星のモデルの新しい計算法

内　田　寿　一*

はじめに

内部構造論の目的は，星の質量，光度，半径を説明できる内部の物理状態を知り，星の内部で起こる不可逆反応で引き起こされる構造の時間変化——進化を知ることである．その際たよりになるのは物理学の法則だけであるから，互いに矛盾しない幾つかの仮定を置いて推論を進め，星のモデルを作る．それを観測と比較することによって内部構造の知識をふやしてゆく．ところで，内部構造を決定する方程式が複雑なため，モデルを完成させるにはどうしても沢山の数値計算を避ける訳に行かない．

最近大型高速計算機が使えるようになって，モデル計算のスピード・アップが可能になった．さらにすべてのことを計算機にさせてしまおうとする「自動計算法」が考案され，その結果が発表され始めてきた．ここではモデル計算の「古い」註)方法と「新しい」方法を並べて説明し，「新しい」方法の効能とそれによる計算結果を紹介する．

註）「古い」,「新しい」の区別はあいまいに使っている．無次元変数を使うものは「古い」，物理量をそのまま扱うのは「新しい」,「Fitting」で解を求めるのは「古い」，それを使わないものは「新しい」，電子計算機が実用化されない，または計算機を利用しやすい方法は「新しい」，そうでないものは「古い」etc. いづれにしても「古い」というのは「古くなってしまった」という意味では決してない．

§ 1.　基礎方程式

実際に星のモデルを作るためには，星の内部で実現している物理状態を微分方程式で表わし，その解のうちで適当な境界条件を満たすものを探さなければならない．すなわち，星の構造を決める問題は数学的には境界値問題にある．

内部構造論で最も基本になる，球対称で平衡状態にある星の内部の状態を記述する基礎方程式は次の四つの微分方程式である．

（i）　力学平衡の式

$$dP/dr=-GM(r)\cdot\rho/r^2, \qquad (1)$$

（ii）　質量保存の式

$$dM(r)/dr=4\pi r^2\rho, \qquad (2)$$

（iii）　エネルギー伝達の式

$$dT/dr=-3\kappa\rho L(r)/16\pi acT^3r^2 \text{（輻射平衡）}, \qquad (3R)$$

または

$$dT/dr=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)T/P\cdot(dP/dr) \text{（対流平衡）}, \qquad (3C)$$

（iv）　熱平衡の式

$$dL(r)/dr=4\pi r^2\rho\varepsilon, \qquad (4)$$

($M(r)$ は半径 r の球内に含まれている質量，T, P, ρ は温度，圧力，密度，$L(r)$ は半径 r の球表面を通って流れるエネルギー量，γ は定圧比熱と定容比熱の比)．κ と ε は吸収係数とエネルギー発生量で，温度，密度，化学組成の函数として与えられる．また状態方程式を使えば ρ, P, T のうちの一つ（普通は ρ）を消去できる．境界条件としては

（i）　中心（$r=0$）で $M(r)=0$, $L(r)=0$,　　(5)

（ii）　表面（$r=R$ または $M(r)=M$）で

$$T=0,\ P=0 \qquad \text{（輻射平衡）}, \quad (6R)$$

$$\text{または } T=0,\ P=kT^{2.5} \qquad \text{（対流平衡）}, \quad (6C)$$

をとる．ただし k は星の質量 M, 半径 R, 光度 L, 化学組成によって決るパラメータで大気の構造から知られるべき量である．

これらの基礎方程式は解析的な解をもたないので，問題の解決はもっぱら数値的な方法にたよらなければならない．そのため能率がよく，見透しがよく効くモデル計算法を考案することも，星の内部で成立っている物理法則を解明することと共に，大事な問題である．このような要求に沿って，主に相似関係註)を利用したいくつかの計算方法が考えられており，それによって多くの成果をあげてきた．しかし内部構造と進化についての定性的な知識が一応出揃った今日，モデルの精密化によって，計算されたモデルと観測値との直接の比較をし，われわれの知識を一層正確なものにすることが要求される段階にきている．また，従来の方法では取扱いが困難だった進化のスピードが速い時期の内部構造を解明する問題も残されている．他方，大型計算機の活用で人間の計算労働が大幅に軽減できるようになった．このような事情か

註）基準になるモデルに対して質量が M 倍，半径が R 倍のモデルを考える．二つのモデルの各対応点で，後者の温度，圧力，光度等すべての物理量が基準モデルの物理量に M, R を含んだ定数因数を乗じたもので与えられるという関係．

* 東北学院大学工学部
J. Uchida; New Methods of Computation of Stellar Model.

