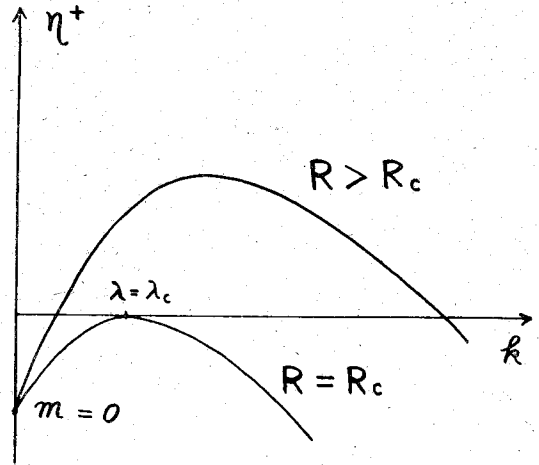
静止している層に与える微小変動 (w または T' のどちらかについて与えればよい) の水平方向の半波長を λ , 波数を $k = \pi/\lambda$ とする (第9図 a)。但しかんたんのため水平方向は一つの方向 (x 軸) だけ考える。一般には, 一つの λ に対して, 水平面 ($x-y$ 面) 内で, 正六角形, 正方形, 長方形, など, いろいろな模様の変動が可能である。

中性安定となる条件を求める問題は, (未知関数は w または T') R の固有値を求める問題になる。 λ を与えると, 固有函数 $\phi_m(x)$ 及び固有値 $R_m(\lambda)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) がきまる。(第10図)。 m は固有函数の $0 < z < d$ における零点の数に等しい。(第9図 b, c 参照)。 $m=0$ の場合 (基本様式, fundamental mode) に対する固有値が最も小さい。更に λ をかえて $R_0(\lambda)$ の最小値を求めると臨界レイリー数 R_c が得られる。これは対流の生じ得る最小の温度差を求めたことに相当する ($\because R \propto \Delta T \cdot d^3$)。 R_c は境界条件 (上下面に板があるかないか) によって異なるが, いずれにしても 1000 前後の数で, 実験によって出した R_c とよく合う。またこの時の対流細胞の大きさ λ_c も実験とよく一致する。中性安定の問題には P は全く関係しない。

次に $m \geq 1$ の場合の $R_m(\lambda)$ の最小値を R_m とすると, $R_m = (m+1)^4 R_c$, となり, $m=1$ の mode (第9図



第10図 中性安定を与える。 $R_m(\lambda)$ の曲線を $m=0, 1$ の場合に示す。縦軸は R の尺度で目盛る。(この図は, 第11図の $\eta^+ = 0$ の面における R と λ の関係を示している)。



第11図 R, P を与えた時, 波長 λ の変動の成長率 η^+ が λ についてどう変わるかを示す。但し, $m=0$ の場合 ($m=1, 2, \dots$ の場合は, η^+ は $m=0$ のときより小さい)。第10図 ($m=0$ の場合) とあわせて, この図において紙面に垂直下方に R 軸を考えると $\eta^+(\lambda, R)$ の形が想像できる。

e) は, $R = 2^4 R_c$ のときようやく不安定になる。この事を使って Malkus は $N(R)$ の $R_c, R_1 \dots R_5$ における不連続な増加 (実験結果 (2) と (4) 参照) を誤明した。例えば $R = 2^4 R_c$ までは $m=0$ の mode (第9図 b) のみが熱を運んで居たが, $2^4 R_c$ を越えると新たに $m=1$ の mode が熱の運搬に参加すると考えた。但し $R > R_c$ では $\beta = \beta_0$ ではなく $\beta = \beta(z)$ になるが, 同じ結果が出る。しかし $R > R_c \approx 10^6$ になると, 実験では $N(R)$ の不連続な増加がはっきりしなくなり, 対流の性質も変化する。実験は $P=4$ 及び 7 に対するもので, $R_1 \sim R_5$ が実際に P によらないかどうかは, 実験的に確かめられてない。

