ボーデの法則の力学的意義

堀　源一郎*

1) 太陽系における惑星の距離の配置については古くから「ボーデの法則」が知られている．これは1772年，当時ベルリン天文台長であったボーデが公表したもので，太陽，地球間の距離を1とすると，各惑星までの距離が

$$0.4+0.3\times 2^n,\ n=\text{惑星の番号} \qquad (1)$$

で表わされるというものである．nは金星を0，地球を1,…とするが，$n=3$には小惑星が該当し，また水星は$n=-\infty$にあたる．第1表にボーデの法則による値と実際の値とを比較した．海王星と冥王星を除けば両者は良く一致している．ことに法則の発表当時は土星より遠い惑星は発見されておらず，また小惑星第1号のケレスも知られていなかったので，1781年に天王星が，さらに1801年にケレスが発見されて，その距離が法則の予報するところと一致したことは法則の信頼性を一段と高めた．実際ケレスが発見された動機はボーデの法則にある．

惑星の場合ほど著名ではないが，ボーデの法則に類した法則が土星の衛星系に適用される．土星とMimasとの距離を4とすると各衛星までの距離は近似的に

$$4+2^n,\ n=\text{土星の衛星の番号} \qquad (2)$$

で与えられる．nはEnceladusを0，Tethysを1,…とし，Mimasは$n=-\infty$にあたる．$n=7$に対応する衛星はなく，また環の外側はこの単位系で3となるが，nをどのようにとっても(2)が3を与えることはできない．最近Mimasの内側に第10衛星が発見されたが上の単位系では約3.5にあたる．これも(2)では与えられない．第2表に(2)による値を実際の値と比較した．この場合も一致はかなり見事である．IapetusとPhoebeの間に新衛星がありそうな気持さえする．

上に掲げた法則はいずれも純然たる経験法則として発見されたものであるが，その後いろいろな太陽系生成理論が法則の物理的根拠を与えようとし，あるいは独自の法則を提唱した．例えばワイゼッカーは渦動による太陽系生成論の帰結として

$$R_n=a\times 2^n \quad (a\text{ は定数}) \qquad (3)$$

を導いた．ここにaは適当にきめてよい定数である．一方(1)や(2)で与えられる法則は

$$R_n=a\times 2^n+b \quad (a,b\text{ は定数}) \qquad (4)$$

という形をしているので，ワイゼッカーの法則は$a\gg b$の場合か，あるいは$a\approx b$でも太陽に近い惑星を除外すれば(1)や(2)と一致する．

しかし最も著名なものは1946年O.Y.シュミットによって提唱されたものであろう．シュミットの法則は，その一般形は極めて複雑であるが，特別な場合として，

$$\sqrt{R_n}=\frac{\lambda+1}{2(\lambda+2)}\cdot\frac{(\sqrt{R_{n+1}}+\sqrt{R_n})^{\lambda+2}-(\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n-1}})^{\lambda+2}}{(\sqrt{R_{n+1}}+\sqrt{R_n})^{\lambda+1}-(\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n-1}})^{\lambda+1}}$$

$$(\lambda\text{ はパラメーター}) \qquad (5)$$

で表わされる[1)]．この法則は(5)の形に於ても今までの(3)や(4)に比べて複雑である．さらに(5)で$\lambda=0$とすれば，

第1表

惑星名 符号	水星 Me	金星 V	地球 E	火星 M	(ケレス)	木星 J	土星 S	天王星 U	海王星 N	冥王星 P
平均距離（理科年表）	0.3871	0.7233	1.000	1.524	2.77	5.203	9.539	19.19	30.07	39.46
ボーデの法則 (1)	0.400	0.700	1.00	1.60	2.80	5.20	10.0	19.6	38.8	77.2
シュミットの法則 (6)	0.387	0.676	1.04	1.49	—	5.20	10.8	18.3	27.9	39.4
〃　〃 (7)	0.393	0.659	1.10	1.85	3.10	5.20	8.72	14.6	24.5	41.0