らモデル計算の新しい方法がいくつか現われてきた．その代表的なものとしてヘニエイ一派のいわゆる「ヘニエイの方法」がある．

ヘニエイの方法を説明する前に，以前から行われてきた方法について一通り説明しておく．

§ 2. Fitting による方法

星の質量と化学組成を与えて内部の各点での物理量を求める問題を考える．そのためには適当な——境界条件を満たす——出発値を決めて，星の表面または中心から内向きまたは外向きに基礎方程式の積分を続けてゆけばよい．星の表面では（6R）または（6C）の境界条件で温度と圧力の値は決まるが，半径 R と光度 L は勝手にとれるから表面からの積分は (R, L) の組合せごとに決まる．ところがこのような積分を続けてゆくと中心 $(r=0)$ に近づくにつれて基礎方程式（1）の右辺が極端に大きくなり解が発散してしまう．逆に中心では $M(r)$, $L(r)$ の値は境界条件で与えられるけれども，中心温度 T_c, 中心圧力 ρ_c は勝手にとることができる．すなわち中心から外側に向う積分は (T_c, P_c) の組合せごとに決まる．しかしこの場合にも表面 $(T=0, P=0)$ に近づいた時解が発散してしまう（(3R) または (3C) による)。したがって内向きまたは外向きの一方向きの積分だけで基礎方程式と境界条件を満たす解を求めることはほとんど不可能である．この難点を除くため解の「接続（Fitting)」をおこなう．すなわち R, L, T_c, P_c をフリー・パラメーターとして何組かの解をまず求め，中心からの解と表面からの解が連続的につながる（Fitting の条件）という条件でパラメーターの値を決める方法をとる．まず (R, L) の値を一つ選んで表面から適当に選んだ点まで積分する．次に (T_c, P_c) の値を選んで中心から同じ点まで積分する．この点で内向きの積分で求められた T, P, $M(r)$, $L(r)$ を外向の積分で求められたそれらの値を比べれば，両方の値は一般に等しくない．そこで R, L, T_c, P_c の値をいろいろ変えて見て両方の解の食い違いがなくなる組合せを探し出す．それが見つかればモデルが一つでき上る訳けである．（質量と化学組成を与えればこのようなモデルは唯一個だけ作られる——フォークト・ラッセルの定理）

今述べた原理的な方法をそのまま利用しようとすれば相当な数の解を試作しなければならないのでその労力はばく大なものになる．例えば四つのパラメーターについてそれぞれ四つづつの値を仮定して解を試作するとして電動計算機なら 10 カ月（8時間労働）くらいはかかるだろう．さらに進化の各段階について，種々の質量，化学組成についてモデルを作る場合には一層大変なことになる．

フリー・パラメーターの数を減らしたもっと実用性のある方法は，簡単な変数変換で基礎方程式に現われる物理量を次元のない変数に置き換えることで実現できる．その代表的な方法にシュワルッシルト（Schwarzschild, Ap. J., **104**, 1946 または Ttructure and Evolution of Stars, 1956）の方法がある．この方法では基礎方程式が二つのパラメーター C または E と D を含む方程式となり，一方表面と中心での各変数の値は境界条件によって一通りに決つてしまう（中心の値にパラメーターが一つ残ることもある）．パラメーターの一つは外層の性質を決める C (M, R, L, 化学組成)（輻射平衡の場合）または E (M, R, K, 化学組成)（対流平衡）とエネルギー発生量に関係する D (M, L, R, 化学組成）である．Fitting の条件を満たすように決められた C と D の値（中心の値がパラメーターとして残っている時はその値も）はモデルの型（例えば対流中心核を輻射平衡外層がとりまいていて，両層の平均分子量の比が 1.5 であるモデル等々）について固有の値をとり，その値はすべての質量の量——もちろんこのモデルが適用できる範囲内だけで意味をもつが——に対して通用する．すなわち C または E と D の値はそのモデルの質量，光度，半径，化学組成の関係式を与える．また，基本方程式の解へ M, L, R, 平均分子量で作られる因数を乗ずることで内部の温度，圧力，光度などの物理量の分布も容易に求められる．これらの理由で質量や化学組成ごとに解を求める必要がなくなる．さらに重要なことは Fitting の操作を性質の違った層の境い目ですれば，それぞれの層のパラメーターの変化に伴って作られたモデルがどのように変化するか，また，どのような範囲に解——モデルが存在するか，等々モデルの性質を全体的あるいは解析的に調べることができるという大きな利点をもっているということである．

