

制限 3 体 問題 の 周 期 解

古 在 由 秀*

1. 制限 3 体問題

2 体問題とか 3 体問題といった言葉は読者にはなじみ深いであろう。2 体問題は 2 つの質点が万有引力で引きあって運動している時どんな軌道をえがくかという問題で、その答は 300 年前すでにニュートンがだして、軌道は楕円、放物線、双曲線といった 2 次曲線（平面上の）で表わされることが分っている。

ところが、3 つの質点がお互いに引力をおよぼしあっている 3 体問題となると、2 つの特殊解の他には、一般解を数学的に厳密な意味では求められない。2 つの特殊解とは、3 質点が正三角形の頂点にいて、その共通重心を焦点とした相似な楕円軌道をえがく場合と、一直線上にある特別な配置にならんで、同じく共通重心を焦点とした相似楕円軌道をえがく場合とである。

この 3 体問題の一般解を求めようという努力は 300 年来続けられてきたが、問題を少しやさしくするために 3 質点のうちの一つの質点の質量をゼロとし、3 質点が一平面上を運動する問題、制限 3 体問題というものが考えられるようになった。この場合、有限質量をもつた 2 体の軌道は 2 体問題の解として表わされることは、第 3 体の質量はゼロでその影響がないことから分る。そして制限 3 体問題ではふつうその軌道は円としてある。

この制限 3 体問題の運動方程式は 4 階の微分方程式で表わされ、エネルギー積分に相当するヤコビー積分が存在するが、これも数学的には厳密には解けない。そこで、解が求まらないまでも、その解の性質を調べたり、周期解を求めたりする研究は進められてきた。

初期条件さえあたえれば数値積分で一つの解を求めることはできるが、すべての初期条件（ ∞ の 4 乗の場合がある）について解を求めることはできないし、一つの解についても数値積分のステップの数が増えると誤差も大きくなってその結果は信用できなくなる。

ところが、数値積分で周期解が求めれば有限のステップで数値積分をうち切れる。あと積分を続けても解は前の軌道上をおいつづけるのだから。

2. 小 惑 星

太陽のまわりの木星の軌道は円と仮定し、小惑星は木星の軌道面上を動いているとすれば、主として太陽と木星の引力にひかれて運動している小惑星の軌道を求める問題は制限 3 体問題の応用例の一つである。

その小惑星の分布が、木星の周期の $1, 3/4, 2/3, 1/2, 1/3$ 倍といった周期を持つあたりで奇妙なふるまいをすることがよく知られている。 $1, 3/4, 2/3$ 倍のあたりには付近にくらべてより多くの小惑星が分布し、 $1/2, 1/3$ 倍などには分布の空隙がある。

このような場所に位置する小惑星は特異小惑星と呼ばれており、このような特異小惑星のうちには、太陽、小惑星、木星がこの順に一直線上にきて衝になる時には、小惑星は近日点付近にすることが多いことが知られている。

特異小惑星ではその公転周期が木星の周期と上にのべたような関係にあるため、木星の引力の影響はある種の共鳴現象となり、小惑星の軌道はもとの楕円から大きくはずれるのであるが、木星と最も近づく衝の時には小惑星は近日点付近にくるので、外側の木星との距離は比較的大きくなり、引力はあまり大きくならないのである。

周期が木星の $1/2$ 倍の特異小惑星を例にとると、 λ , ω を小惑星の平均経度、近日点経度とし、 λ' を木星の平均経度とした時、

$$\sigma = 2\lambda' - \lambda - \omega$$

で臨界引数というものを定義する。この量は時間がたっても変わらない（特殊な周期の関係により）のであるが、これがゼロに近い値をとる場合が多いのである。衝の時には $\lambda' = \lambda$ であるから、 $\sigma = 0^\circ$ だとこの時には $\lambda = \omega$ 、すなわち小惑星は近日点にすることを注意しよう。 $\delta = 180^\circ$ ならば $\lambda' = \lambda$ の時に小惑星は遠日点にすることになる。

このような場合、太陽を原点とし小惑星の近日点の方向に x 軸をとると、衝のとき円軌道上を動く木星も、近日点にいる小惑星も x 軸に垂直な速度ベクトルを持ち、もう一度近日点で衝が起こることが分れば、すなわち σ がいつもゼロで、小惑星の近日点が動かなければ小惑星の軌道は周期解であることは明らかなのである。ついでながら、もし木星の質量がゼロならば、すなわち、もし小惑星に木星の引力が及ばなければ、木星の $1/2$ 倍のみならず、すべての倍数の周期をもつ特異小惑星の軌道が周期軌道であることは自明であろう。

* 東京天文台
Y. Kozai: Periodic Solutions for the Restricted Problem of Three Bodies.

