人 間 日 時 計

宮 島 一 彦*

1. はじめに

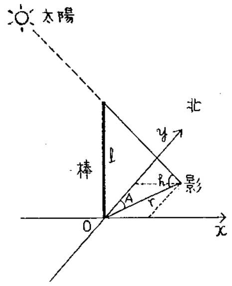
最近よく日照権の問題が云々されたりするが，なるほど，そう言えば近頃の日本人はあまり日光に浴する機会に恵まれないようだ．これは特に育ち盛りの子供などにはかなり深刻である．そんな時，公園や校庭などで日にあたりながら，地面に落ちた自分の影で時刻を知る“人間”日時計があったら，どんなにか楽しく健康によいことだろう．もちろん天文学に対する興味をそそる効果も満点だ．

こんな楽しい“人間日時計”はフランスのモンペリエ公園と，スイスのバーゼル市の或る学校の構内に，シュトーレル博士の設計になるものがあり，やはりスイスでチューリッヒ近くのタールヴィルの或る学校の構内にもエッゲル氏設計のものがある．

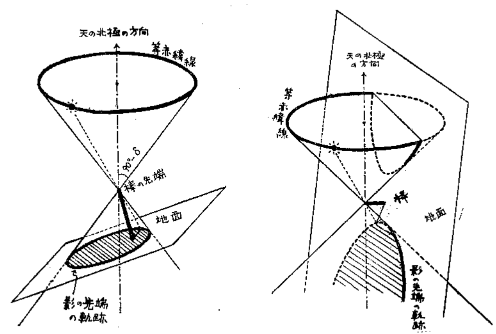
この日時計は，その地の経度緯度にあわせて地面に描かれた楕円の中の，月日により指定された位置に立って，地に落ちる自分の影と楕円との交点の時刻目盛を読むというもので，その原理は，球面天文学の公式と高校程度の数学の知識を使うだけで理解される．本誌の読者にはほどよい頭の体操になると思われるので，これについて共に考察することにしよう．それに先立って，まず，地面に垂直に立てた棒（または人）の影の動きについて復習しておく．

2. 地面に垂直に立てた棒の影

ある土地（緯度 φ）で，ある日ある時刻（太陽の赤緯 δ，時角 H）の，太陽の高度と方位角（南から時計まわりにはかる）をそれぞれ h，A とすると，長さ l の棒の影はこの太陽の方向と正反対にできる．つまり，北から時計まわりにはかって角度 A の方向にでき，その影の長さは $r=l\cot h$ となる．従って時々刻々移動する棒の影の先端の軌跡は，第1赤道座標 $(H,\ \delta)\to$ 地平座標 $(A,\ h)$ の換算式：



第1図



第2図

$$\cos h\cdot\sin A=\cos\delta\cdot\sin H \quad (1)$$

$$\cos h\cdot\cos A=-\cos\varphi\cdot\sin\delta+\sin\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos H \quad (2)$$

$$\sin h=\sin\varphi\cdot\sin\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos H \quad (3)$$

