内惑星の自転

堀　源一郎*

月が地球にいつでも同じ面を向けていることは，月の自転・公転の周期が無関係でないこと（この場合は二つの周期が等しいこと)を示している．このような関係は，地球を太陽，月を水星に置き代えれば，水星の自転にも当てはめて考えられそうで，実際，少し前までは，水星は太陽にいつでも同じ面を向けているとされ，またこれを支持する観測も報告されていたようである．さすがに，のっぺらぼうの金星については，自転の様子を知る手掛が全くなかったこともあって，最近（といっても十余年前）まで，自転について言われたことはなかった．

ところが昨今，レーダー観測や探査機による実地調査(？)が示すところによると，水星の自転周期は59日で，金星では245日（逆行）ということである．水星の場合だと，公転周期は88日であるから，$88\div59=1.49\fallingdotseq3/2$ が示すように，自転と公転周期はいわゆる尽数関係(commensurability)にあって，自転と公転の相互作用を示している．一方，金星の場合は公転周期が224.7日であって，これと245日は直接には結び付きそうもない($245\div224.7=1.09\cdots$)．しかるに金星と地球の会合周期（つまり金星の対地球公転周期）は

$$1\div\left(\frac{1}{224.7}-\frac{1}{365.2564}\right)=583.9(\text{日})$$

であり，また金星の対地球自転周期は，金星の自転が逆行であることに注意すると

$$1\div\left(\frac{1}{245}+\frac{1}{365.2564}\right)=146.6(\text{日})$$

となり，これら二つの周期を比べると，$583.9\div146.6=3.98\fallingdotseq4$ が示すように4/1の尽数関係が浮かび上って来る．観測値245日の代わりに243.15日を採れば，

$$1\div\left(\frac{1}{243.15}+\frac{1}{366.2564}\right)=145.97(\text{日})$$

で，$583.9\div145.97=4.000$ とピタリの数値となり，したがって金星の（対恒星）自転周期を243.15日（逆行）と考えたくなる次第だ．とにかく，思いもよらぬことであったが，金星の自転運動に地球が一役（も二役も）買っていることは疑いない．

水星の場合の問題点は，月の自転・公転と比べて，尽数関係が月では1/1なのに，どうして水星で3/2となるのか，ということであろう．結論を言えば両者の違いは公転運動の軌道の離心率の違いに因るものである．月の軌道の0.055に対し水星の軌道は0.206の離心率である．月はほとんど地球の回りを等速運動しており，1/1の尽数関係は，月が地球に同じ面を向ける運動に通ずる．しかし離心率を無視できぬようなケプラー運動でこういう運動が不可能なことは明らかである．それは自転が一様回転なのに公転はケプラーの第2法則によって一様回転ではないからである．仮に水星も月のように自転・公転周期が等しかったとしたら，図1の示すように，水星Mは太陽Sならぬ虚焦点S′の方に同じ面を向けるような運動をする．しかし虚焦点に同じ面を向けても力学的意味はないし，それにこの事象も近似的である($O(e^2)$を無視して成立)．