第2表

土星の衛星	(環の外側)	Mimas	Enceladus	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Hyperion	Iapetus	—	Phoebe
平均距離(理科年表)	2.93	4.00	5.13	6.36	8.13	11.35	26.3	31.9	76.8	—	279
ボーデ型法則 (2)	—	4	5	6	8	12	20	36	68	132	260

* 東京大学理学部

$$R_n=(an+b)^2$$

を得る．ここにa,bは適当に定めるべき定数である．シュミットの太陽系生成論では地球型惑星（水星，金星，地球，火星）と木星型惑星（木星，土星，天王星，海王星，冥王星）は区別されるべきであり，(6) のa,bの値も地球型惑星では $a=0.2$, $b=\sqrt{0.387}=0.622$; 木星型惑星では $a=1.00$, $b=\sqrt{5.20}=2.280$ とする．したがって

$$R_n=\begin{cases}(0.200n+0.622)^2 & (n=0\ \text{は水星})\\(1.000n+2.280)^2 & (n=0\ \text{は木星})\end{cases} \quad (6)$$

となる．(6) による値は第1表に示した．第1表に見るように，シュミットの法則は冥王星に至るまでよく実際の値と一致しており，その上この法則は物理的根拠をもっている．ただし(6)の形では小惑星の存在を示すことはできない．一方 (5) で $\lambda=-3$ とすると

$$R_n=a^n\times b \quad (a=1.676,\ b=5.20) \quad (7)$$

を得る．$a=1.676$, $b=5.20$ とし $n=0$ を木星に対応させれば，$n=-1,-2,\cdots$ を小惑星，火星，…とし，また $n=1,2,\cdots$ を土星，天王星，…として第1表に掲げた値を得る． ボーデ の 法則と比べてあまり見劣りしないが (6) には及ばない．

2) 話題を転じて太陽系における惑星の運動に注目すると，天体力学の立場から興味の持たれるのは惑星の平均運動（公転の平均角速度）である．簡単のために太陽と2つの惑星，A,B を考え，惑星の平均運動を n_A, n_B としよう．Aの運動は，もしBがなければ太陽を焦点とする楕円運動であるが，Bの影響でこの楕円運動は少し乱される．すなわち摂動をうける．天体力学の摂動論によれば，BがAに及ぼす摂動の量は一般にはBの質量 m_B に比例するが，n_A と n_B が簡単な整数比をなす場合は，いわゆる共鳴現象で摂動が大きくなり $\sqrt{m_B}$ に増大する．（太陽の質量を1とする．）例えば小惑星に及ぼされる木星の摂動は，小惑星の平均運動が木星のそれと簡単な整数比になければ $m_J\approx0.001$ の程度であるが，簡単な整数比をなすときは $\sqrt{m_J}\approx0.03$ となる．もっと興味深い例が冥王星の運動に見られる．冥王星の軌道は海王星の軌道の内にはいり込んでおり，両軌道間の最短距離は極めて小さい (0.1 天文単位)． しかし冥王星の平均運動 n_P と海王星のそれ n_N は $n_P:n_N=2:3$ の関係にあるため，両惑星は 18 天文単位以内に接近することはなく，したがって現在の配置を保つことができる．すなわち冥王星と海王星は $n_P:n_N=2:3$ の関係のために安定な軌道を保ち得るのである．木星と土星の場合，$n_J:n_S=5:2$ の関係は両軌道の安定性に直接関係するとは考えられないが， とにかく両惑星 の 平均黄経に周期 880 年の著名な長周期摂動をもたらしている．このほか小惑星の分布に見られる空隙は，その平均運動が木星のそれと簡単な整数比をなすところで起っており，そうかと思うと木星と同じ平均運動をもつところに小惑星が密集している（トロヤ群小惑星）． 眼を転ずれば木星の衛星系で Io, Europa, Ganymede の平均運動を n_I, n_E, n_G とすると，$n_I-3n_E+2n_G=(0^\circ\pm0^\circ\!.000000001)/\text{day}$

第 3 表

$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$
0.143	0.167	0.200	0.250	0.286	0.333	0.400	0.429	0.500	0.571	0.600	0.667	0.714	0.750	0.800	0.833	0.857	1.000