次に, $R > R_c$ では, 外からの変動に対して, ある波長域の変動は, 不安定であって, 対流が生じるわけである。今, 水平波長 λ の変動の成長が $\propto e^{\eta t}$ とすると, 問題は (P, R, λ) を与えて, η を固有値として求める問題になる。しかし, η は未知函数 (w または T' の Z 方向の変化の部分) に対する線型演算子の中に, 一次でなく二次の形で入っている。固有解を $\phi_m(z)$ とすると, それに属する固有値は, 三種あって, $\eta_m^1 < 0, \eta_m^0 < 0$, 及び η_m^2 (ある範囲の λ に対して > 0) である ($m=0, 1, 2, \dots$ の意味は, 中性安定の場合と同じ。第9図 b, c, 参照)。この三種の η の区別は, $e_3 w$ と T' の相関 $e_3 \overline{wT'}$ が負か, 零か, 正か, による ((4) の 69 頁の海野氏の解誤参照)。問題になるのは, $\eta_m^2(\lambda, R, P)$ である (第11図)。

この $\eta^+(\lambda, R)$ の形から, R が大きくなると, 不安定

な波長域が広がり、不安定度 η も大きくなる、ことがわかる。これが、実験結果 (8) の、 R が大きくなると、対流細胞の形が不規則な多角形にくずれ、大きさも種々のものが存在し、寿命も有限になる、ことをある程度説明しているように思われる。すなわち、 R が R_c よりあまり大きくない場合は、 $\eta > 0$ となる λ -域もせまく、 η が大きい λ は更に非常にせまい範囲になる。従って、 η の最大となる $\lambda = \lambda_0$ のみが発達すると考えられる。例えば w は、2次元で次の様に表わされる。

$$w = \sum_{l,n=1}^{\infty} a(l,n; \lambda_0) \cos \frac{\pi x}{l \lambda_0} \sin \frac{\pi z}{n d} \quad (5)$$

係数 (amplitude) a は、非線型方程式系 (1)~(4), から求める。所が、 R が大きくなると、一つの λ_0 だけでなく、ある範囲の λ が非常に不安定になり、次から次へといろいろな λ のものが励起されると考えられる。この η の意味をよく考えることは (非線型項を無視していることを考慮に入れて)、大切なように思われる。

上に述べたように、線型問題の解には、 $[R_m, \phi_m(x)]_l$ と $[\eta_m, \phi_m(x)]_{l,R,P}$, という関数系が出て来る。後に対流の問題を非線型のもとの方程式 (1)~(4) を使って解こうとする時 (星の外層の対流への応用を考えながら)、これら線型問題の解としての関数系で未知数 u, T' を展開して (方程式 (5) を参照)。係数の方程式を扱う方法が有力である。特に境界条件が、線型でも非線型でも同じ場合、線型解で展開すると、自動的に境界条件がみたされる上に、係数の方程式が簡単になる。しかし、特別な境界条件の時以外は、 $\{\phi_m(x)\}$ も $\{\phi_m(z)\}$ も直交系でないので、スペクトルを考える場合には、直交化しなければならない。そうすると、係数の方程式が簡単になる、という点は犠牲になる。

c) 非線型理論

R が R_c よりあまり大きくないとき、対流細胞の形が正六角形であること (実験結果 3) などほとんどの実験結果の定量的説明は、非線型項を残したままの方程式系 (1)~(4) を扱わなければ出て来ない (ただし、マルカスの理論のように対流の起り方に関して、物理的な見地から一種の極大原理を仮定して、これをもとにして対流場の諸量を導出する行き方もある)。

対流を扱う場合最も重要な点は、 R が R_c よりあまり大きくない間は ($R_c < R \leq 10^4$)、定常 (層流) であるが、 R が大きくなると対流の性質に変化が起って乱流的対流になることである (実験結果 (7), (8), (9) でのべたような乱れが現われてくる)。

i) 定常対流 (層流的対流)

この場合は、方程式系 (1)~(4) で時間微分を落せば (u, T') に対する微積分方程式になる。場の変数 (u, T') を境界条件をみたす完全 (直交) 関数系で展開

(フーリエ展開) して、係数 (記号 A で象徴的に表わす。(5) 式参照。) の方程式に変えると、 A についての非線型代数方程式の無限個を含む系となり、原理的に解ける。クオ (H.L. Kuo) は A の方程式を $R \leq 10R_c$ で解いている。