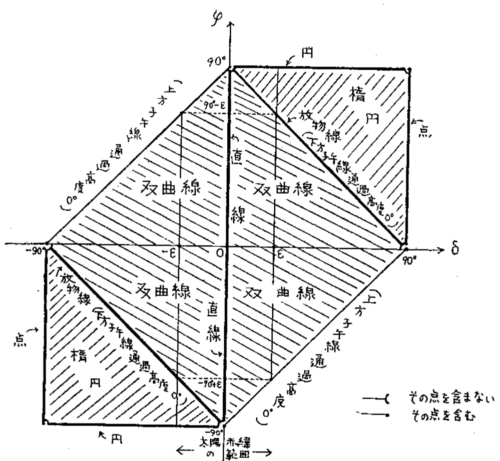
に緯度 φ と，時々刻々の太陽の座標 $(H,\ \delta)$ を代入してそれに対応する $(A,\ h)$ を求め，影の先端の極座標 $(l\cot h,\ A)$ を図にプロットしてやれば描くことができる（第1図）．軌跡がどんな種類の曲線になるかは，この方法では，実際に計算して作図してみるまでわからないが，日出から日没までの太陽の赤緯の変化を無視して，その日一日中赤緯が変らない（たとえば正午の値が一日中使える）と近似した場合には，太陽は天の北極を中心として，天球上の等赤緯線に沿って日周運動を行なうことになるから，軌跡は円錐曲線になることが，第2図から明らかになる．つまり，等赤緯線の円周上の点と棒の先端とを結んで延長することによってできる円錐面を，地面の平面が切った時の切り口が求める軌跡だからである．緯度 φ と太陽赤緯 δ との相互関係によって，円錐の形と，地面が円錐を切る角度とが変るから，それに従って軌跡も，円・楕円・直線・放物線・双曲線とさまざまに形を変える．もう少し解析的に，軌跡の方程式を求めるには，地平座標 $(A,\ h)\to$ 第1赤道座標 $(H,\ \delta)$ の変換公式のうちの2つ，つまり (1) および

$$\cos\delta\cdot\cos H=\sin h\cdot\cos\varphi+\cos h\cdot\sin\varphi\cdot\cos A \quad (4)$$

から，変数 H を消去して $r\ (=l\cot h)$ と A との間の関係を求めればよい．棒の根元を原点にとると，$(r,\ A)$ は棒の先端の影（＝棒の影の先端）の極座標だから，軌跡の極座標表現が得られるからである．しかし今の場合の円錐曲線の焦点は，一般に原点（棒の根元）に一致せず，しかも φ や δ によってその位置を変えるため，極座標による扱いは面倒だから，第1図のように，原点から

* 京都大学理学部宇宙物理学教室

Kazuhiko Miyajima: Principle of the Azimuth Sundial



第3図

北の方向を y 軸の正方向，東の方向を x 軸の正方向というふうに座標軸を定め　$x=r\cdot\sin A$,　$y=r\cdot\cos A$　によって，極座標 (r, A) を直角座標 (x, y) に変換し，x と y の間の関係式を求めることにする．(1), (4) より

$$\cos\delta\cdot\sin H=\sin h\cdot\cot h\cdot\sin A=\frac{x}{l}\cdot\sin h \qquad (5)$$

$$\cos\delta\cdot\cos H=\sin h\cdot(\cos\varphi+\cot h\cdot\sin\varphi\cdot\cos A)$$
$$=\sin h\cdot\left(\cos\varphi+\frac{y\cdot\sin\varphi}{l}\right) \qquad (6)$$

ここで (5), (6) の両辺を2乗して加えあわせることにより H を消去する．更に，

$$\frac{1}{\sin^2 h}=1+\cot^2 h=1+\frac{x^2+y^2}{l^2} \qquad (7)$$

を考慮して整頓すると，

$$\frac{x^2}{\dfrac{l^2\cdot\cos^2\delta}{\sin^2\varphi-\cos^2\delta}}+\frac{\left\{y+\dfrac{l\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^2\varphi-\cos^2\delta}\right\}^2}{\dfrac{l^2\cdot\sin^2\delta\cdot\cos^2\delta}{(\sin^2\varphi-\cos^2\delta)^2}}=1 \qquad (8)$$

