力学系の乱雑挙動

吉田春夫*

はじめに

アインシュタインがなかなか量子力学を理解しようとしなかった事を例に出すまでもなく，我々にはある種の保守的な傾向がある．20才前後の紅顔の美少年達は大学へ入るとさっそく初等力学を学び，問題を「解く」訓練をさせられる．さらに解析力学を学び問題をよりエレガントに「解く」ことを覚え，それを基礎に本命の量子力学，統計力学を始める，というのが物理系学生の普通のコースである．一般にはこの段階で古典力学とは無縁となるため，我々が古典力学に対して普通に持つイメージは，調和振動子，ケプラー運動に代表されるように方程式，その解とも決定論的で，あるものは解析的に解け，また今の所解けていない問題でも次々と関数を定義していけば，あるいは Runge-Kutta 法を駆使すればケプラー運動のように「解ける」ものだ，といったものではないだろうか．しかるに近年の主として計算機実験をその原動力とした研究は，我々がややもすれば抱きがちな古典力学のこういった描像を否定する．即ち解析的に解けるごく少数の“例題”と，大部分の解けない問題とではその運動に本質的に異なる点がある，ということである．そして解けない問題を決定的に特徴づけているのが表題に掲げた“乱雑挙動”である．

3体問題，解けるか解けぬか

話をハミルトンの正準方程式で記述される力学系に限定すれば，解ける，即ち一般解が求まるための条件は，自由度の数だけの包合系をなす独立な一価の積分が存在することである（リウビィユの定理）．19 世紀の天文，数学者の最大の関心の一つは，3体問題についてこの積分を見出すことであった．しかしながらポアンカレは自由度2の制限3体問題において，ヤコビ積分以外にケプラー変数について一価で微小パラメータ μ で展開できる積分は存在しえないことを証明して，この流れに1つの修止符を打った (1889)．そして解析的に解けない問題の解は想像を絶するものであることを長々と述べた．ところがポアンカレは“天体力学の新しい方法”第1巻に非常に一般的な形でこの積分非存在定理を述べ，さらに定理の条件の一部を証明の文中に挿入したため，この定理は現在でも多くの人々の誤解を招いている（と筆者は思っている）．即ち，解ける問題に少しでも摂動が加わると，一般には積分が存在しなくなり解けなくなると．これはウソである．現在に至るまでこのポアンカレの定理が純粋に適用された例は，自由度有限の系では制限3体問題，一般3体問題，および“ゆがんだ”コワレフスカヤのコマの運動以外に筆者は知らない．しかるにこの積分非存在定理はエルゴード仮説を認めるために都合よいため，後に主に統計力学屋にもてはやされることになった．そしてこのウソがばれたのがフェルミによる有名な非線形格子の計算機実験である．(1955, FPU の問題)

* 東京大学・理学部 H. Yoshida: Chaotic Behavior of Dynamical Systems

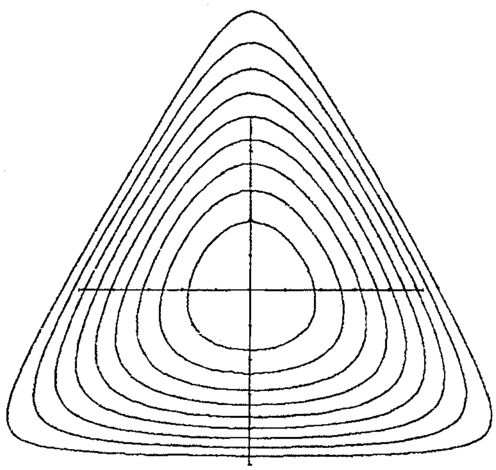


図 1 エノン・ハイレスのポテンシャルの等高線

第3積分の問題

前記ポアンカレの定理は再び天文学の恒星系力学の問題で見なおされた．静的な軸対称銀河内の星の運動は衝突を無視すると，角運動量積分を用いてその子午面に投影して考えれば自由度2のハミルトン力学系となる．制限3体問題におけるようにエネルギー以外に積分が存在しないとすれば，分布関数のモーメントを考えることによって2軸が等しい速度楕円体が出来る．しかし太陽近傍の恒星の運動の統計は予想とは反する結果を与え，ここにエネルギー，角運動量以外の“第3の”積分の存在いかんが問題となった．天文学の問題として第3積分と対決するには，同時にポアッソンの方程式を連立させなければならないので気が遠くなる程むずかしい．そこで話は力学系という数学的側面に限定されることになる．エノンとハイレスは銀河面近傍の星の子午面内の運動を考えるために，“簡単でかつ十分に複雑”なポテンシャル

$$V(q_1, q_2)=\frac{1}{2}(q_1{}^2+q_2{}^2)+q_1{}^2q_2-\frac{1}{3}q_2{}^3 \qquad (1)$$