ポーム (E. Palm) は、粘性 ν の温度による変化を考慮して、正六角形の対流細胞が他の形のものより発生しやすいく、正六角形の中心が流体の湧出点か吸込み点であるかは、粘性 ν の温度に対する増減に關係していることを導いた。

なお、定常対流も実験では、はじめは静止した層から出発するのであるから、実験に対応して、 R が R_c よりあまり大きくない間は、時間微分を落さない方程式を使って、初期から積分していても定常対流を得る筈である。

理論的に興味のある問題は、大きな R に対しても定常解が存在するか、ということである。

ii) 乱流的対流

与えられた P に対して、 R がいくらの時、乱流的になるかは、実験的にも理論的にも、はっきりとは答えが出されていない。

今、場の変数 (u, T')、これを展開する函数系、その展開係数 (または振幅, Amplitude)、をそれぞれ象徴的に f, Φ, A で表わすと、その関係は象徴的に

$$f(x, y, z, t) = A(t)\Phi(x, y, z)$$

とかける (式 (5) を参照)。そうすると乱流的対流では f (または A) は、時間的に変動しない部分 \tilde{f} と、変動する部分 f^* をもつ。ここで記号 \sim は、乱流的対流の十分発達した最終状態のみを考える場合は、時間的な平均と取ってもよい。初期の静止状態から最終状態まで追跡する初期値問題の場合は、多数回の同じ (ように巨視的には見える) 実験のくりかえし、についての平均 (集合平均) と考える。

これまでの乱流的対流の取扱い方は、各研究者の乱流的対流の見方のちがいがあって、種々の行き方がある。

- (i) 別に見方をきめず、静止した初期状態に微小な変動を与えて、時間的に積分し、最終状態を見る。この方法によると、2次元では R が大きくても定常状態に達するが、3次元になると乱れが生ずる (熱対流の実験と理論の簡単な要約ものっている文献 (5) 参照)。
- (ii) 見方をきめず、 A の方程式に乱流の統計理論を適用する (文献 (4) の 67~71 頁のシュビーゲルの研究の海野氏の解説参照)。
- (iii) 平均的な対流細胞が存在し、それに小さな乱流渦が重なっていると考える ($|\tilde{f}| > |f^*|$)。
- (iv) 対流全体が非定常で、乱流と同じように考える

($\tilde{f}=0, f=f^*$). これに属するものに、マルカス (W.V.R. Malkus) の理論及び海野、加藤の理論がある。

最後に、上に述べ得なかった、対流の問題点を列挙する。

- (1) 乱れの生じる原因は何か。境界条件 (温度) の微小な変動か、外からたえず加わる振動か、3次元の流体運動に本質的なものか、初期に問題があるのか。
- (2) 対流が十分発達した最終の状態では、水平面内での平均、時間平均、集合平均、は一致するか。とくに最初のものとの二者とが一致するかどうか。
- (3) 水平方向に L だけはなれた $x=0, L$ に垂直壁がある場合 (実験) と、 $f(x)=f(x+L)$ のような周期的な場合 (理論的モデル、2次元の流体球のうすい外殻、 $L=2\pi R, R$ … 球の半径) とでどのようなちがいがあるか。
- (4) 乱流的対流が、平均流と乱れから構成されていると考えられる場合 (上述の (1) の見方)。平均流 (\tilde{u}, \tilde{T}) に対する乱流渦の影響を近似的に取入れたい場合、渦粘性、 ν_{eddy} および渦熱伝導性 κ_{eddy} を、粘性 ν および、熱伝導の係数 κ に、それぞれ加えるだけでよいか。その場合、 $\nu_{\text{eddy}}, \kappa_{\text{eddy}}$ は平均流の特徴にどのように関係するか。

§ 3. 星の外層の熱対流

星は、大気と呼ばれる観測する光が直接出て来る最外層からはじまっている。この大気層の上層部では、密度がうすいので、どの星でも、輻射だけでエネルギー運ばれ、外の空間に失なわれて行く。