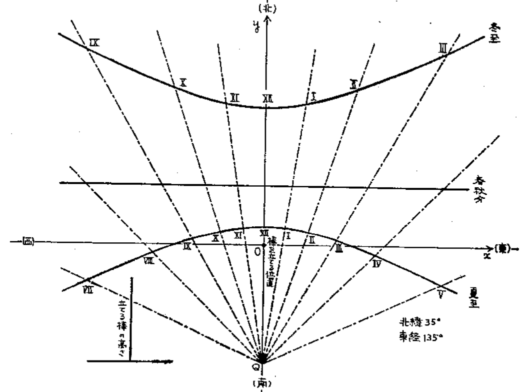
これが，太陽赤緯が δ である日の棒の先端の影の軌跡を表わす方程式である．各分数の分母を0にするような φ や δ については，原式に戻って吟味すると，第3図のようなダイヤグラムができる．$\delta\neq 0°$, $90°$ の時，$\sin^2\varphi>\cos^2\delta$ ならば (8) は楕円を，$\sin^2\varphi<\cos^2\delta$ なら双曲線を表わし，$\varphi=90°$ では軌跡は円 $r=l\cdot\cot\delta$, $\delta=0°$ では直線 $y=l\cdot\tan\varphi$, $\varphi=90°-\delta$（下方子午線通過高度$=0°$）では放物線 $x^2\cdot\cos^2\varphi+l\cdot y\cdot\sin 2\varphi+\cos 2\varphi=0$ となる．黄道傾斜角を ε とすると，太陽赤緯 δ は $|\delta|\leqq\varepsilon$ となるから，その範囲以外の δ については考える必要がないが，太陽を星に置きかえた場合も含めて，$\pm 90°$ までのすべての δ について図示してある．北緯 35° では，$\delta=0°$（春秋分）の時軌跡は直線，それ以外の，太陽のとりうるすべての δ の値に対しては双曲線となる．二分二至に対して計算し，図示したのが第4図（太い実線）である．この図では土地の経度が標準時経度に等しい場合を示した．だから正午には時角 $H=0°$，午後1時には時角 $H=15°$，午前10時は $H=-30°$ などとなる．任意の経度については標準時経度との差を時角の中に含ませないといけない．東経 139° では正午の太陽時角は 4° である．均時差，大気差は無視した．

ところでこの図を見れば明らかなように，いろいろな δ に対して，同じ時刻（言い換えれば一定の太陽時角）における，影の先端の位置は1本の直線上にのっていて，それが y 軸（南北方向）と交わる点は，どの時角に対するものも一致している（第4図の1点鎖線）．このことは (1), (4)式から δ を消去して，直角座標に変換すれば，ある定った H に対し，

$$y=(\cot H\cdot\operatorname{cosec}\varphi)\cdot x-l\cdot\cot\varphi \qquad (9)$$

という直線の方程式が求まり，その y 切片が $(-l\cdot\cot\varphi)$ で H を含まないことからわかる．つまりこの交点Qは，棒の根元から南へ $l\cdot\cot\varphi$ のところにある．点Qと棒の先端を結ぶ直線は地軸に平行になり，これに沿って棒を立てるか三角壁の斜辺を一致させると，その影は直線 (9) と一致する．直線 (9) は時圏の成す平面と地面との交線なのである．これが普通の水平日時計の原理で，(9) の x の係数がその時刻目盛の引き方を教えてくれる．しかし人が立ってその影で時刻を知ろうという場合，その地の緯度にあわせて，例えば 35° に傾いて，立つというわけにはいかない．また，垂直棒の場合，影の先端が第4図のどこに位置するかで時刻が知れるが，朝夕の時刻測定のためには長大な目盛が必要だし，図のスケールが棒の高さによって相似的に変り，人が立つ場合，身長によって種々の図を用意しないといけない．いずれも，人間日時計としては失格である．

