# ケプラー運動の幾何

木　下　　　宙*

万有引力（距離の逆自乗に比例する中心力）の場での質点の運動はケプラーの3つの法則に従う．それによれば，軌道の形は引力の源である点を焦点とする二次曲線である．全エネルギー（運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー）が負であれば軌道の形は楕円，正であれば双曲線，零であれば放物線となる．

第1，2，3図の曲線群は，O点を引力中心とし，質点がP点を同じ速さで，あらゆる方向に出発するときに描く軌道群である．3図とも全エネルギーは負であって，P点を出発するときの速さが違う．各々の図において，P点における速さは同じであるから，エネルギー保存則より軌道の平均半径は一定である．したがってP点における発射方向によっては平均半径は変化せず，ただ離心率だけが変化する．OPを垂直に出発すれば離心率は一番小さく，すなわち円に近くなる．垂直方向からはずれるにしたがって，軌道は細長くなり離心率は大きくなり1に近づく，OP方向に打ち出すと衝突軌道，すなわち離心率1となる．大きさを持った物体が衝突すれば，衝突後の振舞は物体の物理的状態によっていろいろに変化するであろうが，今考えている大きさのない質点の場合には，衝突後，もときた方向にもどる．これは楕円が細長くなった極限と考えればよい．

出発点Pにおける速さを適当にとると（$v^2=\mu/h$: $v$ はP点における速さ，$h$ はOP間の距離，$\mu$ は万有引力常数），垂直に出発させたときの軌道は円になる．この場合の図が第2図である．このときの速さを $v_0$ とすると第1図はP点を出発する速さが $v_0$ よりも小さい場合，第3図は大きい場合である．P点をOPに垂直に出発するとき，P点は第1図では遠日点（軌道上で一番引力中心から離れている点）になっており，第3図では近日点になっている．図中の×印は軌道の遠日点と近日点である．第1図では，近日点の軌跡は引力中心を通る，遠日点の軌跡は出発点を通る閉曲線で，互いに他の外にあるが，第3図では，近日点の軌跡は完全に遠日点の軌跡内にある．第2図の場合には，近日点と遠日点の軌跡は同じ閉曲線の一部をなしている．この曲線は面白いことに，心臓形（カージオイド）である．

これらの図から予想されるように，軌道群の包絡線はまた一つの楕円となっており，引力中心と出発点がこの楕円の焦点となっている．この直観幾何学的証明は高橋秀俊，吉沢正氏によって与えられている．包絡線である楕円は，P点を出発する速さが早いほど大きくなり，一方離心率は小さくなって円に近づいていく．全エネルギーが零に等しくなると，包絡線は無限遠に行ってしまう．さらにP点を出発する速さが大きくなると，全エネルギーは正となり，軌道は双曲線となり軌道群は全空間をおおい軌道群の包絡線は存在しない．第4図がその状態を示している．しかし第5図が示すように，軌道の他の分枝は包絡線を形成し，その形は全エネルギー負のときと同様，引力中心と出発点を焦点とする楕円である．

斥力の場合には，全エネルギーはつねに正となり，軌道は斥力中心を焦点とする双曲線である．軌道群の包絡線は斥力中心と出発点を焦点とする双曲線となる．その図が第6図である．斥力中心をかこむ曲線群は軌道群の分枝である．図からわかるように，分枝群にも包絡線があり，それは軌道群の包絡線である双曲線の他の分枝である．

P点を出発する速さ $v$ が，$v^2=2\mu'/h$（$h$ はOP間の距離，$\mu'$ は斥力常数）のとき包絡線の双曲線は直線に縮退する．第6図は $v^2<2\mu'/h$ の場合である．$v^2>2\mu'/h$ の場合には，軌道群と分枝群が重なり合うだけで本質的に $v^2<2\mu'/h$ の場合とかわりない．

これら軌道群に関して種々，幾何学的に面白い性質がある．興味のある方は参考文献2）を見ていただきたい．

本稿中の図はすべて，東京天文台国内衛星計算施設のOKITAC 5090D に付属している X-Y プロッターで描かれた．

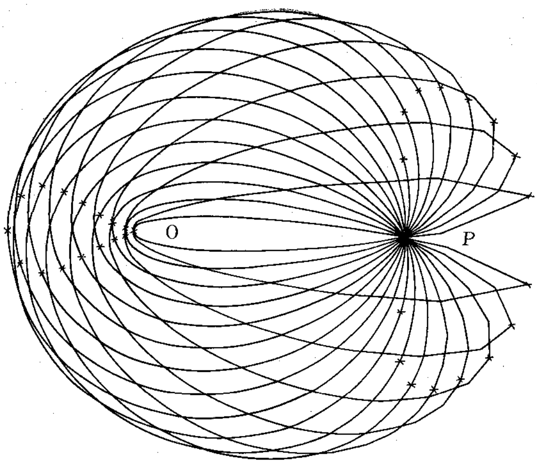
ついでに引用した参考文献を上げておく．

1）高橋秀俊，吉沢正：「曲線美の再発見」科学 Vol. 39, No. 8, 1969.