第 4 表

	ボーデの法則			シュミットの法則 (6)			人工太陽系			太陽系		
SJ	0.375	2:5	−0.025	0.336	1:3	0.003*	0.264	1:4	0.014	0.403	2:5	0.003*
US	0.365	1:3	0.032	0.451	3:7	0.022	0.686	2:3	0.019	0.350_5	1:3	0.017
NU	0.360	1:3	0.027	0.532	1:2	0.032	0.208	1:5	0.008*	0.510	1:2	0.010*
UJ	0.137	1:7	−0.006*	0.152	1:7	0.009*	0.521	1:2	0.021	0.141	1:7	−0.002*
NS	0.131	1:7	−0.012	0.240	1:4	−0.010*	0.312	1:3	−0.021	0.179	1:6	0.012
PN	0.356	1:3	0.023	0.316	1:3	−0.017	0.594	3:5	−0.006*	0.665	2:3	−0.002*
PU	0.128	1:7	−0.015	0.594	3:5	−0.006*	0.156	1:6	−0.011	0.339	1:3	0.006*
EV	0.586	3:5	−0.014	0.518	1:2	0.018	0.613	3:5	0.013	0.615	3:5	0.015
VMe	0.432	3:7	0.003*	0.445	3:7	0.016	0.403	2:5	0.003*	0.391_5	2:5	-0.008_5*
JM	0.171	1:6	0.004*	0.153	1:7	0.010*	0.516	1:2	0.016	0.159	1:6	−0.008*
ME	0.495	1:2	−0.005*	0.583	4:7	0.012	0.456	3:7	0.027	0.532	1:2	0.032
MV	0.289	2:7	0.003*	0.302	2:7	0.016	0.442	1:2	−0.008*	0.327	1:3	−0.006*
MeE	0.253	1:4	0.003*	0.230	1:4	−0.020	0.311	1:3	−0.022	0.241	1:4	−0.009*
			6ケ (1.00)			5ケ (0.84)			5ケ (0.84)			9ケ (0.30)

第 5 表

	ボーデ型法則 (2)			土 星 衛 星 系				ボーデ型法則 (2)			土 星 衛 星 系		
ME	0.716	5:7	0.002*	0.687	2:3	0.020	DR	0.545	4:7	−0.026	0.606	3:5	0.006*
MTe	0.545	4:7	−0.026	0.498	1:2	−0.002*	DT	0.253	1:4	0.003*	0.172	1:6	0.005*
MD	0.354	1:3	0.021	0.345	1:3	0.012	RT	0.465	1:2	−0.035	0.283	2:7	−0.003*
MR	0.192	1:5	−0.008*	0.209	1:5	0.009*	RH	0.192	1:5	−0.008*	0.212	1:5	0.012
MTe	0.760	3:4	0.010*	0.725	5:7	0.011*	TH	0.414	2:5	0.014	0.750	3:4	0.000*
ED	0.494	1:2	−0.006*	0.502	1:2	0.002*	TI	0.160	1:6	−0.007*	0.200	1:5	0.000*
ER	0.269	2:7	0.017	0.304	1:3	−0.029	HI	0.385	2:5	−0.015	0.267	1:4	0.017
TeD	0.650	2:3	−0.017	0.692	5:7	−0.022				7ヶ			10ヶ
TeR	0.354	1:3	0.021	0.420	3:7	−0.009*				(0.97)			(0.48)

が成立つ．偶然でこのような関係が起りうるとは考えられない．この関係は 3 衛星の運動の安定性に寄与している．天王星の衛星系でも Ariel, Umbriel, Titania, Oberon の平均運動を n_A, n_U, n_T, n_O とすると，$n_A-n_U-2n_T+n_O=0^\circ\!.00328/\mathrm{day}$ が成立つ．