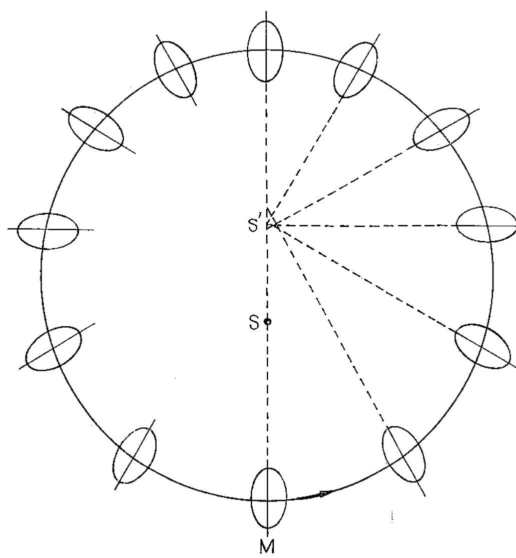

図 1

水星が軌道の全域にわたって太陽の方を向き得ないのなら，それにもかかわらず太陽の潮汐力がどうしても水星にそれを強制するものなら，水星は軌道上の一部ででもその強制に応ずるしかない．となれば，潮汐力の強い近日点近傍を措いてない．離心率eの軌道で近日点と遠日点における潮汐力の大きさは，他の因子が同じなら$(1+e)^3:(1-e)^3$であるから，水星の場合($e\approx0.2$)では近日点で遠日点の3倍以上となる．そこで，水星が近日点の近傍で太陽に同じ面を向ける条件を求めるに，平均運動をnとすると，近日点における角速度は$n\sqrt{1-e^2}/(1-e)^2$である（因数$\sqrt{1-e^2}/(1-e)^2$の値は表1）．水星の$e=0.206$に対する近日点角速度は$1.55n$となる

* 東京大学理学部
G. Hori: Rotation of the Inner Planets

表 1

e	$\sqrt{1-e^2}/(1-e)^2$
0.00	1.000
.05	1.107
.10	1.228
.15	1.368
.20	1.531
.25	1.721
.30	1.947
.35	2.217
.40	2.546

が，この 1.55 が 3/2 尽数関係と結び付くのではないか．そして，もし水星の離心率が $e=0.30$ であったら，表 1 から近日点角速度は $1.95n$ と求められるから，水星は 3/2 ではなくて 2/1 の尽数関係にあったろうと予想するのである．いうまでもないことだが，$1.55n$ の近日点角速度をそのまま自転角速度としたのでは（このとき，水星の自転周期は 88 日の 1/1.55 で 56.8 日となるが），全く何の意味もない．つまり，もし水星の自転周期が 56.8 日なら，この自転周期は偶然だと考えるほかない，ということに注意しよう．尽数関係になければ，水星が近日点通過時（とその前後で）太陽に同じ面を向けたとしても，その後の近日点通過で再び前の状態が繰り返えされるわけにはいかないからである．逆に考えて，一般に子天体の自転周期が，近日点近傍における母天体の潮汐作用を仲介として，公転運動とのカプリングで決まったものなら，近日点を通るときにはいつでも，母天体に同じ面（結果的には子天体をラグビーボールとしたときの長軸）を向けているはずであり，つまり尽数関係が成立していることになる．

そうすると，今度は 1.55 が 3/2 と違うため，水星が近日点を通過するとき，自転と公転の角速度がその違いだけ違って，近日点通過の前後で，水星が太陽に同じ面を向け続けることができないのではないか，という危惧が生じるかも知れない．それならば，1.55n は近日点通過時の瞬間角速度に過ぎないのだから，いっそ角速度よりも角度そのもので比べようという気になる．表 2 は，離心率 e のケプラー運動における平均近点角 (l) と真近点角 (f) を示したものである．自転による回転角は時間と共に一様に増加し，従って平均近点角に比例することに注意しよう．一方，真近点角は公転運動における軌道上の位置をズバリ示すものである．そこで $\theta=f-\varphi$, $\varphi\propto l$ なる θ を考えると，図 2 が示すように，θ は近日点 M_1 で母天体 S を向いていた子天体の長軸↑が，M_2 で S から逸れる偏角を表わす．水星に対しては $e=0.206$, $\varphi=(3/2)l$ であるから表 3 の結果となり，図示すれば図 3 となる．これらが示すように，近日点通過の前後かなりの間にわたって ($|f|\lesssim 50°$)，水星の長軸は太陽の方向から 1° と逸れないことがわかる．つまり，先に角速度で危惧した 1.55 と 3/2 の違いが全く問題とならぬどころか，角速度を使った議論では予想されないうまい同期が行なわれているわけだ．もちろん $|f|>60°$ で長軸の方向は太陽から速やかに離れていくが，3/2 尽数関係にある限り，近日点側での同期はいつまでも崩れない．したがって，水星の自転周期は 87.97日（公転周期）×(2/3)＝58.65日 と考えたい．比較のために月に対して同じことを考えれば，この場合は $\varphi=l$ で偏角 θ は中心差となり $2e\sin l+\frac{5}{4}e^2\sin 2l+\cdots$ で表わされる．$e=0.055$ だと $l\sim f\sim 90°$ で θ は最大値の 6° 余に達する．そこで月と水星を比べると，近点の前後で長軸を母天体に向けて同期する様子は，$|f|\lesssim 90°$ の広範囲にわたって，よく似ていることがわかるのである．最近，火星探査機マリナー 9 号によって明

