チャンドラセカールの力学的摩擦について

馬　場　義　男*

1. はじめに

流体の中に浸された微小粒子は，周囲の流体の分子との衝突で刺激されることにより，その進路を急に変えながら，絶えず無秩序運動をする．この自由粒子のブラウン運動は，周知の如く，ランジュバンの方程式

$$\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}=-\beta\boldsymbol{U}+\boldsymbol{A}(t) \tag{1}$$

で統計的に論じられる．ここで $\boldsymbol{U}$ は粒子の速度，β は摩擦係数であり，$\boldsymbol{A}(t)$ は揺動する力である．ブラウン運動におけるこの摩擦の概念が，チャンドラセカールによって恒星系力学の中に力学的摩擦としてとりいれられ，さらにプラズマ力学にも導入された．力学的摩擦の物理的性質の意味づけはチャンドラセカールによって論じられたのであるが，彼はこれを恒星系における星の速度変化の理論および恒星系の揺動する力の場の理論から導いたのである．チャンドラセカールはその結果を星団の力学的にみた平均寿命の計算にも適用した．プラズマ力学においても荷電粒子の速度分布函数とその変化の理論の数式の中に力学的摩擦の項としてあらわれる．この力学的摩擦について，ここにその内容と検討とを簡単に述べてみよう．

2. 力学的摩擦の概念

まず，チャンドラセカールに従って力学的摩擦の概念を簡単に説明しておく．第1に，力学的摩擦といわゆる粘性とはその物理的概念がまったく異なるということ，すなわち力学的摩擦は個々の星（あるいはもっと一般的に粒子）がその運動の過程で統計的に規則正しく被る減速についていうのに対して，粘性は個々の粒子ではなく流体としての要素が他の要素におよぼすずり応力についていうものであるということである．第2に，力学的摩擦は揺動する力の場が運動している星におよぼす規則正しい減速効果をあらわす厳密な概念であるのに対して，粘性は系の緩和時間よりも長い時間と個々の分子の平均自由行程よりも大きな空間領域とについて平均したときに意味をもつものであるということである．従って力学的摩擦と粘性とは全く異質のものであることになり，ランジュバン方程式の右辺第1項の $-\beta\boldsymbol{U}$ は力学的摩擦をあらわしているのではなく，粘性による抵抗力をあらわしているということになる．何故なら係数 β は流体の粘性係数によるからである．

* 京都大学理学部

そこで以下においてはチャンドラセカールによる恒星系力学における力学的摩擦の説明を概観する．

3. 恒星系の力の場の揺動と恒星の速度変化

恒星系のある1つの星に着目した時，その星の速度変化の様子は，時刻 t における速度が $\boldsymbol{U}(t)$ であるとすれば微小時間 Δt 後の速度との差

$$\boldsymbol{U}(t+\Delta t)-\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{F}(t)\Delta t \tag{2}$$

で与えられるであろう．ただし，$\boldsymbol{F}(t)$ はこの星が時刻 t において系内の他のすべての星から受ける力の総和であって，Δt は $\boldsymbol{F}(t)$ の変化を無視出来る程の短い時間である．この過程を繰返すこと（すなわち多体問題を厳密に解くこと）により，与えられた初期速度に対する任意の時間後の速度を知ることが出来る．しかし実際にはこのことは不可能であるのでつぎのように統計的に取りあつかわざるを得ない．すなわち恒星系においては個々の星の運動のために，ある1つの星に働く力は常に揺動しているのであるから，その星の速度空間内で無秩序に変動しているものと仮定する．そうしてこの星に働く力を $\boldsymbol{F}$ とし，この力が働く平均時間を $T(|\boldsymbol{F}|)$ とした時，この星はその速度を無秩序な方向に $|\boldsymbol{F}|T(|\boldsymbol{F}|)$ ずつ変え，これを何度も繰返すものとして，力 $\boldsymbol{F}$ の揺動する平均時間よりも長い時間における速度空間での平均自乗変位が

$$\overline{|\Delta\boldsymbol{U}|^2}=\overline{|\boldsymbol{F}|^2T(|\boldsymbol{F}|)}\,t \tag{3}$$