この方法は個々のモデルを作る場合よりモデル系列を作る場合に一層有効に使うことができ，1950 年頃から急速に進歩した星の進化の研究に極めて大きな貢献をしてきた．

無次元変数の方法では吸収係数やエネルギー発生量が $\rho^\alpha T^\beta$ の形で表わされなければならない．この形以外の函数形を使えば，パラメーターの数がふえたり，この方法が利用できなくなったりする．また，進化のスピードが遅く定常状態の近似が許される時には有効だが収縮期にある星のように時間微分を直接取扱わなければならない場合には困難に当面する．

このような場合にも Fitting の方法を使おうとすれば，初めに述べた原理的な方法にもどらなければならない．例えばハーセルグローブとホイルの高速計算機の使用を前提とした次の方法がある．(Hasselgrove-Hoyle,

M. N., **116**, 1956) まず次のパラメーターの組合わせで内向きと外向きの積分をする．

内向き　(L, R)，$(L+\delta L, R)$，$(L, R+\delta R)$

外向き　(P_c, T_c)，$(P_c+\delta P_c, T_c)$，$(P_c, T_c+\delta T_c)$

ここで L, R, P_c, T_c はそれぞれのパラメーターの予想される値，δL などはそれらの小さい変化である．その積分を内部の適当な点で打切り，その点で各物理量がパラメーターの値でどのように変るかをしらべ，外向き，内向きの解を一致させるために必要なパラメーターへの補正量を内挿法で求める．補正後再び積分をくり返えし補正量を求める．二つの解の食い違いが充分小さくなるまでこの操作を続ける．この方法は計算量をふやすけれど Fitting の方法が機械的で自動的にモデルを作るのに有効で高速計算機に適した方法である．もちろん吸収係数やエネルギー発生量の形がどんなものであってもよい．しかし Fitting の操作を全く行なわないヘニエイの方法に比べれば「新しい」方法とはいえないかも知れない．

§ 3.　ヘニエイの方法

ヘニエイとウイレーツの着想で始まったいわゆる「ヘニエイの方法」は高速計算機を使って星のモデルを自動的に計算するように考案された方法である．(Henyey, Wilets, Böhm, LeLevier, Levée, Ap. J., **129**, 1959, Henyey, Forbes, Gould, Ap. J., **139**, 1964) その特徴はモデル計算の高速化と自動化の他に，表面の境界条件，状態方程式，吸収係数，エネルギー発生量などを理論と同程度の精度で取扱うことが可能なことである．これは単にモデルの精密化ができるようになっただけでなく，今までの方法では非常に困難だった収縮期のモデルや，化学組成の時間的な変化によってエネルギー発生量が変る場合などのモデルの計算を容易にする．また数学的には基礎方程式を差分方程式に書きかえ，境界条件を差分方程式をとく条件式として取扱うことで Fitting のわずらわしさを取除き計算を機械的にできるようにしたことである．

はじめに m 個の未知函数 $y^1(x)\cdots y^m(x)$ (x は独立変数) についての連立微分方程式

$$\frac{dy^k}{dx}=f^k(y^1\cdots y^m, x)\quad (k=1\cdots m)\qquad (7)$$

を差分方程式で近似し，それを $x=0$, $x=X$ での境界条件を満たすように解く方法を考える．

$0\leq x\leq X$ の範囲を $(n+1)$ 個の点 $x_1=0$, $x_2\cdots x_{n+1}=X$ で n 個の小区間に分割し，それぞれの小区間でもとの微分方程式を m 個の差分方程式で置きかえる．

$$\frac{y_{i+1}{}^k-y_i{}^k}{x_{i+1}-x_i}=\frac{1}{2}(f_{i+1}{}^k+f_i{}^k)$$

$$(k=1\cdots m),\ (i=1\cdots n)\qquad (8)$$

(これは $m\times n$ 個ある) これに m 個の境界条件を加えれば，未知数 $y_i{}^k=y^k(x_i)$ ($k=1\cdots m$, $i=1\cdots n$) と同数の $m(n+1)$ 個の方程式となり，それらを解くことによって y^k の近似値を求めることができる．このようにして解いた近似解の精度は微分方程式の近似として使った差分方程式の精度によって決まる．すなわち各変数の変化の一様性や区間の幅の大きさによる．