を採った (1964)．このポテンシャルは正三角形の対称性

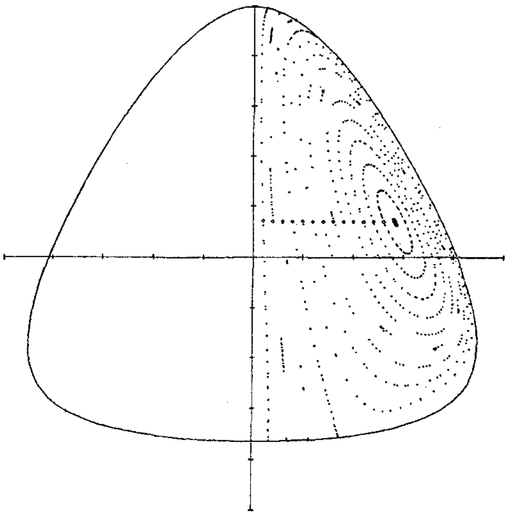


図 2 Surface of section (q_1, q_2) 面上でのポアンカレ写像．全エネルギー $h=0.0833$（外縁は零速度曲線，左半分は対称性のための省略）

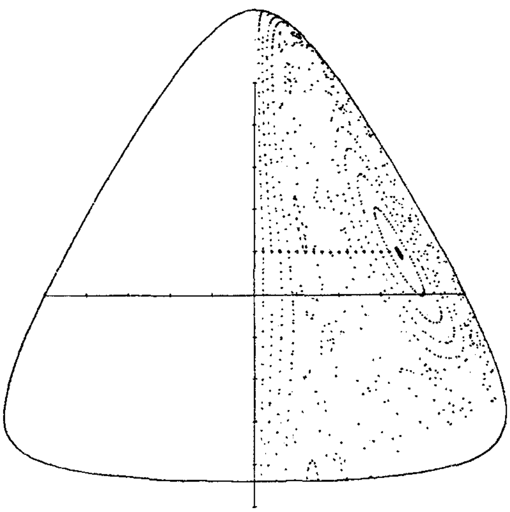


図 3 $h=0.125$

を持ち，$V(q_1,q_2)=h$ なるポテンシャルの等高線は $h \leqq 0.167$ で閉曲線となるがそれ以上では閉じない．図 1 にその等高線を示す．エノンとハイレスはエネルギー以外の積分の存在，非存在を議論するため surface of section（横断面）上のポアンカレ写像を数値的に計算した．この方法はポアンカレ自身が制限 3 体問題において，いくつかの定性的な結果を導くために用いたもので，あえて例えればリンゴが腐っているかどうかを知るのに“食べて死ぬ”のもいいが，食べずにナイフで 2 つに切ってその断面を見る，ということに似ている．今，通常とは一風違った“切り方”をしてみよう．即ちエネルギー＝const なる相空間の 3 次元部分空間で $p_1(\equiv \dot{q}_1)=0$ なる面を surface of section として軌道上 $\dot{q}_1=0, \dot{q}_2>0$ をみたす点を次々とプロットする．surface of section は座標平面 (q_1, q_2) と一致し，(q_1, q_2) 平面での軌跡とそのポアンカレ写像の対応が見やすくなる．今，全エネルギー値を $h=0.0833$ とすると，勝手な初期値に対してそのポアンカレ写像は規則的な曲線の上にのる（図 2）．しかし $h=0.125$ では（図 3）規則的な領域以外に，曲線では結べそうにない不規則領域“海”が現われる．さらに全エネルギー値を大きくしていくと，零速度曲線内で“海”の占める割合がだんだん大きくなり，ついには日本沈没となる．（図 4，$h=0.167$）もしエネルギー以外に一価の解析的な積分が存在するとすれば零速度曲線内は $t \to \infty$ でなめらかな曲線族で埋められることがわかるので，不規則な点列はそんな積分が存在しないことを示唆する．難解な点は，例えば $h=0.125$ の場合，同じエネルギー値でも初期値によって乱雑になったり規則的になったりする，ということである．