それなら，ある1点をきめていつでもそこに立つというやり方を捨て，季節によって（δ によって）立つ位置を変えたらどうなるか？



第4図

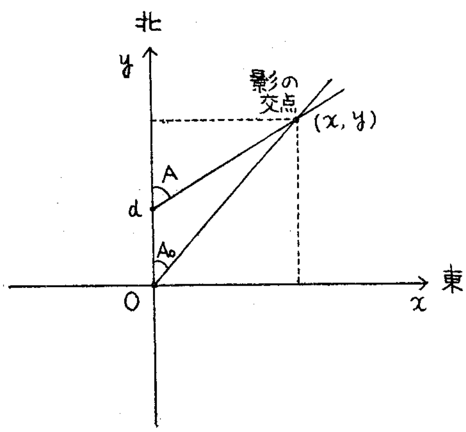
3. 人間日時計

立つ位置を変えるにしても，身長によって違うようでは困るから，影の先端を利用することはあきらめて，影の方向だけに頼ることにする．それではどの方向に，立つ位置を移動させるのがよいかというと，時角が H の時と $-H$ の時では（δ が同じであれば），影のできかたは南北線に関し対称（y 軸対称）だから，y 軸上で立つ位置を変えるべきである．座標軸のとりかたは前節のとおりとする．同じ時角に対する影でも，そのできる方向は δ によって（従って季節によって）変る．そこで，ある時角 H において，太陽赤緯が δ_1 の日には，立つ位置を原点から d_1 だけ移動させ，δ_2 の日には d_2 だけ，δ_3 の日には d_3 だけ，……というふうに立つ位置を変えて，棒全体の影が常に地面の同一点Pを貫くようにする．別の時角 H' では，地面上のまた別の定点 P′ を影が通るようにすることになるが，その場合の立つ位置の移動量が δ_1 の日に d_1'，δ_2 の日に d_2'，……というふうに前の場合と異る値になったのではだめである．どんな時角に対しても，常に，同じ δ については同じ d になるようにできないと困る．もしそうできたならば，各時刻に対する影の交点 P, P′，……を順に結んで1つの軌跡を描くことができる．その各時刻を表記しておけば，月日に対して（つまりその日の δ に対して）指定された場所に立ち，できた自分の影とこの軌跡との交点の位置から時刻がわかる．影の方向だけが問題だから，背の高さには関係しない．

これは実際に可能であって，この軌跡と，立つ位置の南北方向の移動量 d とは，次のようにして求めることができる．まず(2)式を(1)式で辺々割ってやると，

$$\cot A=\frac{-\cos\varphi\cdot\tan\delta+\sin\varphi\cdot\cos H}{\sin H} \qquad (10)$$

便宜上，$\delta=0°$ つまり春秋分の時を考えると（添字 $_0$），



第5図

$$\cot A_0=\sin\varphi\cdot\frac{\cos H}{\sin H} \quad (=\sin\varphi\cdot\cot H) \qquad (11)$$

$\delta=0°$ の時には原点Oに立って影を作るとすると，影の直線の方程式は

$$y=x\cdot\cot A_0=x\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\cos H}{\sin H} \qquad (12)$$

また，任意の日時に，人が y 軸上で北（正方向）に d だけ移動した点 $(0,\ d)$ に立って影を作るとすれば，影の直線の方程式は(10)式で示される勾配を用いて（第5図参照），

$$\begin{aligned} y&=x\cdot\cot A+d \\ &=x\cdot\left(\frac{-\cos\varphi\cdot\tan\delta+\sin\varphi\cdot\cos H}{\sin H}\right)+d \end{aligned} \qquad (13)$$

この2直線，つまり太陽赤緯が 0° の日の影と，それ以外のある日（太陽赤緯 δ）の同じ時刻（太陽時角 H）の影との交点の座標は(12), (13)を連立して解けば求まる。

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{d}{\cos\varphi\cdot\tan\delta}\cdot\sin H \\ y&=\frac{d\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi\cdot\tan\delta}\cdot\cos H \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

いろいろな δ の値に対して，それぞれ適当な d をとって（つまり，各月日に対して適当な移動量を指定して）δ が変ってもこの交点の座標 $(x,\ y)$ が同じ H に対しては違わない（同じ点を影の直線が通る）ようにするには，

$$d=a\cdot\cos\varphi\cdot\tan\delta \quad (a\text{ は任意定数}) \qquad (15)$$

であればよい．この時には(14)式は，

$$x=a\cdot\sin H, \quad y=a\cdot\sin\varphi\cdot\cos H \qquad (16)$$

となって，交点は確かに δ に無関係になる．このような交点は各時刻（各 H）に対してそれぞれ求まり，それらをつなぐと軌跡は楕円となる．なぜなら(16)の両式から H を消去して $x,\ y$ の間の関係を求めると，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a\cdot\sin\varphi)^2}=1 \qquad (17)$$

