太陽における乱流的対流

中野 徹*・近藤正明**・海野和三郎***

1. 序

大部分の星ではその質量や進化段階に応じて，中心あるいは表面近くで乱流的対流が起こっていて，それにより熱が運ばれていることはよく知られている事実である．星における対流の理論は現在のところ不完全であり，この不完全さが星の構造と進化の理論の不確かさのひとつの原因になっている．この意味において信頼できる星の対流理論が望まれる．ここでは太陽における対流を念頭におきながら，対流乱流とはどういうものかについて述べ，次に我々が試みている星の対流理論について述べてみたい．

対流は自然界ではありふれた現象である．重力のもとで下から加えられた熱が熱伝導だけでは上方に運びきれないとき，媒質の移動によって熱を運ばなければならない．この運動が対流であり，例えば鍋の水を下から熱したときに起こる運動であり，春のかげろうであり，大きなスケールでは地球のマントル運動である．定量的に言えば，$R_a=g\alpha\Delta Td^3/\kappa\nu$ で定義されたレーリー数が 10^3 ぐらいの臨界値 R_{acr} を超えると対流が起こり始める．ここで κ, ν, α は媒質の熱拡散係数，粘性係数，熱膨脹係数であり，g は重力定数である．d は層の厚さであり，ΔT は上下の温度差（下の方が温度が高い）である．対流が起こると，下方にいた熱い軽い媒質の塊りは上昇し，上方にいた冷い重い塊りは下降し，結果として熱を上方に運ぶことになる．しかしこれらの塊りが同地点で同時に上昇，下降を起こすことは明らかに不可能であるので，当然ながら層の水平な断面上のある部分では上昇，他の部分では下降しなければならない．上昇部分，下降部分がその断面上でどのように分布するかは境界条件や R_a の値によるが，概して言えば $R_a\sim R_{acr}$ ではサイズが d ぐらいの六角格子網が生じ，六角形の中心部では上昇，周辺部では下降が起こる．したがって，もし上方から写真をとれば，熱い中心部は白っぽい，周辺部は黒っぽい白黒の六角格子網が写る．星における対流の R_a は R_{acr} より圧倒的に大きい．このような場合は，d から $d(R_{acr}/R_a)^{1/4}$ までの種々の格子サイズを持った格子網の重ね合わせが出現する．

対流の速度が速くなれば乱流となり，対流の格子状パターンは時間的に変化する．流れが乱流であるかどうかを決めるのはレイノルズ数 R_e であり，R_e がやはり 10^3 ぐらいの臨界値 R_{ecr} を超えれば乱流が出現する．対流に伴なった R_e は大体 $\sqrt{R_a\kappa/\nu}$ の大きさである．κ/ν は媒質により，水では 10，太陽の対流層では 10^9，マントルでは 10^{-23} 程度である．したがって太陽での対流は乱流であり，星の中の対流もそうである．このことは太陽における対流の格子状パターンが時間的に変化することを意味し，実際にサイズが 10^3 km ほどの粒状斑のパターンは数分の寿命で変化する．

星の中の対流の理論を難かしくしているものは，(1) 対流乱流を記述する方程式の非線型性の大きいことと，(2) 対流の非一様性の大きいことである．非線型性の大きさの程度は R_a/R_{acr}, R_e/R_{ecr} であり，1 に較べて十分大きく方程式は極めて非線型性が強い．他方，非一様性は，星の対流層の中で密度，温度勾配等がなん桁も変化することに起因する．星の対流理論では (1), (2) ともに正しく考慮されなければならない．我々の議論の順序は，まずブシネスク (Boussinesq) 近似で調べられた対流乱流の非線型効果について 4 章で述べる．次にそこで得られた結果を踏まえて，非線型性，非一様性の効果を同時にとり入れる試みについては 5 章で述べる．