上に述べたように，相隣れる 2 ヶないし 3 ヶ，ときには 4 ヶの惑星・衛星の平均運動が簡単な整数比をなす現象（これを平均運動の尽数関係という）は現実の太陽系でよく観測されている．この尽数関係は，冥王星や木星の衛星系などの場合は系の安定性に組しているると思われる．すなわち尽数関係がなければ，早晩お互いに接近しすぎて現在の力学的配置を保ち得ない筈のものが，尽数関係のために現状維持が成り立っているのである．これに対し，木星の平均運動と尽数関係にある小惑星で木星の摂動が 30 倍になる現象や，小惑星の分布における空隙などは系の安定性には組しないが，さりとて不安定性に組しているとも考えられない．いずれにしても平均運動の尽数関係がその系の力学的構成と深く関係していることは疑いない．

3) 平均運動の尽数関係のもつ力学的意義を上述のように理解した上で，この見地から，ボーデの法則を含めてこれまでに提唱されてきた惑星距離法則を眺めてみよう．先ず，これまで曖昧に使ってきた「簡単な整数比」を 1 から 7 までの整数の比と規定しよう．第 3 表にそのすべての組合せと対応する小数値を示した．相隣る間隔の最少値は $(1/6)-(1/7)=1/42=0.02381$ である．$\varepsilon_0=0.02381\div 2=0.01190$ とすれば，2 惑星 A, B の平均運動 n_A, n_B の比が簡単な整数比に近いか否かは（$n_A>n_B$ として）

$$\left|\frac{n_B}{n_A}-(\text{第 3 表の何れかの分数})\right|<\varepsilon_0 \quad (8)$$

が成り立つか否かで判定される．（ε_0 の代りに，それより小さい任意の正数を以てしてもよいが，ε_0 より大きい値をとると n_B/n_A に一番近い分数が一義にきまらぬ場合がでてくる．）このとき $n_A>n_B$ として n_B/n_A が偶然第 3 表のどれかの分数の ε_0 近傍にくる確率は

$$17\times 2\varepsilon_0\div(1-1/7)=39.67\varepsilon_0=0.472 \quad (\varepsilon_0=0.01190) \quad (19)$$

であり，N ヶのサンプルがあればそのうち $0.472N$ ヶがその期待値である．惑星系で $n_B:n_A$ が $1/7\sim 1$ におさまるすべての組合せに対して，ボーデの法則 (1)，シュミットの法則 (6)，そして実際の太陽系に見出される尽数関係の頻度を求めたものが第 4 表である．なお比較のため乱数表から作った人工太陽系の場合も一緒に示した．表の左端は惑星の組合せを示し，次に平均運動の比，それに最も近い整数比，両者の差，の順に掲げてある．(*) をつけたのは差の絶対値が ε_0 より小さいものである．なお (9) の与える期待値は $N=13$ として 6 である．第 4 表によるとボーデ，シュミットの各法則は，平均運動の尽数関係という立場で見る限り，乱数表による平均運動分布以上の意義をもたないが，現実の太陽系では尽数関係が高い頻度で現われていることがわかる．シュミットの法則は第 1 表で見ると実際の距離をよく表わしているのでこの結果はむしろ意外である．

同様の解析を第 2 表に掲げた土星の衛星系について行なった結果を第 5 表に示す．期待値は $N=16$ として 7.5 ヶであり，ボーデ型法則 (2) による平均運動の分布では尽数関係は期待値通りに起っているが，実際の系では 5 割増の 10 ヶとなっている．太陽系の場合にせよ土星衛星系の場合にせよ，サンプルの数が少ないので統計が使えるか否か問題であるが，尽数関係の起こる確率は $p=0.472$，起らぬ確率は $1-p=0.528$ であるから，N ヶのサンプルで尽数関係が ν ヶの頻度で起ったとするとその確率は $\binom{N}{\nu}p^\nu(1-p)^{N-\nu}$ で与えられる．一方期待値 $0.472N$ ヶに対しては $\nu=0.472N$ とすればよいので，その比は

$$\binom{N}{\nu}(0.472)^\nu(0.528)^{N-\nu}$$

$$\div\binom{N}{0.472N}(0.472)^{0.472N}(0.528)^{0.528N}$$

となる．第4，5表で（　）で示した値がこれである．現実の太陽系で見られる尽数関係の頻度が期待値6に対して9であることは1:3で示される程度に起り難いことが示される．土星衛星系ではこの数値は1:2となる．実はこれだけから尽数関係の頻度の高さを引出すのはいささか気がひけよう．しかし惑星系，土星衛星系を一括すると29ケのサンプルで19ケの尽数関係が存在することになり，一方期待値は13.7ケである．このとき上述の確立比は1:7となる．さらに木星系（8ケ），天王星系（9ケ）を加えて計46ケのサンプルについて見ると尽数関係は33ケの頻度で起っており，期待値21.7に対する確率比は1:27と小さくなり，明らかに現実の太陽系で尽数関係が好まれていることが結論できる．