となるからである．これが交点の軌跡の方程式で，$\varphi=0°$（赤道上）以外の土地では，半長径 a，半短径 $b=a\cdot\sin\varphi$ であるような楕円を示す．半短径は緯度が低くなるほど短かくなり，赤道（$\varphi=0°$）では，軌跡は原点を通る東西方向の直線となる．その場合，$\delta=0°$ の時には日時計として使えない．

この楕円を地面に描き，(16)式によってきりのよい時刻（たとえば1時間おき）に対して交点の位置 $(x,\ y)$ を計算し時刻を目盛る．(15)式によって各々の日に対して立つべき位置を計算する（毎月1日に対するものだけで十分だろう）．$|\varphi|<\varepsilon$ の土地では $|\delta|>|\varphi|$ の時，$|d|>b$，つまり立つ位置が楕円の外に出る．従って楕円と影の半直線との交点は2つあることになるが，その一方が正しいものである．$\delta=\varphi$ の時には立つ位置が楕円の周上に来るので，その前後の日々では影と楕円の交点はわかり

にくい．いずれの場合にも，立つ位置は赤緯が δ と $-\delta$ の時では，原点に関して対称である．a は任意定数でいくらでもよい．それは，a が変ると，楕円も d も同じ割合で相似的に変化するから，影の方向だけ（つまり角度だけ）に依存する限り何の影響もないからである．しかし影の延長と交わる点を調べるよりは，影そのものと実際に交わる方が見やすいから，a は立つ位置から楕円と影の交点への距離が影の長さより短かくなるように選ぶのが望ましい．影の長さは身長に比例するから，身長 l には多少の制限がつくのはやむをえない．立つ位置 $(0, d)$ から楕円周上の交点 (x, y) までの距離を D とすると，$D^2=x^2+(y-d)^2$ だから，これにまず(15), (16)を代入し，$1/\cos^2\delta$ をくくり出して(1), (2)を考慮すると，$D=a\cdot\cos h/\cos\delta$ となる．また，影の長さ L は $l\cdot\cot h$ に等しいから，$h>0$ に対し，

$$L-D=\cot h\cdot\{l-(a\cdot\sin h/\cos\delta)\}\geqq 0 \qquad (18)$$

が常に成り立てばよい．(3)を考慮すれば，

$$l\geqq a(\sin\varphi\cdot\tan\delta+\cos\varphi\cdot\cos H) \qquad (19)$$

右辺が最大になるのは $\varphi\geqq 0$ に対しては $\delta=\varepsilon$ (ε は黄道傾斜角)，$\cos H=1$ の時だから，結局，

$$l\geqq a(\sin\varphi\cdot\tan\varepsilon+\cos\varphi)=a\cdot\cos(\varphi-\varepsilon)/\cos\varepsilon \qquad (20)$$

にとればよい．北緯 35° あたりでは，身長 1 m の子供でも影が常に楕円と交わるには $a\leqq 0.94$ m である．もちろんあまり小さすぎてもいけない．時角 H にはその地の経度 λ と標準時経度との差も含ませて(16)を計算する．第6図は $\varphi=35°40'$，$\lambda=139°33'$ に対して筆者が計算，作図した．