3. 木星の衛星

木星には 12 個の衛星が発見されているが、そのうちの 4 個の外側の衛星は逆行軌道上を運動している。その公転周期は 2 年前後で、木星の公転周期のほぼ 1/6 であることは注目に値しよう。これらの衛星には太陽の引力が強く働き軌道要素は大きく変化しているの、この比が本当に 1/6 かどうかははっきりはしていないが、この点についてはあとでふれる。

4. 3次元周期軌道

制限 3 体問題の周期解は多くの人によって求められているが、筆者は質量ゼロの第 3 体は平面上にとどまることなく、3次元空間を動きまわると仮定して周期解を求めてみた。といっても、無限大の数の初期条件からやみくもに周期解に相当した初期条件を求めることは至難の業なので、まず天体力学の理論を使って、木星の質量が太陽にくらべて非常に小さい場合について、小惑星の近日点や臨界引数、さては小惑星の軌道面が木星の軌道面と交る昇交点の経度をあまり変えないような初期条件を求めた。このような条件で周期軌道が求まることは前に述べた。

このような条件をみたますのは、衝の時に小惑星が近日

点または遠日点におり、すなわち臨界引数が 0° または 180° であり、また近日点は木星の軌道面上にあるか、小惑星の軌道上、木星から最も離れたところにある場合である。しかも、軌道面の傾斜角は 90° に近い、すなわち極軌道に近いのである。

このようにして、木星の質量が小さい場合についての周期軌道は求めたのであるが、あとは初期条件を少しずつ変えて木星の質量が大きな場合についても周期軌道を数値積分で求め、それを木星の質量が太陽の 1,000 倍の場合まで、すなわち小惑星が衛星（この場合太陽が木星のまわりをまわる惑星となる）となる場合まで周期軌道を拡張してみた。

表紙にのせた図はこのようにして求めた周期軌道の一部で、中段には木星、太陽がその共通重心のまわり一回円軌道上をえがく間に 2 回まわる周期軌道の例である。左が xz 面、中が xy 面、右は yz 面に投影した図で、原点は共通重心にとってある。 $t=0$ では、木星は負の y 軸上、太陽は正の y 軸上から出発し、 xy 面上に円軌道をえがく。

小惑星の近日点は xy 平面から一番離れたところ ($z > 0$) にあるが、小惑星は遠日点から出発する。すなわち速度の y 成分、 z 成分はゼロであり、 x の値もゼロというのが初期条件で、木星、太陽が半周した時、また

西村製の反射望遠鏡

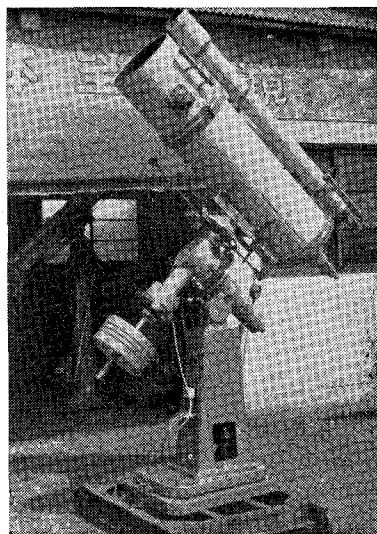
- | | |
|----------|------------------------------------|
| 30cm “A” | カセグレン・ニュートン兼用
10cm 屈折望遠鏡 (f/15) |
| “B” | カセグレン焦点
15cm 屈折望遠鏡 (f/12) |
| 40cm “A” | カセグレン・ニュートン兼用
15cm 屈折望遠鏡 (f/15) |
| “B” | カセグレン焦点
20cm 屈折望遠鏡 (f/12) |

株式会社 西村製作所

京都市左京区吉田二本松町27

電話 (771) 1570, (691) 9589

カタログ実費90円郵券同封



30 cm 反射望遠鏡

ニュートン・カセグレン兼用

同じような条件になるように他の初期条件をえらぶ。ここで示してあるのは、太陽の質量を1とした時、木星の質量 J が 0, 0.2, 1.0, 2.7972, 10.0, 50.0, 1000.0 という7つの周期軌道である。

$J=0$ ではもちろん軌道は一平面上の楕円で、重心すなわち原点には太陽がいるが、小惑星は同じ楕円上を2回まわる。 xz 平面できると $x=0, z<0$ から出発し時計の針と反対方向に進み、 xy 平面では $x=0, y>0$ から逆行する。 yz 平面できると断面は直線で右下から左上まで直線上を2回往復する。

$J=1.0$ までは \dot{x} (速度成分) の初期値は正であるが $J=2.7972$ では \dot{x} もゼロとなる。すなわちこの場合速度の初期値は全くゼロになるという奇妙な周期軌道が求まる。