で与えられると仮定するのである．このように速度変化を速度空間の中での無秩序変位と仮定することにより問題は，例えばブラウン運動の場合と同じように，自由粒子の位置空間での位置の無秩序変位の統計的結果を求めるのと同じ性質のものとなる．従って，マルコフ過程の理論によって任意の時間後の速度の分布函数を得ることが出来る．もちろん無秩序変位とはいっても遷移確率函数は定めておかねばならない．そこでこの遷移確率が球対称すなわちガウス分布に従うものと仮定すれば，時刻 $t=0$ での初期速度が $\boldsymbol{U}_0$ である星が時間 t 後に持つ速度 $\boldsymbol{U}$ の分布は次式で与えられる．

$$W(\boldsymbol{U},\ t;\ \boldsymbol{U}_0)=\frac{1}{(4\pi qt)^{3/2}}\exp(-|\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}_0|^2/4qt) \tag{4}$$

ここで $q=\frac{1}{6}\overline{|\boldsymbol{F}|^2T}$ である．この結果は拡散係数が q であるような拡散方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}=q\nabla_U^2W \quad (q\ \text{は一定}) \tag{5}$$

を解いて得られるものと同じである．つまり速度の変化というものは拡散現象と同等である．

4. 力学的摩擦の導入

ところが(4)式によれば，時間 t の増加に従って速度分布函数の形が初めの分布函数（マクスウェル分布としておく）からずれていくことになる．いま問題にしている速度変化は平衡状態にある系についてあてはまるものでなければならないし，1つの星についての性質は同様に他の星にもあてはまるものでなければならない．ということは，(4)式は極めて短い時間についての近似式でしかなく長時間後の速度分布を与えるものではないということである．そこで時間 t が無限大になる場合にも初期のマクスウェル分布が不変に保たれるようにするために，ブラウン運動の場合と同様に，力学的摩擦の概念を導入する．すなわち速度 $\boldsymbol{U}$ が大きな変位を生ずるに要する時間よりは短いが，力の場の揺動時間よりも長い時間 Δt での速度変位 $\Delta\boldsymbol{U}$ が

$$\Delta\boldsymbol{U}=\delta\boldsymbol{U}(\Delta t)-\eta\boldsymbol{U}\Delta t \qquad (6)$$

で与えられるとする．ここで右辺第1項は力の揺動による速度の無秩序な変位の結果を示し，第2項が力学的摩擦で，η は力学的摩擦係数であって速度の大きさに比例してその逆方向に規則正しく働く力をあらわす．時間 Δt は短いので前の結果を近似的に用いることが出来るとして $\delta\boldsymbol{U}(\Delta t)$ の分布を

$$\Psi(\delta\boldsymbol{U}(\Delta t))=\frac{1}{(4\pi q\Delta t)^{3/2}}\exp(-|\delta\boldsymbol{U}-\mathrm{grad}_{U}q\Delta t|^2/4q\Delta t) \qquad (7)$$

としておく．そうすればブラウン運動の場合と同じように，時刻 $t=0$ における初期速度 $\boldsymbol{U}_0$ の星の時間 t 後の速度分布は次式で与えられる．

$$W(\boldsymbol{U},\ t;\ \boldsymbol{U}_0)=\left[\frac{3}{2\pi\overline{|\boldsymbol{U}|^2}(1-e^{-2\eta t})}\right]^{3/2}$$
$$\times\exp(-3|\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}_0e^{-\eta t}|^2/2\overline{|\boldsymbol{U}|^2}(1-e^{-2\eta t}) \qquad (8)$$

この式によれば $t\to\infty$ でマクスウェル分布になる．この結果は W を求める速度分布函数とした時，フォッカー・プランク型の方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\mathrm{div}_U(q\,\mathrm{grad}_U W)+\mathrm{div}_U(\eta W\boldsymbol{U}) \qquad (9)$$