表 2

l \ e	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
0°	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0
5	5.5	6.1	6.8	7.7	8.6	9.7	11.1
10	11.1	12.3	13.7	15.3	17.1	19.3	21.9
15	16.6	18.4	20.4	22.8	25.5	28.6	32.4
20	22.1	24.4	27.1	30.2	33.6	37.7	42.3
30	33.0	36.4	40.2	44.4	49.2	54.4	60.3
40	43.9	48.1	52.8	57.9	63.4	69.4	75.8
50	54.6	59.5	64.8	70.4	76.4	82.7	89.1
60	65.1	70.5	76.2	82.1	88.2	94.3	100.6

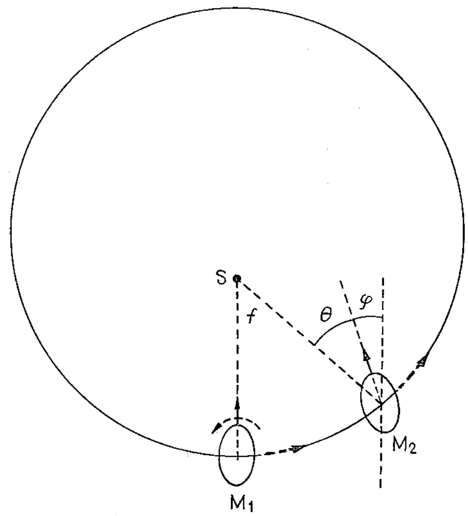

図 2

表 3

l	0°	5°	10°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	90°
f	0.0	7.8	15.5	23.1	30.5	45.0	58.5	71.1	82.8	113.0
θ	0	0.3	0.5	0.6	0.5	0.0	−1.5	−3.9	−7.2	−22.0

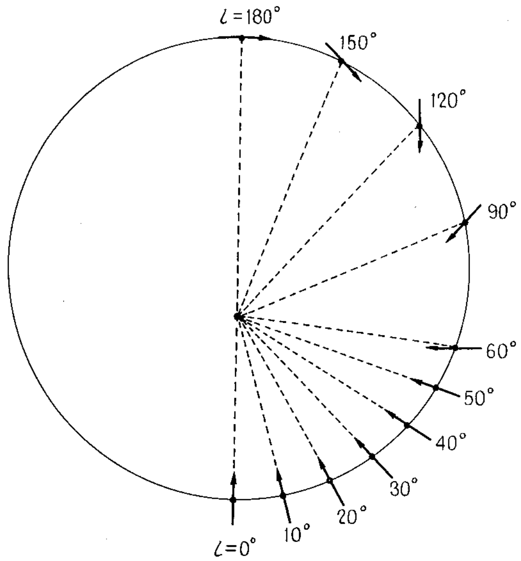

図 3

らかにされたところでは，火星の2個の衛星のうち，少くとも近いほうのフォボスは自転・公転が月と同じく 1/1 の尽数関係にあるということだが，$e=0.017$ を見れば頷けるところである．

ところで，現在 3/2 の尽数関係にある水星において，この 3/2 は一時的のもので，最終的には自転のもっと遅い 1/1 の状態にまで進化するものである，という主張がある．たしかに太陽の潮汐作用は，弱いとはいえ遠日点の側でも働いており，また水星が剛体でないことも確かである．しかしもう1度図1を見ると，軌道の離心率が現状のままで 1/1 状態に移行するとはとても考えられない．それでは水星の自転が公転運動を干渉して，軌道離心率を 0.2 から 0.05 程度にまで逓減させられるのか，と考えると，これもおぼつかない．自転と公転のカップリングといっても，角運動量の圧倒的に大きい後者が前者に及ぼす一方的干渉に他ならないからである．従って水星の現状はそのまま進化の最終段階を示すものと，今のところ筆者は考えたい．

