エルゴードの問題

永井隆三郎*

エルゴードという言葉は，ギリシャ語の ἔργον (仕事，エネルギー) と，ὁδός (道) に由来している．テル・ハールによれば，マクスウェルをはじめとするイギリスの科学者達は，エルゴードの仮説のことを，continuity of path の仮説と呼んでいるそうである．それでは，このエネルギーの道筋の問題が，どのようにして起こり，現在どのようにして調べられているかをみてみよう．

1. マクスウェル・ボルツマン分布とエルゴード仮説

二つの部屋の一方に空気を満たし，他方を真空にしてから繋ぎ合わせると，しばらく経って，空気は万遍なく二つの部屋全体に分布し，平衡状態を形づくるかのように見える—非可逆性の現象．コップに水を入れ，その上からコーラをそそぐと，コーラは，薄まりながら一様に混ぜ合わされる—混合性の現象．など，私達の囲りには，このように完全に攪拌されたような状態に見える現象が少なくない．これらの状態が，物理的にどのような意味を持っているのかを考えてみよう．

粒子の振舞は，位置と速度についての最初の状態が与えられれば，運動方程式を解くことで決定される．多粒子から成る系の場合でも同じである．しかし，これらの多くの粒子の初期条件を決定するのは困難であろうし，また，時間の経過に伴って，多粒子の運動を追跡することは，数学的にも不可能である．そこで，個々の粒子の運動を調べるのではなく，系を全体として見た時，ボルツマンは，系の釣合いの状態を示すものとして，粒子の分布状態が，マクスウェル・ボルツマン分布注 1 になることを示した．

更に，マクスウェル・ボルツマン分布が安定であること，つまり，他のいかなる分布も必ず最終的には，マクスウェル・ボルツマン分布に移行することを，彼のH定理で証明した．しかし，これらのことは，系に何の制約も付け加えることなしには，成り立たないこと—事実，ボルツマンの議論には，クラウジウスのいう衝突数の仮定注 2 (Stosszahlensatz) 或いは分子的無秩序 (molecular chaos) の仮定で採用されている—が，可逆性のパラドックス注 3・再帰性のパラドックス注 4 として示された．

このようなことから，ボルツマンは，H定理による証明の代りに，“独立な粒子から成る系の平均の振舞は，マクスウェル・ボルツマン分布に対応する．ここで平均とは無限に長い〃時間にわたってとった時間平均のことである．”という定理に，次のような推論で到達した．第一に，相空間内のエネルギー曲面上のマクスウェル・ボルツマン分布に対応する代表点の集合は，他の分布に比べて，はるかに大きい．このことは，粒子の分布を確率論的に考察すればよい．次に，時間による平均が，相空間上の平均に等しいことを示すのに，エルゴードの仮説—ある系の代表点の軌道は，エネルギー曲面のすべての点を通る—を導入する．確かに，エネルギー曲面上のすべての点を通るなら，そのエネルギー面上のすべての軌道注 5 が同一の軌道となり，相空間平均を時間平均に等しいと置きうる．

しかし，相空間内のある領域を，隈なく覆うペアノ曲線のような軌道があるとは考えられない．そして，プランシェレルは，このようなことの起らないことを証明した．純エルゴード的な系が存在しないことはわかったが，ポアンカレの回帰定理によっても准エルゴード的な系—エネルギー曲面上の任意の点に，いくらでも近く軌道をとることが出来る系—は存在して，エルゴードの定理—相空間に於ける平均が，時間平均に等しい—を満たすことが期待され，バーコフとノイマンによって，別々

* 東京天文台
Ryuzaburo Nagai: Ergodic Problems

注 1：マクスウェル・ボルツマン分布とは，
q_i，p_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, N$) を一般化座標，一般化運動量，$H(p_i, q_i)$ をハミルトニアン—普通の場合には系の全エネルギーと考えてもよい—とすれば

$$f(p_i, q_i)=C\exp\left(-\frac{H(p_i, q_i)}{kT}\right)$$

で与えられる．
ここに，k はボルツマン常数
T は絶対温度

注 2：マクスウェルボルツマン分布は，粒子の衝突によっている．この衝突の機構の仮定が，衝突数の仮定であって，でたらめに選ばれたある体積要素 dV で見い出される粒子の状態が，特定の体積要素にも適用できるとされている．