この方法を星の内部構造を決める基礎方程式 (1)～(4) を解くために利用したのがヘニエイの方法であるが，そのために以下に述べるようないくつかの工夫が必要になる．

(7) 式の右辺 f^k が $y^1\cdots y^m$ の一次式なら差分方程式 (8) も一次方程式となり $y_i{}^k$ は普通の連立一次方程式をとく方法で解が求められる．しかし今の場合 f^k は一次式でないから差分方程式をとくには逐次近似の方法を使わなければならない．そのために Newton の方法を使う．すなわち

$$g^k(y_i{}^1\cdots y_i{}^m,\ y_{i+1}{}^1\cdots y_{i+1}{}^m)=\frac{y_{i+1}{}^k-y_i{}^k}{x_{i+1}-x_i}-\frac{1}{2}(f_{i+1}{}^k+f_i{}^k)\qquad (9)$$

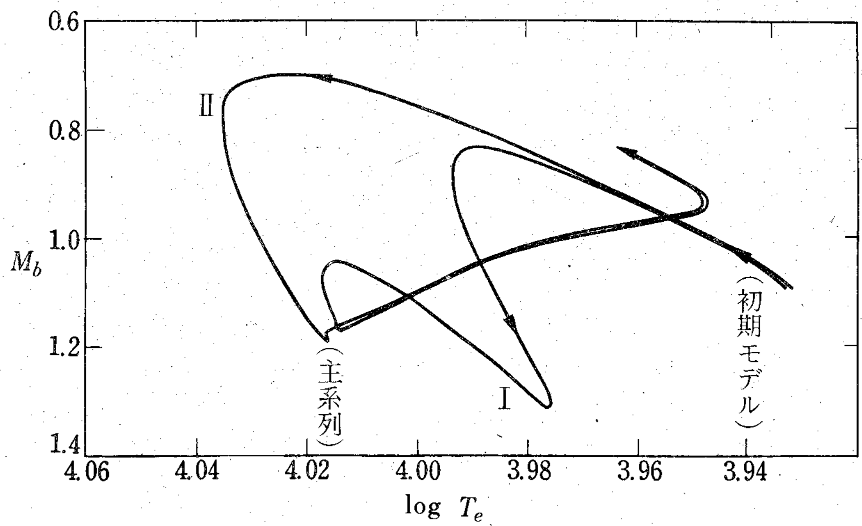
とおき，差分方程式 (8) の近似解を $y_i{}^k$，それに対する補正を $\delta y_i{}^k$ ($k=1\cdots m$, $i=1\cdots n+1$) とすれば，$\delta y_i{}^k$ は，

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial g^k}{\partial y^j}\right)\delta y_i{}^j+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial g^k}{\partial y^j}\right)_{i+1}\delta y_{i+1}{}^j=-g^k(y_i{}^1\cdots y_i{}^m,\ y_{i+1}{}^1\cdots y_{i+1}{}^m)$$

$$(k=1\cdots m,\ i=1\cdots n)\qquad (10)$$

と m 個の境界条件とから解くことができ，新しい近似解は $y_i{}^k+\delta y_i{}^k$ となる．この方法を $\delta y_i{}^k$ が充分小さくなるまでくり返せば差分方程式 (8) の解――内部の物理量の内布が求められる．

星の場合には，第一近似として仮定したモデル (？) から r_i, L_i, P_i, T_i を使って δr_i, δL_i, δP_i, δT_i ($i=1\cdots n+1$) の $4(n+1)$ 個の未知数 (実際には後に述べるような変数変換をしてある) を含んだ (10) に相当する式を作る ($4n$ 個)．境界条件として (5), (6) に対応して中心で $\delta r_1=\delta L_1=0$，表面で $\delta P_{n+1}=\delta T_{n+1}=0$ が与えられる．これら $4(n+1)$ 個の式から δr_i, δL_i, δP_i, δT_i, $i=1\cdots n+1$ の値を解くことができる．$r_i+\delta r_i$, $L_i+\delta L_i$ etc で第二近似が得られるから再び (10) を使って再び補正を求める．このような操作をくり返して補正量が充分小さくなればそれでモデルが完成したことになる．表面の境界条件はもっと正確に取り扱うこともできる．中心の境界条件から出発して解いてきた (10) の解が $i=n$ にまで達した時，$T_n+\delta T_n$, $P_n+\delta P_n$ などの値が，表面の値 $R_{n+1}+\delta R_{n+1}$, $L_{n+1}+\delta L_{n+1}$ を使って大