を解いて得られると考えても全く同じであるが，マクスウェル分布が成り立つことを要求するので

$$\frac{q}{\eta}=\frac{1}{3}\overline{|\boldsymbol{U}|^2}=一定 \qquad (10)$$

でなければならない．

5. 2体遭遇問題による説明

以上のようにして $t \to \infty$ でのマクスウェル速度分布が得られたわけであるが，この力学的摩擦の実在性を確認しなければならない．そこでチャンドラセカールは，基本的な方法として，恒星間の2体遭遇の問題を考え，これをつぎのように説明した．まず，ある1つの星の速度を $\boldsymbol{U}$ とした時の遭遇によって生ずる速度変化量 $\Delta \boldsymbol{U}$ をもとの $\boldsymbol{U}$ と同方向の変化成分 $\Delta U_{\parallel}$ とこれに垂直な方向の変化成分 $\Delta U_{\perp}$ とにわけて考える．そうして多数の遭遇の結果，$\boldsymbol{U}$ はどれだけ変化したか，いいかえれば $\sum \Delta U_{\parallel}$ および $\sum \Delta U_{\perp}$ はどのようになるか検討するのである．$\Delta U_{\perp}$ について考えてみると，多数の遭遇というものは一般に速度 $\boldsymbol{U}$ 方向軸に関して空間的に対称的に起こると考えられるから $\Delta U_{\perp}$ は互に対称なものによって相殺されてしまって，多数の遭遇の結果 $\sum \Delta U_{\perp}$ は零となると考えてよいということになる．しかし $\Delta U_{\parallel}$ についてはこのようなことがいえない．$\boldsymbol{U}$ が大きな変化をするに要するよりは短いが，力の揺動の時間よりは長いような時間 Δt の間にこの星が他の星との遭遇によって生ずる $\Delta U_{\parallel}$ の総和は

$$\sum \Delta U_{\parallel} = -8\pi N m^2 \frac{G^2}{|\boldsymbol{U}|^2} \log(q|\boldsymbol{U}|^2) \Delta t [\Phi(x_0) - x_0 \Phi'(x_0)] \tag{11}$$

となる．N は密度，m は星の質量，G は重力定数，q は $D_0/2Gm$（D_0 は衝突係数）に等しく $\Phi(x_0)$ は次式で定義される．

$$\Phi(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx \quad (x_0 = j|\boldsymbol{U}|) \tag{12}$$

j は系の速度分散度を示すパラメーターである．この (11) 式から，常に

$$\sum \Delta U_{\parallel} < 0 \tag{13}$$

であることがわかる．従って星のその進行方向の速度成分は必ず減少することを示している．すなわち星は常にその進行方向に対して抵抗力を受ける．これが力学的摩擦である．

6. 確率的方法による説明

しかしチャンドラセカールはこの力学的摩擦をさらに別の方法によっても導き得ることを示した．系内のある1つの星に働く力 $\boldsymbol{F}$ は他の星の運動のために常に揺動しているが，この力の時間に関する微分 $\dot{\boldsymbol{F}} = \dfrac{d\boldsymbol{F}}{dt}$ を統計的にしらべると，この平均値 $\overline{\dot{\boldsymbol{F}}}$ はその星の進行方向に関して非対称を示すのである．つまり $\dot{\boldsymbol{F}}$ の速度 $\boldsymbol{U}$ に垂直な成分 $\dot{F}_{\perp}$ の平均 $\overline{\dot{F}_{\perp}}$ は零となるが，平行な成分 $\dot{F}_{\parallel}$ の平均 $\overline{\dot{F}_{\parallel}}$ は零とはならない．このことはやはりマルコフの方法を適用して得られる．

$\boldsymbol{F}$ とその時間変化率 $\dot{\boldsymbol{F}}$ との同時分布函数 $W(\boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}})$ から，$\overline{\dot{\boldsymbol{F}}}$ は着目している星の速度 $\boldsymbol{U}$ が零すなわち $|\boldsymbol{U}|=0$ の場合はすべての方向について対称であるのに対して，$|\boldsymbol{U}| \neq 0$ の場合にはそうではないことが知られるのである．

もしも $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{F} > 0$ ならば

$$\left(\overline{\frac{d|\boldsymbol{F}|}{dt}} \right)_{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}} > 0 \tag{14}$$

であり，$\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{F} < 0$ の場合は

$$\left(\overline{\frac{d|\boldsymbol{F}|}{dt}} \right)_{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}} < 0 \tag{15}$$