この辺で金星に移ろう．先ず，金星の軌道離心率は 0.007 という小さい値だから，太陽と金星のみを考え，しかも金星の距離において太陽の潮汐作用が金星の自転に干渉し得ると考えるなら，金星はその公転周期を自転周期とするはずである．また，もしも金星の軌道離心率が 0.3 もあって，太陽に 0.5AU くらいまで近づき，太陽の潮汐作用で，先ほども触れたように 2/1 の尽数関係が成立するものなら，地球の存在にもかかわらず，成立したことであろう．現実には金星の離心率がほとんど0で，それに地球の存在が重なって，金星の自転運動に地球が一役買うこととなったものと考えられる．太陽と地球とがそれぞれ金星に及ぼす潮汐作用は，強さにおいて前者が圧倒的であることは言うまでもない．

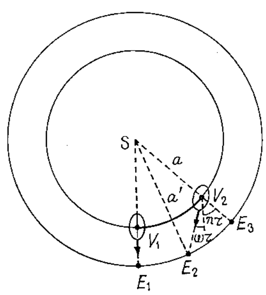

図 4

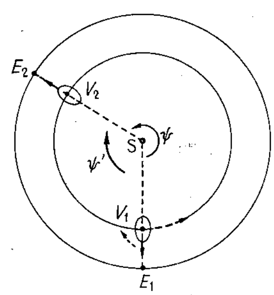

図 5

金星の自転運動のモデルとして図4を考えよう．V_1，E_1 は合における金星，地球であり，V_2，E_2 はそれから τ 日後の位置である．また金星，地球の平均運動をそれぞれ n, n' とし，金星の自転角速度を w（逆行で正）とする．さて，$\triangle SV_2E_2$ に正弦定理を使って

$$\frac{\sin(n-n')\tau}{\overline{V_2E_2}}=\frac{\sin\angle SV_2E_2}{a'}=\frac{\sin\angle E_3V_2E_2}{a'}$$

だが，τ が十分小さければ，$(n-n')\tau$，$\angle E_3V_2E_2$ も小さく，$\sin x\fallingdotseq x$ としてよいし，また $\overline{V_2E_2}\fallingdotseq a'-a$ としてよいから，

$$\angle E_3V_2E_2=\frac{a'}{a'-a}(n-n')\tau$$

を得る．しかるに，

$$\angle E_3V_2E_2=\omega\tau+n\tau$$

であり，結局

$$\omega=\frac{\angle E_3V_2E_2-n\tau}{\tau}=\frac{na-n'a'}{a'-a}=\frac{\left(\dfrac{n}{n'}\right)^{1/3}-1}{1-\left(\dfrac{n}{n'}\right)^{-2/3}}n', \tag{1}$$

$$P_{\mathrm{ROT}}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1-\left(\dfrac{P}{P'}\right)^{2/3}}{\left(\dfrac{P}{P'}\right)^{-1/3}-1}P' \tag{2}$$

を得る．ここに P, P' はそれぞれ金星，地球の（対恒星）公転周期である．(1) の ω は，先の水星の場合で言えば近日点における瞬間角速度に対応するものであり，それから導かれる (2) の P_{ROT} は，先の 56.8 日に対応する．つまり，単に金星と地球とが合の瞬間（とその前後しばしの間），金星が地球に同じ面を向けるための ω であり P_{ROT} である．だから (2) で $P'=1.000$，$P=0.6152$ を代入して $P_{\mathrm{ROT}}=1.5738$(恒星年)$\fallingdotseq$574.8日が観測値 245 日とぴったり一致しなくてもよいのである（といってもいささか離れ過ぎているが）．この場合でも優先されるのは何等かの尺数関係である．

そこで，この場合の尽数関係のモデルを図5のように考えよう．図で V_1, E_1 は或る合に金星の長軸↑が地球を向いた瞬間であり，また V_2, E_2 はその次の合で，再び金星の長軸が地球を向く瞬間を表わしている．つまり，尽数関係が成立すればこの図のようになるのである．金星の自転は逆行で角速度は前と同じく ω とする．n, n', P, P' なども前と同じで，また P_{SYN} で金星と地球の会合周期（=583.9日）を表わす．

図で SV_1 から SV_2 までを時計回りに測った角度を ψ'，反時計回りに測った角度を ψ とすれば，もちろん

$$\psi'+\psi=2\pi$$

であるが，配置 SV_1E_1 から SV_2E_2 まで1会合周期だけ経過しているので，$[x]$ で x の小数部を表わすことにすれば，ψ', ψ は

$$\psi'=\left[\frac{\omega P_{\mathrm{SYN}}}{2\pi}\right]2\pi,\quad \psi=\left[\frac{nP_{\mathrm{SYN}}}{2\pi}\right]2\pi$$