そこで、星の大気および大気の下にある層 (星の外層) の構造を計算するには、まず次の三つの方程式を解けばよい。

$$\frac{dP}{dz} = \rho g \quad (\text{圧力の釣りあい}) \quad (6)$$

$$P = \frac{R}{\mu(P, T)} \rho T \quad (\text{星のガスの状態方程式}) \quad (7)$$

$$T = T(z) \quad (\text{輻射輸達の理論による温度分布}) \quad (8)$$

ここで、

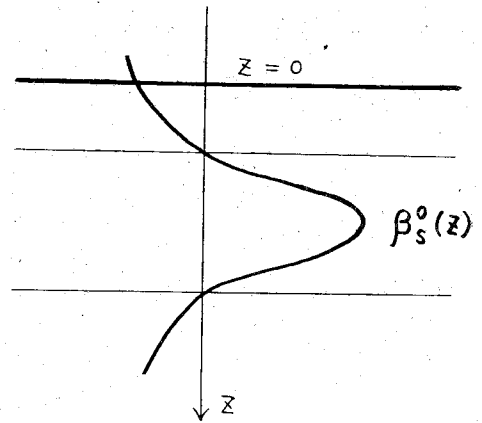
$$\tau = \int_{-\infty}^z \bar{\kappa}(P, T) \rho dz \quad (\text{光学的な深さ})$$

温度分布の式 (8) は、輻射平衡の仮定 (エネルギーは輻射だけで上に運ばれる)。

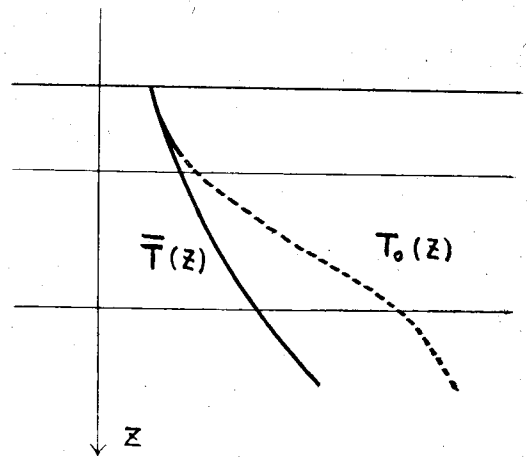
$$\text{div } \mathbf{F}_{\text{rad}} = 0 \longrightarrow F_{\text{rad}}(z) = F \quad (9)$$

を使っている (\mathbf{F}_{rad} は輻射による熱流量のベクトルで、星の外層のように水平方向に温度が一様な場合は、垂直上方に向く成分のみをもつ)。

方程式 (6)~(8) を解いて、 $P_0(z), \rho_0(z), T_0(z)$ を求め (以下でも、記号 0 が上か下についている場合は輻



第 12 図 輻射平衡を仮定して、星の外層の $P_0(z), \rho_0(z), T_0(z)$ を計算し、 $\beta_s^0(z) \equiv \beta^0(z) - \beta_{ad}^0(z)$ を出すと、ある領域内で $\beta_s^0 > 0$ になっている。



第 13 図 対流を考慮した温度分布 $\bar{T}(z)$ と輻射平衡を仮定した温度分布 $T_0(z)$. 第 12 図のように $\beta_s^0 > 0$ となっているとする。

射だけで熱が運ばれているとして出した量を表わす)、更にこれから、温度勾配 $\beta^0(z)$ 、断熱的温度勾配 $\beta_{ad}^0(z) = \beta_{ad}(P_0, T_0)$ を出し、シュワルツシルドの条件 $\beta_s^0(z) \equiv \beta^0(z) - \beta_{ad}^0(z) < 0$

が満足されている限り、輻射平衡の仮定のままこの計算を星の内部の方へ進めて行けばよい。上の β_s^0 は超過断熱勾配 (Super adiabatic gradient) と呼ばれ、液体 (実験室の対流) の場合の β_0 に相当する。従って $\beta_s^0 < 0$ は線型理論における (3) の式の最後の項の係数 $\beta = \beta_s^0 < 0$ ということである。

所でこのように計算して行った時、ある領域で $\beta_s^0 < 0$ となったとする (第 12 図)。この領域のあたりで対流が起っている可能性がある。従って、 $\beta_s^0 = 0$ となる所 (上の方) よりある程度上の層あたりから、対流のために、 $P_0(z), \rho_0(z), T_0(z)$ は、ずればじめて、実際は $\bar{P}(z), \bar{\rho}(z), \bar{T}(z)$ となって来る筈である (第 13 図)。