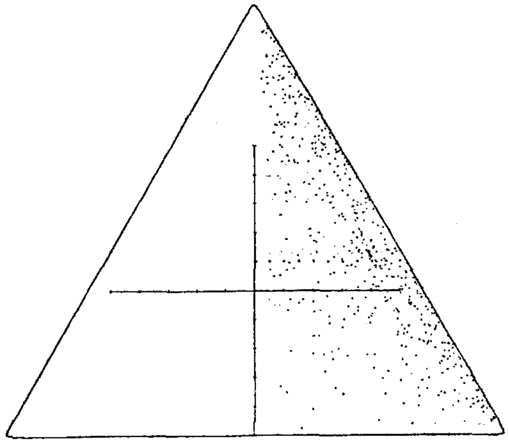


図 4 $h=0.167$

乱雑解の特徴づけ

ポアンカレ写像が乱雑になるか否か，ということの別の表現を捜してみよう．まず解の“パワースペクトル”を考える．数値的に例えば $q_2=q_2(t)$ を得，これを 1 つの時系列だと思ってそのフーリエ変換の絶対値の 2 乗を計算すればパワースペクトルが得られる．図 5 の (a), (b) はポアンカレ写像が規則的，乱雑になる代表的な軌道についてそれぞれ，周波数を横軸，log（パワー）を縦軸としてパワースペクトルを描いたものである．（両者，同じスケールだがその絶対値は意味がない．）規則解においては“線スペクトル”的であるが乱雑解では多くの周波数成分が林立し”連続スペクトル”の様相を呈する．次に解の安定性という見地から運動方程式に対する“変分方程式”を考える．変分方程式（variational equations）とは 1 つの解に対して，その無限小変位が満足する線形方程式で天体力学では周期解に関するポアンカレの系統

的な研究がある．数値的に変分方程式を積分してわかることは，規則解においてはそのノルムは高々，時間 t のオーダーでしか増大しないが乱雑解においては指数関数的に発散するということである．エノンとハイレスによって最初に指摘されたことだが，乱雑解は指数関数的に不安定なのである．

実は上の２つの乱雑解の特徴づけは解析的に根拠のあるものである．即ちケプラー運動のように（原理的に）一般解の求まる積分可能なハミルトン力学系においては，解のパワースペクトルは連続的になり得ないし変分方程式の解は指数関数的な発散をなし得ない．（有界運動について）．よって，これらの数値的結果は再び，解析的に解ける積分可能な系でないことの証拠を与える．また，あまり知られていない（と思う）ことだが，ポアンカレが最初，制限３体問題の積分非存在定理を述べた時本質的であったのが，周期解に対する変分方程式がまさに指数関数的発散を許すという事実であった．(Acta Math. *13*, 1889)

乱雑挙動の起源

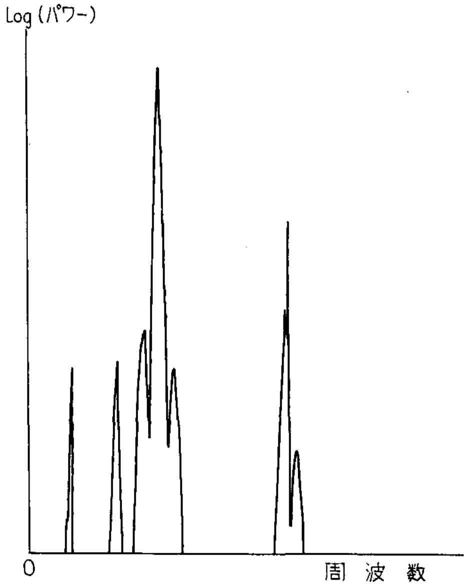
それでは一体，何が解を乱雑にしているのか．エネルギーの違いで，あるいは同じエネルギーでも初期値の違いで解が乱雑になったりならなかったりするのはどうしてか．本来，決定論的な微分方程式に対するこういった問いかけは，あまりにも人間的で意味の無いものかもしれない．が，摩訶不思議な"結果"に何か"原因"を付随させて考えたいのは人情である．ハミルトン系の場合ある程度有効な考え方として局所不安定性による，とするものがある．それは変分方程式の解が指数関数的な発散を許す，即ち軌道が指数関数的に不安定になるのは"局所不安定"な領域を通過するからだ，とするものである．今，ポテンシアル (1) から導かれる運動方程式の変分方程式（4 階）を $\vec{\xi}$ を変位ベクトルとして