2. 対流乱流

管の中の水の流れにおいて，流速が速くなると層流から乱流に移行する．流速が一層速くなると発達した乱流が現われる．発達した乱流では種々のスケール（対流では格子のサイズ）の運動があり，そのスケールは大は管のサイズ L から，小は粘性の効果が顕著になる $l_d\sim L(R_{ecr}/R_e)^{3/4}$ までに及ぶ．乱流というものは全く乱れていて，そこには秩序的な運動といったものは全然存在しないような印象を持たれるかもしれないが，実はそうでない．ある瞬間に乱流の写真をとると，その写真は一様にのっぺりしているのではなく，種々のスケールの乱れ（渦と呼ばれる）から成るある構造が見られる．少しだけ時間をおいて再びとった写真は細い所を別にすれば前の写真と似ている（相関がある）．大きなスケールの渦は寿命が長く，それらが生き残って写っているわけである．

乱流理論は未だ確立されていないが，コルモゴロフの半定量的理論は比較的正しいと思われる．それによれば，乱流の系に対しては L ぐらいのスケールの運動に外部からエネルギーが供給され（対流においては浮力がエネルギーを供給する），それは散逸もなく l_d ぐらいの

* 中大・理工 Tohru Nakano, ** 東大・教養 Masaaki Kondo, *** 東大・理 Wasaburo Unno: Solar Turbulent Convection

スケールにまで伝えられ，そこで粘性によって散逸してしまう．散逸もなくエネルギーが伝えられる $L>l>l_d$ の領域は慣性領域と呼ばれるが，慣性領域における渦の性質はその渦のサイズ l，その系に単位時間あたり単位質量あたりに加えられるエネルギー ε のみによって決定される．その渦の速度 v_l，寿命 τ_l は

$$v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}, \qquad \tau_l \sim \varepsilon^{-1/3} l^{2/3} \qquad (1)$$

で与えられる．サイズ l の渦は生まれてから平均して τ_l ぐらいで消滅する．この誕生，消滅の過程はランダムに繰り返えされている．

サイズ l の渦は他のサイズの渦とどのように相互作用をするだろうか．渦 l はその寿命 τ_l の間に多数のより小さい渦との衝突を繰り返えす．これらの渦は渦 l の速度場をランダムにかき混ぜ，その速度場の空間的変化を均すであろう．すなわち渦 l に対して粘性のように働く．この粘性を乱流粘性と呼ぶ．乱流粘性係数は解析的に得られるが，それは次のように理解される．サイズ l の渦はその典型的な速度 v_l でもってある距離（混合距離と呼ぶ）行くと，その姿がくずれて周囲と同化してしまう．混合距離は慣性領域の渦ではその渦のサイズ l と同程度である．そのとき渦 l に働く粘性係数 ν_l は $v_l \times l$ のオーダーであり，したがって寿命 τ_l は $l^2/\nu_l \sim l/v_l$ となり (1) と一致する．渦は自らの速度で1回転するぐらいの間に消滅する．他方 l より大きな渦は渦 l にどのような働きをするであろうか．大きな渦の速度場は主として渦 l を単に空間的に運ぶだけである．しかし大きな渦と言えども渦 l に対して空間的に一様な速度場を提供するわけでなく，弱いながらも渦 l を引き延ばしたり，縮めたりする．そのような効果を最も強く示すのはサイズが $2l$ ぐらいの渦である．これらの渦が相互作用することによってサイズ l の渦を作り出す．以上を要約すれば，渦 l はサイズが $2l$ ぐらいの渦同士の相互作用によって作り出され，同時にサイズが l より小さな多数の渦の粘性運動によって減衰させられる．これら2つの機構のバランスによって渦の強さが決定されるわけである．通常の乱流を例にとったが，対流乱流でも同じことが起こっている．