以上の理論はA.E. ロイとM.W, オヴェンデン[2]による．文献2)では $\varepsilon<\varepsilon_0$ を採用した場合や，また n_A, n_B と n_B, n_C が夫々尽数関係にあるため n_A, n_C が必然的に尽数関係になる場合に対する考慮なども論じてある．筆者はむしろボーデやシュミットなどの距離法則が，平均運動の尽数関係の頻度という立場からみると乱数表以上の意味がない，という結果に興味をもった次第である．もちろん，シュミットの法則に意味がないといえるわけではない．ただ，太陽系の現在の配置は，太陽系に原始惑星が生まれ，それが惑星に成長するまでの長期間にわたる力学的陶汰の結果であることを示している．どのような力学的陶汰で尽数関係優先の配置となったか‥‥これはもっとも興味をそそる問題であるが今のところ知るよしもない．しかし大型計算機によれば，惑星に，例えばシュミットの法則の示す配置をとらせて，それが現在の配置に移りうるか否か「実験」することも不可能ではあるまい．

参考文献

1) 民科地学団体研究会，地球進化論，第1部，三一書房（1954）
2) A. E. Roy & M. W. Ovenden, Observatory, **114**, 232 (1954)

地学天文教室

暦・星図・天体望遠鏡について

土　田　嘉　直*

1. はじめに

小学校・中学校・高等学校における天文教育について考えるときに，忘れてはならないのは担当教員の大部分が特別には天文に興味や関心を持ってはいない，ということである．

小・中・高校を通じて教員の総数は約80万人おり（昭和40年度），その中で天文教育を担当している教員数は30数万人であろうと思われる．その中の大部分を占める（27万人位か？）小学校教員は，国語・社会・算数・音楽・図画・工作・体育・家庭の各教科を担任し，給食・交通安全などの雑多な仕事も受持っており，その半数近くは女子教員である．

また4～5万人に当る中学校教員は，天文教育の外に物理・化学・生物・地質・気象などを担任し，その半数ぐらいは数学とか技術科なども受持っているのであろう．

また5千～1万人に当る高校教員は，天文教育の外に地質・鉱物・気象・海洋などを担任しており，その大部分は教員養成機関において，天文よりも地質についてより深く学習したものと考えられる．

このように担当学年が下がるにつれて教員数は飛躍的に増大し，また担当内容が広くなるので，いきおい万能選手型にならざるを得ない．

こういう状況を考えると，小・中・高校における天文教育の担当教員には，天文月報の読者のような天文愛好家が多いとは期待できない．特に小学校教員についてはこのことを銘記しなければならない．

したがって学習指導（授業など）の方法や，それに使う教具（観測機械など）について考えるとき，天文愛好家でなければできないような名人芸を必要とするものは，なるべく避けなければならない．このことは教員の研修を指導していて痛切に感ずるところである．

このような考えから，最も基本的な教具である天体暦と星図と望遠鏡についての私見を述べて，出版社・望遠鏡メーカーおよび天文愛好家各位に訴えたいと思う．これ以外の教具（天体投影機など）や参考書についても類推されたい．

2. 天体暦について

天体暦は学習指導そのものに使うよりも，その準備や整理の段階に必要なものであるが，天体の観測指導には絶対に欠かせないものである．

天体暦として市販されているものの中で，入手しやすいのは理科年表と天文年鑑である．天文担当の教員は，まずこれらの暦を使うべきであると考えられる．べきと書いたのは，現状がそうなっていないからなのである．

* 埼玉県立教育センター