$$d\vec{\xi}/dt=A(q_1, q_2)\vec{\xi} \qquad (2)$$

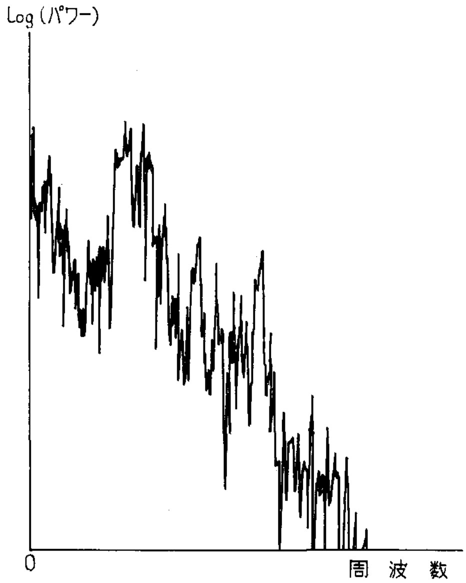
と書く時，軌道の局所的な安定，不安定性は行列 $A(q_1, q_2)$ の固有値に正の実部を持つものが無いか有るかで決まる．$A(q_1, q_2)$ の固有値が正の実部を持ち得ない領域を"局所安定領域" それ以外を "局所不安定領域" と呼ぶことは自然である．(1) についてその境界は

$$q_1^2+q_2^2=1/4 \qquad (3)$$

なる円で与えられ，内部が安定，外部が不安定領域となる．図３にそのポアンカレ写像を示した軌道で，乱雑解は必ず局所不安定領域を通過していることが数値的に確められる．(逆は必ずしも言えない.) またエネルギー値が小さい時には零速度曲線内に局所不安定領域を含み得なくなり乱雑挙動は起こり得ない．この意味でエネルギー値に 1 つの threshhold value が存在することになるが，今の場合その値は $h_{\rm th}=1/12$ と計算される．



(a)　規則解



(b)　乱雑解

図 5　解 $q_2(t)$ の代表的なパワースペクトル

(1) を少し一般化するため，$-1\leqq\varepsilon\leqq1$ なるパラメータ ε を導入してポテンシァル

$$V(q_1, q_2)=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)+q_1^2q_2+\frac{1}{3}(1-2\varepsilon)q_2^3 \qquad (4)$$

を有する系を考えると，勝手な ε に対して，ポアンカレ写像が乱雑になる軌道は必ず局所不安定領域を通過している．ところが ω_1, ω_2 をパラメータとするポテンシァル

$$V(q_1,q_2)=\frac{1}{2}(\omega_1^2q_1^2+\omega_2^2q_2^2)+q_1^2q_2-q_2^3 \quad (5)$$

を考えると少し困った事が起きる．即ち，この系では $\omega_1/\omega_2\cong 1/2$ で局所不安定領域を通ることなくポアンカレ写像が乱雑になる軌道が現われる．しかし都合のいい事に (5) に対して3次の項を摂動項として1次の長周期摂動（天体力学の用語）を考えると，$\omega_1/\omega_2\cong 1/2$ で短周期項を消去した後の解は指数関数的な軌道分離が出来ることが示せる．つまり (5) に対しては局所不安定性だけでは不十分で，長時間にわたって初めて現われる不安定性 (レゾナンス) をも考慮しなければならない，ということでとある．