のように表わされる．これらを (3) に代入し，$2\pi/\omega=P_{\mathrm{ROT}}$, $2\pi/n=P$ に注意すれば，

$$\left[\frac{P_{\mathrm{SYN}}}{P_{\mathrm{ROT}}}\right]=1-\left[\frac{P_{\mathrm{SYN}}}{P}\right]$$

したがって

$$P_{\mathrm{ROT}}=\frac{P_{\mathrm{SYN}}}{m-\left[\dfrac{P_{\mathrm{SYN}}}{P}\right]}\quad (m=1, 2, 3, \cdots)\ (4)$$

を得る．ここに $m=1, 2, 3, \cdots$ に従って $P_{\mathrm{SYN}}/P_{\mathrm{ROT}}$ の整数部は 0, 1, 2, $\cdots$ である．この (4) は，図5の如き尽数関係が成立するための，3種の周期の間の関係式である．$P_{\mathrm{SYN}}=583.9$日，$P=224.7$日を代入すれば表4の結果となる．先の (2) の与える 574.8 日を斟酌すれば $m=2$ に対応する 416.6 日を金星の自転周期を考えたいところだ．しかし先にも述べたように，現実の値は表4で $m=3$ に対応する 243.15 日である（観測値 245 日に基いて）．

表 4

m	P_{ROT} (日)
1	1455
2	416.6
3	243.15
4	171.66

この値を使って，合の前後における金星の自転・公転運動を示すと図6のようになる．図から見てとれるように，合の前後で金星が地球に同じ面を向けるためには，金星の自転がすこし速すぎるようだ．これは (2) の P_{ROT}

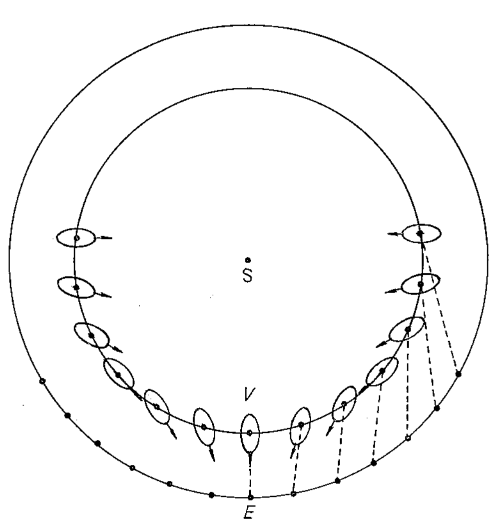

図 6

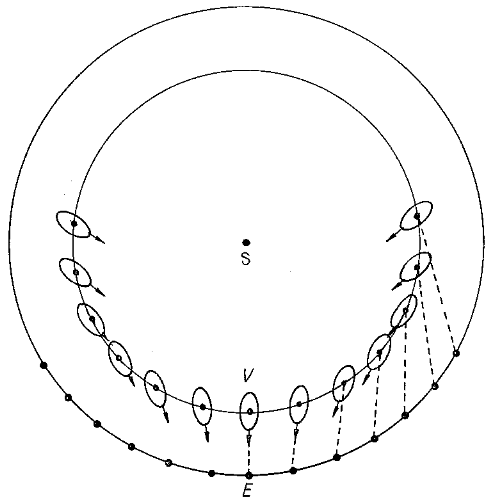

図 7

=574.8日 も示唆するところである．もしも $m=2$ に対応する値 416.6 日を使って図を作れば図7のようになり，図6と比べてこちらのほうがもっとよく同期していることがわかる．それではどうして $m=2$ でなく $m=3$ の尽数関係が実現されているのか，と問われると答えに窮するわけである．あるいは，水星の場合と違って，現実の $m=3$ モードはそれこそ一時的のもので，最終的には $m=2$ モードに移行していくのかも知れない．もしそうであるなら，過去には（逆行）自転速度のもっと速い $m=4$ モードの時期があったのかも知れない．