第 1 図

気モデルを計算した時の $i=n$ の点での温度，圧力などが前記の値に等しくなるような δR_{n+1}, δL_{n+1} を表面での境界値とする．なお独立変数には $M(r)$ を使用する．

差分方程式で求めた近似解 y^k の精度を上げるためにはその変化率がなるべく一様な函数を選べばよい．例えばヘニエイ一派は圧力 P の代りに $p=P^{1/4}$, 密度 ρ の代りに $q=\rho^{1/3}$, 輻射量 $L(r)$ の代りに $F=L(r)/\xi^2$ を使っている．これらの変数のとり方は計算の対象になる星の質量，進化の段階によって最も適当なとり方があるように思われる．ヘニエイの他，ラルソンとデマルク (Larson, Demarque Ap. J., **140**, 1964), ホフマイスター，キッペンハーン，ワイゲルト (Hofmeister, Kippenhahn, Weigert, Zs. f. Ap., **59**, 1964) 等がヘニエイの方法によるモデル計算の方法を発表しているが，変数の選び方にそれぞれ特徴を発揮しているのは興味深い．

§ 4. ヘニエイの方法による計算例

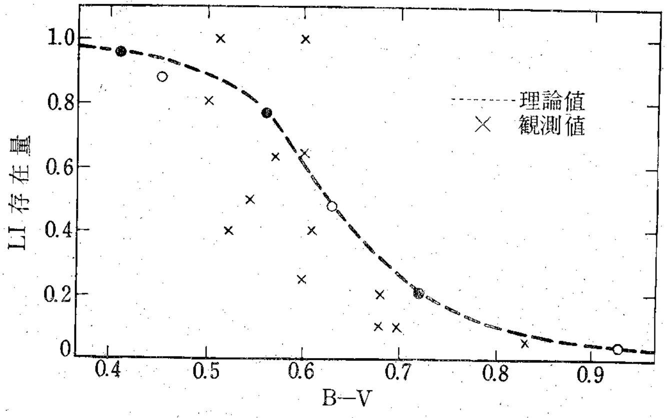
進化のスピードが早い段階のモデルを作るためには重力収縮などのエネルギーを考えにとり入れなければならないが，これを無次元変数の方法で解決するのは非常にやっかいな仕事になる．また進化の初期の段階で C–N サイクルの一部の反応だけが急に進むような場合のモデルになれば無次元変数の方法はほとんど役に立たず，「新しい」方法の一人舞台になる．

現在までのヘニエイ一派の研究が主系列に到達する以前の進化に重点をおいているのはヘニエイの方法だけがもつ威力を充分に活用するためであろう．

一つの例としてシリウス程度の質量が主系列に到達する前に演ずる奇妙な現象を述べよう．(Bodenheimer, Forbes, Gould, Henyey Ap. J., **141**, 1965) 星のエネルギー源である *CNO* サイクルが充分成長すれば *C*, *N*, *O* の存在比はある平衡状態に達する．ところが観測されるこれらの元素の存在比は平衡値と大部違っている．星の初期の化学組成は観測値に等しいとしてモデルの進化経路を計算すると第１図（Ⅰ）のように主系列に達する前に急激な光度の減少が見られる．これは星の内部で平衡値が実現するために *CNO* サイクルのうち *C* を *N* に変える反応だけが急に進み，これが中心付近の温度上昇と膨張を引き起こしその膨張エネルギーが発生したエネルギーを横取りする結果だと解釈される．初めから *CNO* の平衡値を採用して進化の経路を求めれば第１図（Ⅱ）のようにこのような現象は起きない．

ボーデンハイマーは星が主系初に達する前の表面の対流層の拡がりとその時間変化を詳しく調べ晩期の主系初星での L_i の不足を説明した．（第２図）(Bodenheimer, Ap. J., **142**, 1965)

進化の進んだ段階まで進化の系初を追う研究を，ヘニエイの方法で，キッペンハーン等が行なっているし，(Hofmeister, Kippenhahn, Weigert, Zs. f. Ap. **59, 60**, 1964; Kippenhahn, Thomas, Weigert, Zs. f. Ap., **61**, 1965)，デマルク等は 1 M⊙ 程度の星の構造と進化にヘニエイの方法を試用している，(Demarque, Percy, Ap. J. **140** (1964); Demarque, Larson, Ap, J., **140** (1964))，など「新しい」方法による結果がにぎやかに登場し始めている．