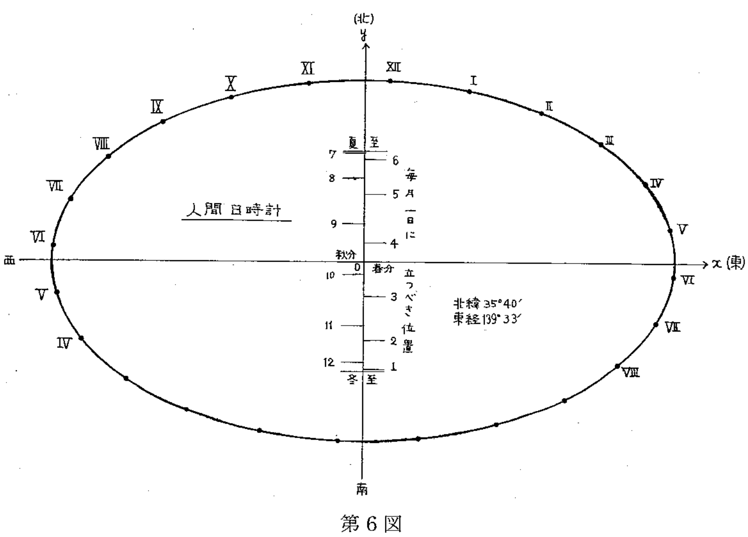
上の場合には均時差の補正が含まれていない．しかしこれは季節変化があるため，経度差のように，時角 H を一律にずらして補正するわけにはいかない．それで立つ位置を変えることにするが，時角 H がずれるのだから，前のように南北線上で移動するだけではだめである．そこで立つ位置を $(0, d)$ の代りに (f, g) とする．均時差に対応する時角の差を ΔH とする時，(13)式に代る影の方程式をつくり，それが(16)式の x, y によって満されることから，

$$\begin{aligned}&\{a\cdot\sin\varphi\cdot\sin\Delta H-(f\cdot d/a)\}\\&\quad+a\cdot\sin\varphi(1-\cos\Delta H)\cdot\sin H\cdot\cos H\\&\quad-(g\cdot\cos\Delta H+f\cdot\sin\varphi\cdot\sin\Delta H-d)\cdot\sin H\\&\quad-(g\cdot\sin\Delta H-f\cdot\sin\varphi\cdot\cos\Delta H)\cos H=0 \qquad (21)\end{aligned}$$

という関係式が出る．これが H のいかんにかかわらず成り立たねばならないということから，f と g に関する連立方程式を得るが，それらを同時に満す解 (f, g) は存在しない．近似式を使って簡単化してもだめである．なお，d は式を簡単に書くために，単に(15)式右辺の代用として用いただけである．そこで，あるきまった日には，どんな時刻にも同じ位置に立てばよいという条件をはずして，時刻がちがえば立つ位置が変るのはやむをえないとすると，f と g との関係は(18)の不定方程式しかないことになる．だから一方は任意に決めることができ，y 軸方向の移動量 g は d に等しくとると，

$$f=\frac{d\{\sin(H+\Delta H)-\sin H\}-a\cdot\sin\varphi\cdot\sin\Delta H}{\sin\varphi\cdot\cos(H+\Delta H)-(d/a)} \qquad (22)$$

となる．ある時角に対して，立つ位置 (f, d) が δ の変化に伴って描く図形は，均時差の性質から8の字形となり，しかも時角によってそれぞれちがうものを用意しなければならない．実際上は1時間置きぐらいに用意すれば十分で，どちらにしても人の影は太くてそれほど正確な時刻は望めないから，むしろこのようなものは無用であろう．どうしても気になるなら均時差表を付ければよい．前記シュトーレル博士のものは均時差補正式でないもの，エッゲル氏のは補正式のものである．日本では東京・日時計研究所の小原銀之助氏がこれを公園に実現しようと尽力しておられる．公園に設けて時刻目盛のところへ，開花時刻にあわせて花を植えた（たとえば下表）小円柱などを据えると，すばらしい公園ができると思う．



第6図

4時	ハス	12時	スミレ
5	アサガオ	13	ナデシコ
6	リンドウ	14	キキョウ
7	福寿草	15	アザミ
8	タンポポ	16	ツユクサ
9	雪割草	17	夕顔
10	サフラン	18	宵待草
11	チューリップ		