J の値がこれより大きくなると衛星軌道の場合となり、ここでは木星と太陽との距離をかえていないから、太陽までの距離は J が大きくなると小さくなり、 $J=1000.0$ の場合の xy 面図は一番外側の円に近い軌道で、これはほとんど太陽の円軌道に近い。

なお、すべての軌道には木星や太陽が 2° 動く時間ごとに印がつけてあるので軌道上での速度も分るだろう。

上段は中段と同じ種類の軌道であるが、この場合には太陽や木星が一回公転する間に小惑星は6回公転している。 $J=0$ の場合は軌道はほとんど極軌道で円である。したがって xy 平面できっても軌道はほぼ直線で、この同じ軌道上を小惑星は6回まわるのである。太陽のまわりの軌道の大きさは前の場合より小さい。

ここにも $J=0$ の他に、 $J=0.1, 0.6, 2.0, 8.433, 50.0, 1000.0$ と7つの場合の周期軌道がえがいてある。前と同じく $J=8.433$ では速度の初期条件はゼロである。この場合も J の値が大きくなると太陽のまわりの軌道の大きさは小さくなり、したがって z の変動も小さくなる。前にものべたように $J=1000.0$ ではこの図は重心(木星に近い)のまわりの太陽の動きをほぼ表わしているにすぎない。

yz の図では、すべて右下からゼロの速度で出発し、左下でまた速度はゼロになりまた右下までもどるのである。

下段でも同じく小惑星は6回まわるのであるが、この場合、近日点は xy 面上にあり、また小惑星は近日点から出発する。また木星は正の x 軸上に、太陽は負の x 軸上から出発し、 xy 面上で円軌道をえがく。小惑星もはじめは x 軸にあり、 x 軸に垂直に出発する。すなわち速度の x 成分の初期値はゼロなのである。そこで前の場合には軌道は yz 平面にかんし対称であるのに対し、この場合は x 軸にかんし対称である。

この場合も $J=0$ では周期軌道ではほぼ極軌道で、ほ

ぼ円軌道である。この他 $J=0.3, 2.0, 25.0, 1000.0$ と5つの場合の図が重ねられている。

いずれの場合にもこれらの $J=1000.0$ についての軌道は木星の逆行衛星の軌道とは一致しない。さらにこれらを拡張して木星や太陽の軌道を楕円軌道とした場合についても周期軌道を求めてみたが、軌道面傾斜角はせいぜい 110° ほどにしかならず、現実の衛星の 150° という傾斜角にはならない。しかし、これらの衛星の軌道はこれらの周期軌道から少しはずれたものであるという可能性はのこってくる。

このような種類の周期軌道はもっと他の場合についても求まるが、周期が $3/4, 2/3, 1/2, 1/4, 2/5, 1/6$ といったように分母と分子の差が奇数の時は1つまたは2つの種類の周期軌道が求まることが確かめられた。しかしその差が偶数の場合には、 $3/5$ の場合をのぞいてこの種の周期軌道は求まらない。

これらの軌道の安定性をも求めてみたが、これらの性質が小惑星の分布とは直接には結びつきそうもない。

この計算は OKITAC-5090 D で行ない、図はその X Y プロッターでかかせた。そのために東京天文台計算施設の多くの方にお世話になったことを付記したい。

答申の取扱いの経過について

日本天文学会運営検討委員会

4月号でお伝えしたように、当委員会は、「学会の組織と運営の改善に関する答申」を、理事長あて提出しましたが、これを審議した4月3日の理事会では結論に至りませんでした。主に問題とされたのは、評議員会と委員会(現行の理事会に相当)との関係および実務処理の負担軽減についての保証がない、という2点でした。

私達運営検討委員はその翌々日、緊急に会合を開き、理事長および各理事あて要望書を提出して、学会民主化の早期実現のため、改革案が5月の総会で上程・討議されるよう要請しました。

4月9日には、理事会にひきつづき、理事と運営検討委員との懇談会が開かれましたが、この席上でも議論は平行線をたどりませんでした。私達は、上記の問題は定款案そのものには直接関係がなく、新体制への移行・実施過程において十分に解決できるとの見解をもっておりましたが、理事の一部からは、実務問題の解決についての具体的な保証が先決であるとの見解が強調され、問題点は実務関係にしばられました。

結局、結論として、この答申の実施を前提として、実務処理問題について運営検討委員と庶務・会計理事とで検討を加え、その結果をまとめて改めて理事会で検討することになりました。

私達は現在、この答申が全会員の納得のいく形で5月総会に上程されるよう努力していますが、場合によっては上程が秋まで延期されるという事態も予想されます。