乱流を取り扱うには，(1) 方程式そのものを数値的に解き，個々の渦の空間的，時間的振舞いを求めるのと，(2) 統計的処理によって速度の2乗平均とか，対流フラックスと関係のある速度と温度の相関関数等を計算するのと2通りが考えられる．(1) の方法はひとつの渦の消長を視覚的に捉えるのによく，対流によって磁力線が引っ張られ，いかに変形，増幅を受けるかを知ることができるであろう．しかしこの方法では多数の格子点が必要であり，現在の計算機の容量では実行が不可能である．(2) の統計的方法は我々が以下で採用するもので，個々の渦の運動は分からないが，相関関数の計算に適している．

3. 太陽における乱流的対流と混合距離理論

星の中での対流理論を試みる前に，具体的に太陽の対流層の構造について簡単に述べる．太陽の対流層は表面近くに位置し，その厚みは半径の2～3割である．そこでは $\beta \equiv$[(実際の温度公配)−(断熱的温度公配)] は正であり，そのことは浮力が働き対流が起こることを意味する．β は径座標 r の関数であり，水素の電離の悪くなる表面の約 100 km で特に大きく，それ以外の場所では非常に小さな正の値をとる．

太陽で観測されるのはもちろん外部の物理量であり，対流層の内部そのものが観測されるわけでない．しかし対流運動では熱いものが上昇してきて，表面近くで水平方向に流れ，そして冷やされて下降するので，表面だけを観測していても内部の対流運動を伺い知ることができる．太陽で観測される対流渦の典型は粒状斑と超粒状斑である．粒状斑の水平方向のスケールは 2×10^3 km ほどであり，水平方向の速度も垂直方向の上昇速度も大体 1 km/sec ほどである．その寿命は数分程度である．一方超粒状斑の水平方向のスケールは 3×10^4 km ほどであり，垂直方向の上昇速度は 50 m/sec，水平方向の速度は 0.3 km/sec，寿命は1日の程度である．どうして2種類の渦が卓越しているのだろうか．もし全ての r 依存性を無視すれば，対流層の厚み 2×10^5 km ぐらいのスケールの渦が最も強く現われるべきである．したがって種々の物理量の r 依存性を考慮に入れることが必要不可欠である．

ベーム=ヴィテンセ (Böhm-Vitense) の混合距離理論はその簡潔さにもかかわらず，目ざましい成果を星の中の対流に対して収めている．如何なる“より高級な”理論も混合距離理論をある程度まで裏づけることが出来なければならないと思われる．混合距離理論によれば，熱い塊りは浮力によって上昇しながら熱を運ぶが，この塊りは混合距離 Λ だけ行くと周囲の媒質と同化し，壊れてしまう．その塊りの上昇速度 $\bar{v}$ は，Λ だけ行く間に浮力によって得られるエネルギーを運動エネルギーと等しいとおくことによって

$$\bar{v} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (g\alpha\beta)^{1/2} \Lambda \qquad (2)$$

と得られる．その塊りによって運ばれる対流的フラックス F_c は

$$F_c = \frac{1}{2} \rho C_p (g\alpha\beta^3)^{1/2} \Lambda^2 \qquad (3)$$

と計算される．ここで ρ は密度，C_p は定圧比熱である．F_c に輻射によるフラックスを加えたものが全フラックスでなければならないという要請により各点で β を求め，それを積分することによって温度構造を得ることが

出来る．

2章の議論のように乱流拡散係数と粘性係数を共に $\bar{v}\Lambda$ のオーダーとすれば，サイズ l の渦の R_a は $(l/\Lambda)^4$ のオーダーとなり，$l\lesssim\Lambda$ の渦は安定化されているが，$l\gg\Lambda$ の渦は不安定である．すなわち混合距離理論では対流渦のサイズは Λ 以下と考えられており，これより大きな渦は考えられないことになる．Λ として何をとるかであるが，ベーム=ヴィテンセは $\Lambda=\alpha H$ (H は圧力スケール高さ）とし，$\alpha=1\sim2$ と選べば望ましい結果が得られることを示した．F_c は Λ^2 に比例するから，Λ が大きければ大きいほど F_c にはよく効く．果して，より進んだ理論により求められた対流渦のスペクトル分布を用いて Λ^2 を計算したとき，Λ は H のオーダーになるであろうか．