となる．

このような非対称性が力学的摩擦の現象をひき起していると考えられるわけである．

7. 星団の平均寿命

星団の平均寿命を，星が星団から去るために必要な脱出速度に達するまでの平均時間と考えて，チャドラセカールは (4) 式と，力学的摩擦を考慮した (8) 式とを用いてプレアデスのような散開星団を対象とした場合を計算して比較した．そうすると，力学的摩擦を考える場合は約 3×10^9 年程度となり，銀河系の年齢と比べてもよく合うが，そうでない場合には約 5×10^7 年程度となって観測事実と合わない．このことからも力学的摩擦が実際に作用していることが確かめられたとチャンドラセカールは考えた．

8. 再　検　討

しかし，はじめにも述べたようにこの力学的摩擦の概念は荷電粒子系の力学にも導入されているのでこの分野での用い方も含めてこれまでの内容を再検討してみることにする．そこで，はじめにもどって，この力学的摩擦の概念の導入の過程がはたして合理的なものであったかどうかということについて吟味しなければならない．まず明きらかにしておかなければならないことは，いかなる系を念頭においているかということである．第1に系はニュートンの力学法則によって記述されるものであるということ，つまり個々の星の運動方程式の解が知られないのでこれを統計的に考察しているだけであるということ，第2に系はこのように統計的にみた場合に定常状態にあるということ．もっとも，非定常な系を対象としてもよいけれども，これまでの内容は必ず定常状態の系について正しいものでなければならないからである．ある1個の星の，系における速度分布が初期マクスウェル分布を保ったままであることを要請することは，この星に何らの特殊性をも仮定していないとき系全体の速度分布が初期マクスウェル分布で保存されていなければならないということである．もちろん，恒星系の速度分布がマクスウェル分布であるという根拠はないが，いまの場

合にはそのことは重要ではなく分布函数が不変であるということだけでよい．位置空間と速度空間とを独立に考えることはよくないがこれはやむを得ないことであろう．しかし位置空間と速度空間とを独立に考えてよいのは相互作用のない場合，もしくはあっても極めて弱い場合に限られるということを忘れてはならない．これらのことに注意しながらこの系のある1個の星の速度の変化を記述する式を検討してみよう．

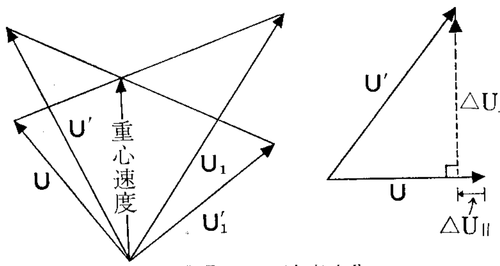
チャンドラセカールはこの星に働く力 $\boldsymbol{F}$ というのは常に揺動しているものとしたのであるが，もちろんどのように揺動するのかということがわかっていなければならない．しかし彼は $\boldsymbol{F}$ の分布函数 $W(\boldsymbol{F})$ および $\boldsymbol{F}$ の継続時間 $T(|\boldsymbol{F}|)$ の分布については別に求めることとして速度変化は (3) 式で与えられるとしたのである．しかしこの(3)式においては，もはや $\Delta\boldsymbol{U}$ が与えられているのではなく，スカラー量 $\overline{|\Delta\boldsymbol{U}|^2}$ におきかえられている．このことから速度空間における点の無秩序変位を考えることになり位置空間との同一視が必然的になされてしまう．しかも計算上の容易さということからこの点の変位は球対称が仮定されてしまうのである．そしてこのような仮定がまるで仮定ではなかったかのように何の吟味もなく定着してしまったように思われる．

自由粒子が無限の広がりを持つ，力学的制限のない一様な系の中でのその位置の無秩序な変位のひろがりの度合を求める方法がそのままとり入れられているわけである．我々が対象としている速度空間はこのようなものとは全く異質のものである．たとえ相互作用の存在を無視してさえも．実際の系においては速度空間は実質的に有界である．相互作用を考えに入れなければ，すなわち位置エネルギーを考えに入れなければ系の全エネルギーは各粒子の運動エネルギーの総和によって決定される．しかも系全体のエネルギーは一定でなければならない．このことから方程式 (5) が本当の意味での $W(\boldsymbol{U}, t;\ \boldsymbol{U}_0)$ を決定するものではないことが明らかである．従って (4) 式が本来の意図に反する結果であることはいうまでもない．つぎに力学的摩擦項の導入ということについて考えねばならない．いま述べたように拡散方程式による結果に対してはどうしても補正が必要となる．その補正を $-\eta\boldsymbol{U}$ としてチャンドラセカールは (6) 式を考えたのであるが，この摩擦項によって拡散を防止しようとしたわけである．もちろんこれによって $t\to\infty$ でのマクスウェル分布の保存が得られたわけではあるが，このことからただちに力学的摩擦の物理的現象としての存在を断定することはできない。もともと q の一定と球対称から (4) が得られたのであって (6) がその欠陥を補ったものであるから力学的摩擦というのは単なる数学的現象にすぎないのかも知れず，これまでの過程からその可能性が強いわけである．従って摩擦項の導入がマクスウェル分布の保存を可能にするということは，チャンドラセカールのいう力学的摩擦力の物理的概念の根拠となり得ない．だから彼によるこの力学的摩擦の物理的意味づけについてさらに検討を続けねばならない．