注 3：ロシュミットは，系の時間を反転することによって，系のH定理の極小値で与える同じ平衡状態が，極大値にも成り得る系の存在を示した．

注 4：ツェルメロが，ポアンカレの回帰定理を用いて，系の最初の状態に，任意に近い系の状態がつくり出されることを示した．

注 5：相空間内の点は，系の軌道の向きをも示している．

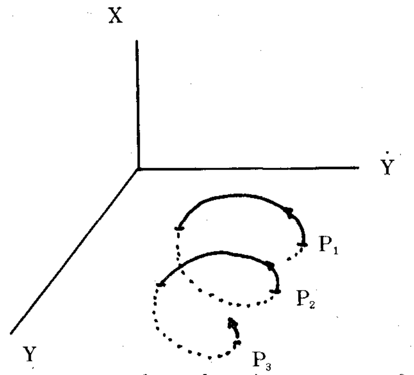
に，個別エルゴード定理，平均エルゴード定理注 6として定式化された．

更に，このエルゴード性は，系が二つの軌道の流れに分割できないこと，軌道が，エネルギー曲面全体を稠密に覆うこと—不可分割性—と同等であることも示された．

2. 力学系に於けるエルゴード性

多くの力学系が，エルゴード的であると思われ，また，数学的には，エルゴード性の判定条件も得られているのに，エルゴード性の具体的な証明は容易ではない．数少ない具体例は，ホップなどによって得られた，負の定曲率を持つコンパクトな連結多様体注 7 上の測地的な流れである．

一葉双曲面上に充分近い二点をとって，測地線に沿って動かせば，それら二点間の距離は指数関数的に増大することが判るだろう．この隔りが，コンパクトな面上にエルゴード性を引き起こす．つまり，負の曲率を持つ領域は，軌道を散乱させる性質を持つ不安定な領域といってもよい．これらの概念は，コルモゴロフやアーノルド達によって，エルゴード性を持つ K-system や C-system注 8 の概念にまとめられた．



第１図 surface of section $x=0$, $\dot{x}>0$

シナイは，これらの考えを応用して，粒子の衝突による散乱現象と，負曲率領域での散乱との類似性に注目し，最も簡単化されたボルツマンの気体粒子の運動モデルについて，そのエルゴード性を証明した．単位の正方形の

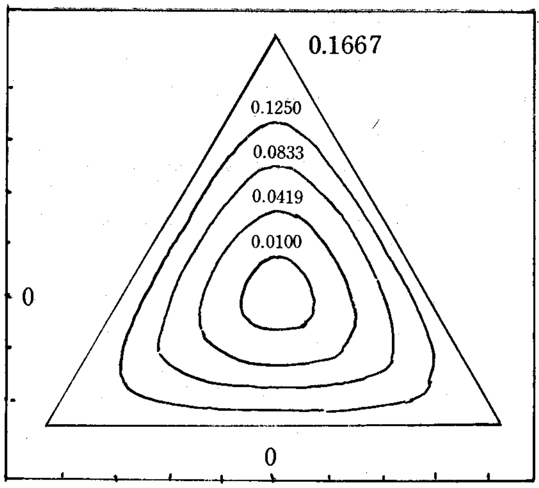
注 6：バーコフの証明は，ノイマンの証明より広く，個々の軌道について，エルゴード定理が成り立つことを示している．

注 7：簡単に言えば，有限個の開集合で覆いつくせる有界な閉領域のこと．

注 8：K-system とは領域のある分割が軌道とともに，いくらでも細い分割を引き起こすような系のことで，この分割は力学的エントロピーと関係を持っている．また C-system は，指数関数的に増大する隔りを持つ系の抽象化されたものである．