4. ブシネスク近似

この章ではブシネスク近似を採用して，対流乱流における非線型効果の役割，例えば乱流粘性係数，拡散係数といったものを明らかにする（参考文献1参照）．この近似では密度変化は浮力の項以外で無視される．ブシネスク近似は星の中の対流では現実的でないが，非線型効果を調べる目的のためには十分である．このような系は空間的に一様であるから（以後では簡単のために等方的でもあると仮定している）方程式をフーリエ変換できて

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right]u_\alpha(\vec{k},t)-g\alpha P_{\alpha\beta}(\vec{k})\lambda_\beta u_\beta(\vec{k},t)=M_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\sum_{\vec{q}} u_\beta(\vec{k}-\vec{q},t)u_\gamma(\vec{q},t), \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\kappa k^2\right]\theta(\vec{k},t)-\beta\lambda_\alpha u_\alpha(\vec{k},t)=N_\alpha(\vec{k})\sum_{\vec{q}} u_\alpha(\vec{k}-\vec{q},t)\theta(\vec{q},t), \quad (5)$$

$$P_{\alpha\beta}(\vec{k})=\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2},$$

$$M_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})=-\frac{i}{2}[k_\gamma P_{\alpha\beta}(\vec{k})+k_\beta P_{\alpha\beta}(\vec{k})],$$

$$N_\alpha(\vec{k})=-ik_\alpha$$

となる．(4) は速度場 $\vec{u}$ に対する式であり，$\vec{\lambda}$ は重力とは反対方向の単位ベクトルである．左辺の最後の項は熱膨張による浮力を表わす．(5) は温度場 θ に対する式であり，$\kappa, \nu, \alpha, \beta$ はすでに定義したものである．(4), (5) の右辺の非線型項は種々のサイズ（波数の逆数でもってサイズを定義する）の渦間の相互作用を表わす．

2章で述べた乱流の取り扱い方にならって，非線型項を小さなスケールの寿命の短い渦からの寄与と大きなスケールの寿命の長い渦からの寄与の2つに分ける．小さな渦の渦 k への効果は乱流拡散，粘性で表わされ，乱流拡散係数 $\kappa'(k)$ と粘性係数 $\nu'(k)$ は

$$\kappa'(k)=\frac{1}{3}\int_k^\infty dq\frac{F(q)}{\gamma(q)}, \qquad \nu'(k)=\frac{2}{5}\kappa'(k) \quad (6)$$

と計算される．ここで $F(q)$ はエネルギースペクトルと呼ばれるものであり，$|\vec{u}(\vec{q})|^2$ の平均値そのものである．$\gamma(q)$ は渦 q の減衰率（寿命の逆数）である．(6) の物理的な意味は混合距離の考えと一致する．波数 q の渦による粘性係数は，その渦が寿命の間に移動する距離 $u(q)/\gamma(q)$ とその速度 $u(q)$ との積で表わされる．

小さなスケールの渦の効果を乱流粘性，拡散で表わせば，(4), (5) は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\nu(k)k^2\right]u_\alpha(\vec{k},t)-g\alpha P_{\alpha\beta}(\vec{k})\lambda_\beta\theta(\vec{k},t)=M_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\sum_{\vec{q}}{}' u_\beta(\vec{k}-\vec{q},t)u_\gamma(\vec{q},t) \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\kappa(k)k^2\right]\theta(\vec{k},t)-\beta\lambda_\alpha u_\alpha(\vec{k},t)=N_\alpha(\vec{k})\sum_{\vec{q}}{}' u_\alpha(\vec{k}-\vec{q},t)\theta(\vec{q},t) \quad (8)$$