第 2 図

おわりに

高速計算機の活用が可能になったため，モデル計算のスピード・アップや自動化とともに，モデル計算の精度を理論の精度と同程度にまで上げることができるようになり，計算結果と観測結果との直接の比較が可能になりつつある．また，今まで立ちおくれていた時間変化の早い段階でのモデル計算にも新しい計算法が大きい威力を発揮している．

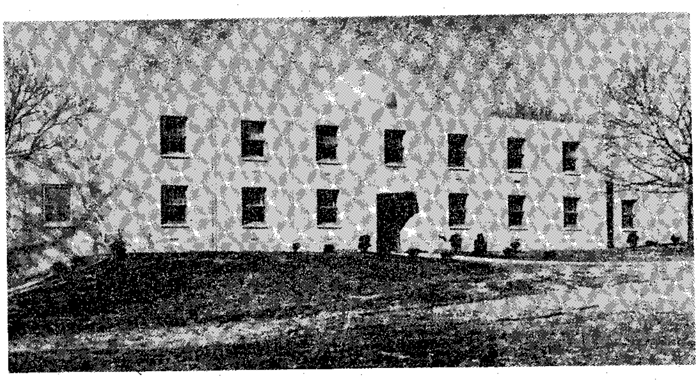
しかし「新しい」計算法を手放しで受け取るにはいくつかの危険を伴う．その大きな理由は，新しい方法を使えば，すでに素性のわかっているモデルを精密に計算する能力は著しいが，ある型のモデルの存在範囲を決める（例えばシエーンベルグ・チヤンドラセカールの限界（Schönberg, Chandrasekhar, Ap. J., **96**, 1942）を求める）など，モデルの総括的または解析的な議論には非力であり，しかもそのような検討なしに自動計算の方法を使うことは危険だということである．この問題とも関係をもつが，第一近似となる推測値をどうとるか，極端に質量集中が起きた場合などに解が不安定になる，等々方法自体にも解決すべき点がある．

他方星の物理状態を記述する理論も依然として不確かさを残している．例えば星の中心や表面付近で起きている対流の問題である．また星自身の重力以外の力によって変形や内部運動が起きている星の構造，新星等の過激な運動の取扱い等々多くの未解決な問題が残っており，もちろんこれらの問題の方が計算法の問題よりずっと重要であることは言をまたない．そのことを認めた上で，あえて計算法の問題にしぼって本稿をまとめた次第である．

アメリカ海軍天文台滞在記

飯　島　重　孝*

5月1日夕方羽田を発って，シヤトル，シカゴを経由終着のバルチモアへ到着したのは同じ日付の午後 11 時過ぎだった．空港には海軍天文台報時部副部長の Dr. R. G. Hall と Mr. D. G. O'Handley の2人が出迎えてくれて，ここから夜のハイウエイを車でとばしてワシントン市内に入る．かねて予約して貰ってあった下宿先へ案内されて，旅装を解き終った時はもう午前1時近くであった．羽田からバルチモアまでほぼ 18 時間，時間的にもかなりの強行軍（？）で文字通り綿のように疲れていた．



Simon Newcomb Laboratory

次の日曜日を1日休養して5月3日から海軍天文台へ出勤した．Dupon Circle の近くにある下宿先からバスで 5～6 分で天文台正門に着く．ここから報時部のある建物，Simon Newcomb Laboratory まで構内を歩いてゆくのにかえって時間がかかる位である．案外簡素な正門の両側には白塗りの錨が飾られている．構内はゆっくりした起伏のある丘のような地形で，この広大な敷地一面に緑の芝ふが敷きつめられよく手入れされている．後で気付いたことだが，この芝ふの中を時々りすがたわむれていたり，たまには小さな野兎がはねまわっているのを見かける．一寸うらやましいような環境である．

報時部長の Dr. Wm. Markowitz は，丁度アテネでの人工衛星の測地利用に関する第2回国際シムポジウムに出張して，まだ帰らず不在であった．代りに Dr. Hall が台内の主だった人々や部内の1人1人にひき合わせてくれた．superintendent は海軍大佐の T. S. Baskett さん，軍人とは思えないような温厚な人である．ほかに scientific director がいて，Dr. K. A. Strand がこれに任じておられた．東京天文台の大沢（清輝）さんと懇意の人である．

* 東京天文台