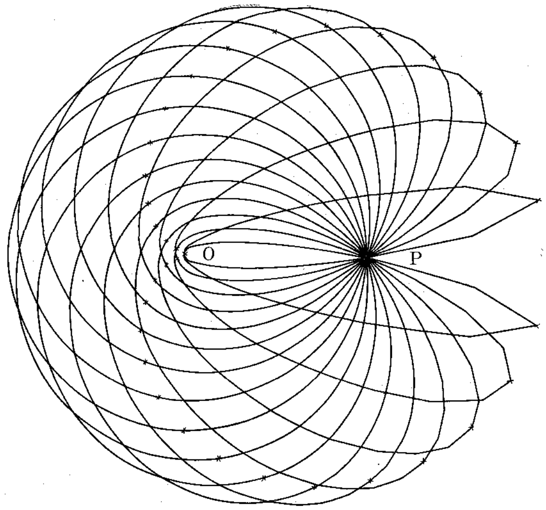
2）木下宙，永井隆三郎，米田扶子：「ケプラー運動の幾何学」東京天文台報，第15巻，第1号，1970.

右ページの図でO点は引力中心，または斥力中心，P点は出発点，×印は遠日点と近日点をあらわす．なお，第1,2,3図の楕円群のうち離心率が大きい楕円の右側が折線になっているのは，X-Y プロッターで楕円を描くときの「きざみ幅」があらかったためである．

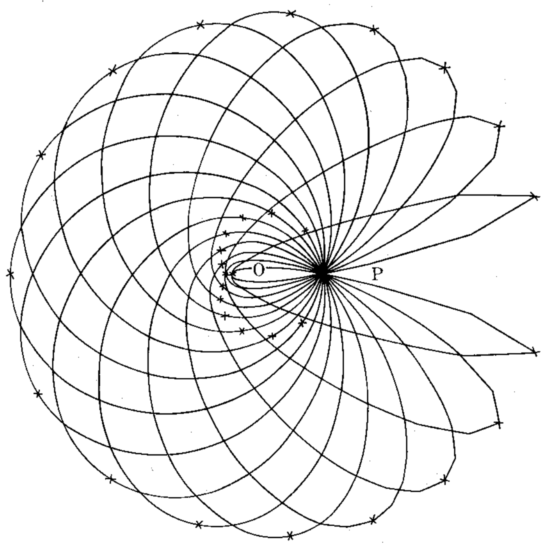
* 東京天文台
H. Kinoshita: Geometry of Kepler Motion



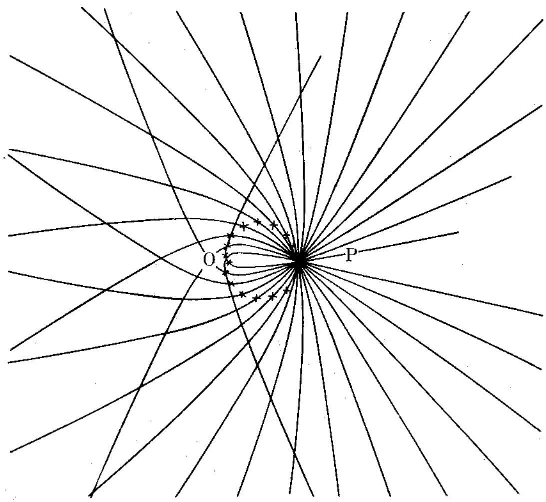

第 1 図　$v < \sqrt{\mu/h}$



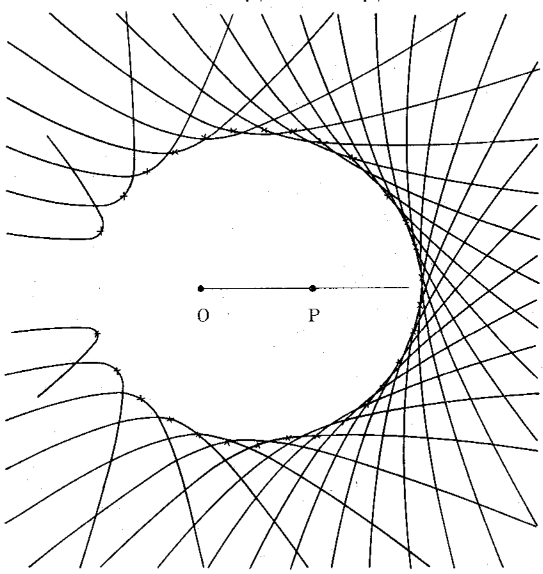

第 2 図　$v = \sqrt{\mu/h}$



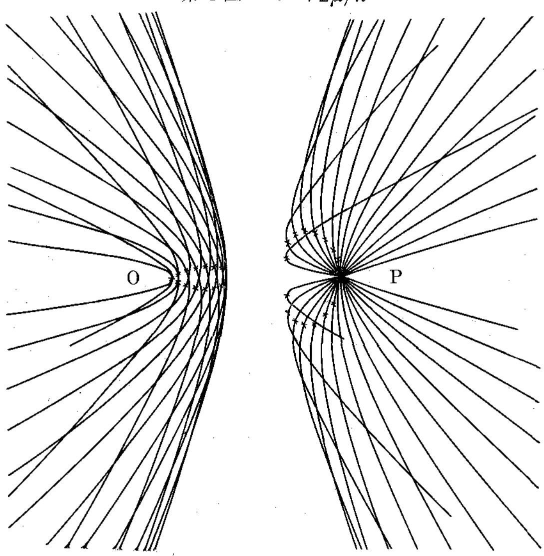

第 3 図　$\sqrt{2\mu/h} > v > \sqrt{\mu/h}$




第 4 図　$v > \sqrt{2\mu/h}$




第 5 図　$v > \sqrt{2\mu/h}$




第 6 図　$v < \sqrt{2\mu'/h}$