中に固定された円を考え，円の外部と正方形の枠の間の空間を，質点が完全弾性衝突を繰り返えしながら平面運動をする．この系はエルゴード的である．

これらのことが，統計力学の基礎の問題について，どれ程の解明になっているのか，筆者は知らないが，兎に角，このようにして，具体的な力学系が，幾何学的に解かれる道筋が徐々に明らかになってきたと思われる．



第２図　等ポテンシャル線

3．計算機シミレーション

銀河系の恒星分布を考える際に，系の全エネルギー，角運動量の z 成分の二つの積分の外に，第三の積分が問題とされているが，エノンとハイリスは，この第三積分の研究から，計算機シミレーションの方法を用いて，局所的な積分 (local integral) と不安定領域 (instability zone) の共存を見い出した．

a)　surface of section の方法

エノンとハイリスのあつかった問題を考えるため，系は自由度2とする．系の運動は $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ で張られる四次元相空間内での曲線として表現できる．ここでドットは時間による微分を表わす．

ある時刻に $x=0,\ \dot{x}>0$ を経て，次々に $x=0,\ \dot{x}>0$ となる $(y, \dot{y})$ 面上の点の動きから，系の性質を調べる方法を surface of section の方法という．(第１図)

b)　エノンとハイリスの計算機シミレーション

ハミルトニアンが

$$H=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+x^2+y^2+2x^2y-\frac{2}{3}y^3\right)$$

で与えられる力学系を考えよう．これは第２図のような等ポテンシャル線を持つ三角形の皿の中での質点の運動を考えていることになる．

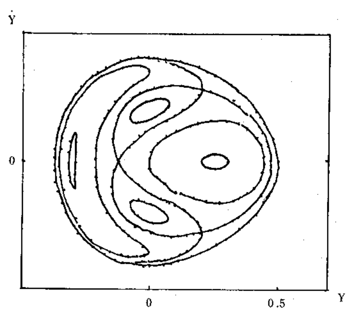
計算機によって surface of section の方法で取り扱った結果が（第３～５図）に示してある．横軸は y，縦軸は $\dot{y}$．

閉ループは，とびとびに現われる点を滑らかな曲線で繋ぎ合わせたものである．一つの閉ループ上の点は，一つの初期条件から出発したものであって，他の閉ループには移り得ない．ただ第4図の中央部の五つの小さなループ (islands of chain) は，同じ初期条件から出発して，次々と island を巡りながら作られたものである．これらの規則的な曲線は，局所的な積分の存在に対応していると考えられる．

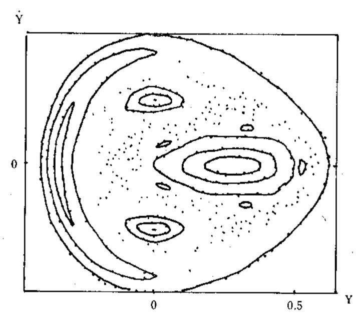
コルモゴロフとモーザーによれば，積分可能系の軌道は，トーラスを形成するが，小さな摂動が系に加えられた時，共鳴条件から充分に離れたトーラスは，変形は受けるが，やはりトーラス—このトーラスのことを invariant torus と呼ぶ—として安定に残る事を証明した．そして，また共鳴条件に充分近い領域では，一般にトーラスは不規則に崩れる．この領域を instability zone という．

計算機シミレーションによる規則的な曲線は，この invariant torus であろう．エノンとハイリスによれば，系の全エネルギーが増加するに従って local integral が消え，instability zone がふえている．これらの領域は，エルゴード的であろうが，どのようなエルゴード性を持っているのか不明であるし，また，エネルギーの増加がこれらのエルゴード領域の出現に，いかなる要因をなし

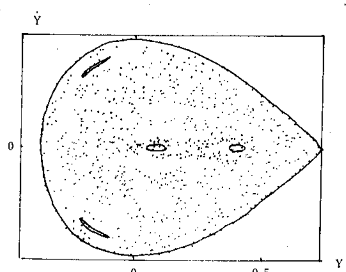
（282 頁上段へつづく）



第３図　$E=0.08333$: M. エノンと C. ハイリスによる結果 (A.J. **69**, 73)



第４図　$E=0.12500$



第５図　$E=0.16667$