と書ける．ここで右辺は大きなスケールの渦との相互作用によって $\vec{u}(\vec{k})$, $\theta(\vec{k})$ が作り出される揺らぎ源を表わす．$\nu(k)$ と $\kappa(k)$ は各々 $\nu+\nu'(k)$, $\kappa+\kappa'(k)$ である．ひとたび揺らぎが作り出されると，以後は $\nu(k)$, $\kappa(k)$, 浮力の働きによって減衰率 $\gamma(k)$ で減衰する．$\gamma(k)$ は (7), (8) で右辺を無視した式により決定され，

$$\gamma(k)=\frac{1}{2}[\nu(k)+\kappa(k)]k^2-\frac{1}{2}\left\{([\nu(k)-\kappa(k)]k^2)^2+\frac{4}{3}g\alpha\beta\right\}^{1/2} \quad (9)$$

となる．注意すべきは，$\gamma(k)$ は決して負にならないことである．もし $\gamma(k)$ が負になれば，揺らぎは時間と共に増幅され，$\nu(k)$, $\kappa(k)$ が増大して $\gamma(k)$ が正になるわけである．(9) によれば，短波長では浮力は重要でなく，$\gamma(k)\sim\nu(k)k^2$ であるが，長波長では浮力がよく効いて $\nu(k)k^2$ よりずっと小さい．大きなスケールの渦の寿命は浮力によって引き延ばされており，この効果が (6) を通じて粘性に入っている．

我々は (7) より導かれた $F(k)$ に対する非線型方程式と，(6), (9) とを組み合わせてそれらの数値解を求めた．層の厚さを d とし，k_0 を π/d で定義すれば，$F(k)$ は $k=k_0$ で0であり，$k\sim1.5k_0$ ぐらいでピークに達し，それから減少して，$k>3k_0$ ではコルモゴロフスペクトル $k^{-5/3}$ になる．もし観測が行なわれると，$k\sim1.5k_0$ の渦が卓越的に観測されることになる．種々の R_a に対して数値解が得られているが，それによると対流フラックス F_c は R_a と共に増加し，$R_a\nu/\kappa\gg1$ では $0.04C_p\rho(g\alpha\beta^3)^{1/2}d^2$ であり，(3) と比較すれば $\Lambda\sim0.3d$ である．数係数は少し不確かであろうが，Λ が d に比例していることに意味がある．混合距離は大体 d であ

る．同様に揺らいでいる速度，温度の大きさも計算され，特に $R_a\nu/\kappa \gg 1$ では混合距離理論の予測と一致するが，各々の混合距離を d で割った数係数はフラックス，速度，温度で少しずつ異なる．この事実は，混合距離とひと口で言っても，定義によって少し異なるということを示唆しているのかもしれない．

5.　非一様性を考慮に入れた対流理論

径方向の物理量の変化を考慮に入れた対流理論をつくりあげる試みについて述べる．定式化は行なわれているが（参考文献2），全体の数値解は未だ得られていないことを断っておく．直角座標を採用し，径方向を z で表わし，それに垂直な面を x, y で表わす．対流層の厚みが星の半径よりずっと小さければこれは許される．ρ, T, β 等は z の関数であるのに対して，系自身は x-y 面上では一様である．物理量 $a(x, y, z)$ を x-y 面でフーリエ成分 $a(\vec{k}, z)$ に分解する．速度場 $\vec{u}(\vec{k}, z)$，温度場 $\theta(\vec{k}, z)$ に対する式は（4），（5）に似ているが，それらはもちろん z を陽に含む．それらの方程式に加えて速度場は連続の式を満たさなければならない．音波を無視すれば，連続の式は

$$i(k_x u_x(\vec{k}, z)+k_y u_y(\vec{k}, z))+\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial}{\partial z}(\rho(z)u_z(\vec{k}, z))=0 \tag{10}$$