彼は2体遭遇問題を考えることによって容易に説明し得ることを示した．ところでもう一度彼の力学的摩擦についての概念を思い起こしておく必要がある．それは星が運動することによって受ける規則正しい抵抗力である．しかもこの力は揺動している力によるものとは独立したものであるということであり，(6)式から容易にわかるとおりその星の速度 $\boldsymbol{U}$ に比例するものである．ではこの揺動する力と規則正しい力というのは一体どのように考えたらよいのであろうか．この点についてチャンドラセカールの概念は不明瞭である．我々は多体問題の解を知らない以上，まずこの2体問題で考えようとするのは当然なことである．星の速度 $\boldsymbol{U}$ の $\boldsymbol{U}'$ への変化 $\Delta\boldsymbol{U}$ を $\Delta U_{\parallel}$ と $\Delta U_{\perp}$ とに分けて考え，おのおの，時間 Δt における総和 $\sum\Delta U_{\parallel}$, $\sum\Delta U_{\perp}$ を計算するというのであるが，ここで Δt は彼によれば，力の揺動する時間よりは長く $\boldsymbol{U}$ が目立った変化をするよりは短いというような時間である．ということは，この星はこの Δt の間に揺動する力の影響の下にあるわけである．このことと2体遭遇とはどのように結びついているのであろうか．他の星との個々の遭遇そのものを揺動と考えるのか，それとも揺動ということと遭遇ということとは別のことであると考えるのか．もし前者の如くに考えるならば，(6)式は物理的に不合理な内容であることは明らかである．何故なら右辺第1項は揺動する力の効果をあらわし，第2項はこれとは別の規則正しい抵抗力をあらわしているからである．また後者の如くに考えるならば揺動する力とは何であるかということになり(6)式の右辺第1項の意味がなくなる．

ところで2体遭遇による $\sum\Delta U_{\perp}$, $\sum\Delta U_{\parallel}$ の計算について検討してみよう．(11)式というものがはたしていまの場合に意味があるのかどうかということを考えねばならない．そのためには我々が対象としている系についてもう一度ふり返らねばならない．考えている系においては全エネルギー(もちろん全角運動量もであるが)が保存されねばならないということ，1個の星についての性質はそのまま他の星についても適用されねばならないということ，定常状態であるということ，各星はいかなる意味においても自己推進力を持たないということである．$\sum\Delta U_{\perp}$ を零として (11) 式を得たという結果に従えば，この星はその運動エネルギーを $\dfrac{1}{2}m(\sum\Delta U_{\parallel})^2$ だけ失なうということになる．このことは同時に他の星にも適用されるのであり，速度および時間に何の制限もない以上，系全体のエネルギーは減少しなければならない．これは