未解決の問題が1つある．それは unequal-mass Toda lattice と呼ばれるものである．通常の equal-mass の Toda lattice については戸田盛和氏ご自身の「非線形格子力学」で，その歴史とともに紹介されているが，1974年にエノンによって自由度の数だけ積分が発見され完全積分可能な系であることが示された．(天文屋もいろいろな所で活躍している.) ところが粒子の質量を等しくないとすると，局所不安定性の影響も，また明らかな低次のレゾナンスの影響をも受けることなく解は乱雑挙動を呈する．これは困った．筆者が勝手に思っていることであるが，この系に対してはポアンカレの積分非存在定理の条件がすべて満足され，それゆえに解が乱雑になるのではないかと．つまり局所不安定性，レゾナンスといった概念は“白黒”のはっきりしている問題に対しては，もはや有効性を失うのではないかと．まだ計算をしたわけではないが，なかなか確かめる気を起こさせないのが恐怖の超楕円関数達である．

量子論的エノン・ハイレスの問題

古典論的な乱雑挙動は量子論的な対応物を持つ．(1) なるポテンシァルを有するシュレディンガー方程式

$$\left\{-\frac{1}{2}\nabla^2+V(q_1,q_2)\right\}\phi=E\phi$$

を考え，その束縛状態のエネルギー固有値 E_n を Rayleigh-Ritz 法で数値的に計算する（巨大行列の固有値の計算)．基底状態に近い，低いエネルギー固有値はポテンシァルの微小変化に対して安定であるが，古典的な乱雑解を許す高い励起状態のエネルギー固有値はある意味で非常に不安定になることを化学物理屋のポンプレイは示した (1974)．このうまい対応は決して自明な事ではないが深い意味での“対応原理”を感じさせる．特に分子振動の高い励起状態など，実験にかかる可能性があるのでよりおもしろい．我々は古典力学だけでなく再び量子力学においても，水素原子，調和振動子の“演習問題”から得られたエネルギー準位に対する素朴なイメージは，古典的に解けない系に対しては，やはりそのままでは有効でない，ということを思い知らされるのである．

おわりに

ケプラー運動に代表される完全積分可能な系と，制限3体問題のようにそうでない系の違いを社会体制に例えてみよう．前者は安定した恐るべき階級社会というか管理社会というか，社会の隅々まで管理体制が行きとどいており（十分な数の積分の存在)，人は1年先，10年先，いや死ぬまでの人生を，前もってだいたい予知されている (一般解の存在)．しかるに後者はある意味での自由社会，あるいは下剋上たけなわの戦乱の世の中で，1年先のこともはっきりとはわからず，ちょっとした方針変更から一国一城の主となることも，また限りなく堕ちていくことも原理的には可能となる（解の指数関数的な不安定性)．そもそも人生のコースなどという概念が意味をなさず，人々はその刹那を (Runge-Kutta 法で) 生きる．

古典力学の解ける問題において解析的な解を求めるということは，原理的に予知可能な未来の状態に対して1つの“関数”という表式をあてはめることである．それに反して解けない問題では未来は初期値に鋭く依存する．初期値に無限大の精度を期待しない限り，未来は予知可能とはならない．そしてそんなものを表わす関数があるはずがない．それでは予知不可能な系から，いきなり確率論を導入するといった安易な道を採らずして有用な情報を引き出すのに我々は何をなすべきか．おそらくポアンカレが十分抱いていたであろうこの問題意識に，現在，色々な生いたちを持つ自然科学屋がとらわれている．

この分野のすぐれた総説が

(1) 岩波講座，現代物理学の基礎 6「統計力学」第2版 第10章“エルゴードの問題”

にある．また，新しい話題は最近の会議の集録

(2) “Topics in Nonlinerar Dynamics,” S. Jorna ed. AIP Conference Proceedings, *46*, 1978

(3) “Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems,” G. Casati & J. Ford ed. Lecture Note in Physics *93*, 1979

に満載されている．特に文献 (3) の序文冒頭の次の言葉は印象的である．

The fact that completely deterministic, nonlinear systems can yield wildly chaotic solution behavior has, over the past two decades, been independently discovered and re-discovered by numerous scientists working in a host of distinct scientific disciplines. Separated from each other by thickets of specialized jargon and by specialized journals catering to mutually exclusive audiences, these workers had remained largely unaware of the communality of their work. ……