相対速度の大きさは不変



2体遭遇による速度変化

明らかに不合理である．

ではなぜこのような結果になってしまうのか．2体遭遇の計算方法そのものに欠陥があるのだろうか．そうではなく1個の遭遇の結果を $\varDelta U_\perp$ を零としてそのまま加算したこと，つまり積分したことが誤りの原因であって遭遇問題を考えたこと自体が誤りの直接原因なのではない．2体遭遇の計算の適用を理解していなかったからにすぎない．(11)式は彼のいうような，時間 $\varDelta t$ の間における速度変化をあらわしているのではない．1個の星との1回の遭遇の結果を，$\varDelta U_\perp$ を零にしたままで単純に加算するということは，我々の対象としている系においてはまったく意味のないことである．相互作用のない系の中を自己推進力，もしくはの系の内および外で，系以外から推進力を与えられた物体の運動する場合には用いてよい方法を我々の力学系にそのまま適用したという点に根本的な誤りがあるといえる．図から明らかなように，1個の星のエネルギーの増加はそのまま他方のエネルギー減少に結びつくということ，あるいは $\varDelta U_\perp$ を無視して $\varDelta U_\parallel$ だけをみるということは $|\boldsymbol{U}'|>|\boldsymbol{U}|$ を $|\boldsymbol{U}'|<|\boldsymbol{U}|$ としてしまうものであるということを想起するだけでも $\sum\varDelta U_\perp$ を零として，$\sum\varDelta U_\parallel$ を(11)式で計算することの誤りを理解するのに十分であろう．以上のことからチャンドラセカールのいうような力学的摩擦の基本的な説明というのは，物理的に無意味なものであることが明らかになった．

さて(14)式および(15)式からただちに力学的摩擦を考えることが出来るかどうかということを検討しよう．(14)式と(15)式のどの部分が星の進行方向に逆向きに規則正しく働らくという力学的摩擦を意味づけるのであろうか．$\boldsymbol{U}$の方向についての彼のいう非対称性と規則正しい力の作用というものとどのような関係があるのだろうか．チャンドラセカールのいうような $\boldsymbol{U}\neq0$ の場合の非対称性と力学的摩擦の現象との関連性は何も見出すことは出来ないのである．(14)式や(15)式が導き出される過程は煩雑であるので省略するが，彼のように $\dot{\boldsymbol{F}}$ を計算すること自体が（計算の誤りの如何にかかわらず）彼のいう力学的摩擦とは何の関係もないのである．以上のことからチャンドラセカールのいう力学的摩擦は何らの物理的意味をも持たないものであることが明らかになった．ということは力学的摩擦というのは数学的な性質しかもたない，つまり最初にいったように速度空間における球対称な無秩序変動を仮定したことに対する補正の意味をもつものでしかない便宜的なものである．従って星団の平均寿命の計算から力学的摩擦の作用を確認することは無意味なことである．これらのことを別の観点から考えてみよう．はじめに注意したように我々が対象としている力学系はニュートン力学によって記述され得るものである．ということは各星に働く力は速度に無関係であってただ位置のみの関数であるということでなければならない．従って速度に依存する規則正しい力（統計的な意味であるにしても）の存在を考えること自体不合理なのである．また力が速度に依存するのであれば，もはや，リウビィルの定理が成立しないということであり，従ってジーンズの定理も成立しない．このようなことは我々が考えている系に対して矛盾するものである．ニュートン力学に立脚して力学的摩擦を導くということは自己矛盾にすぎない．以上のことから結論としてチャンドラセカールのいう力学的摩擦は物理的には何ら意味のあるものではない．ただし数学的な意味において利用できるものではある．従って外力の場も含めた一般のフォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}W+\boldsymbol{K}\cdot\mathrm{grad}_{\boldsymbol{U}}W=\mathrm{div}_{\boldsymbol{U}}(q\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{U}}W+\eta W\boldsymbol{U}) \tag{16}$$

において $\eta W\boldsymbol{U}$ の項は物理的に意味はなく，正しくは

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}W+\boldsymbol{K}\cdot\mathrm{grad}_{\boldsymbol{U}}W=\mathrm{div}_{\boldsymbol{U}}(q\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{U}}W)$$

である．そしてプラズマ力学においてもこのことは同様である．さらにブラウン運動においても粘性というものを流体構成分子の力学的性質から考えるならば同様のことがいえるわけである．なお電子計算機による星団系の数値実験において力学的摩擦について言及しているものがあるがそれは無意味なことである．

主参考文献

1) S. Chandrasekhar, "Principles of Stellar Dynamics" 1960, Dover 版
2) H. Wax, ed., "Selected papers on noise and stochstic processes" Dover 版または S. Chandrasekhar, Reviews of Modern Physics, **15**, No. 1, 1943.
3) M. A. Leontvich, ed., "Reviews of Plasma Physics vol. 1" pp. 105—204, 1965
4) 萩原雄祐，"天文学" 岩波全書．
5) S. F. Aarseth, M.N., 1963, **126**, 223.