となる．$\vec{u}(\vec{k}, z)$, $\theta(\vec{k}, z)$ の式における非線型項の処理の仕方は4章の方法にのっとる．小さなスケールの渦（大きな水平方向の波数）との相互作用を乱流粘性係数 $\nu'(k, z)$，乱流拡散係数 $\kappa'(k, z)$ で代表させる．それらはもちろん k のみならず，z にも依存し，z 点での近傍における揺らぎの関数として（6）と似た形に計算される（厳密に言えば，$\nu'(k, z)$ のように z に関して局所的には書けないが，妥当な近似の下でこう書ける）．それらに関係する項を左辺に移せば，z もあらわに含むが，やはり（7），（8）のように書ける．すなわち左辺は渦の減衰を決定する表面的には線型方程式であり，右辺は揺らぎ源である．対流渦の z 方向の形状，減衰率を求めるには，4章と同じく右辺の揺らぎを無視した方程式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho(z)u_z(\vec{k}, z, t)\\&\quad-\left[\frac{\partial}{\partial z}\nu(k, z)\frac{\partial}{\partial z}-k^2\nu(k, z)\right]\rho(z)u_z(\vec{k}, z, t)\\&\quad-L_z(k, z)g(z)\alpha(z)\rho(z)\theta(\vec{k}, z, t)=0,\end{aligned} \tag{11}$$

$$L_z(k, z)=\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right]^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-1,$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\theta(\vec{k}, z, t)-\left[\frac{\partial}{\partial z}\kappa(k, z)\frac{\partial}{\partial z}-k^2\kappa(k, z)\right]\theta(\vec{k}, z, t)\\&\quad-\beta(z)u_z(\vec{k}, z, t)=0\end{aligned} \tag{12}$$

を調べればよい．ここで $\nu(k, z)$, $\kappa(k, z)$ は全粘性係数，拡散係数である．(11)，(12) において $u_z(\vec{k}, z, t)$, $\theta(\vec{k}, z, t)\sim e^{-\gamma(\vec{k})t}$ とおけば，$\gamma(\vec{k})$ の特定の値（固有値）に対してのみ u_z, θ の解（固有関数）が存在する．各々の $\vec{k}$ に対して，一連の $u_z(\vec{k}, z)$, $\theta(\vec{k}, z)$ の固有関数と，それに対する固有値 $\gamma(\vec{k})$ が

$$\gamma(\vec{k})=\gamma^{(i)}(\vec{k}), \quad u_z(\vec{k}, z)=w^{(i)}(\vec{k}, z),$$
$$\theta(\vec{k}, z)=v^{(i)}(\vec{k}, z)$$
$$(i=1, 2, \cdots)$$

と求まる．ここで $i-1$ は z 方向の節の数を表わす．ひとたび固有関数が得られると，

$$u_z(\vec{k}, z, t)=\sum_i a^{(i)}(\vec{k}, t)w^{(i)}(\vec{k}, z)$$

のように展開すれば，そのあとは全てブシネスク近似の場合と同様に計算を進めることができる．ブシネスク近似では，$w^{(i)}(\vec{k}, z)$ の代わりに $e^{ik_z z}$ が用いられており，$a^{(i)}(\vec{k}, t)$ は $u_z(\vec{k}, t)$ に他ならない．結局，（7）に類似した $a^{(i)}(\vec{k}, t)$ に対する非線型方程式が得られ，その式よりエネルギースペクトル $F(k, i)=2\pi k\langle|a^{(i)}(\vec{k}, t)|^2\rangle$ に対する非線型方程式が得られる．ν', κ' も固有関数を用いて（6）と同様に F の関数として表わされる．最後に，導かれた連立方程式をフラックス＝一定の条件で解いて，F, γ, ν, κ 固有関数を全て矛盾なく決定しなければならない．我々の予備的な計算によれば，太陽における対流に対する混合距離理論はこの点で自己無矛盾的でない．すなわちその理論により与えられる乱流粘性係数，拡散係数そして太陽の大気モデルに基づいて固有関数と固有値 γ が計算されるが，このような γ は残念ながら負となり，成長解を与える．粘性係数を単に大きくするだけでは望ましい解が得られないことが確かめられている．

もし自己矛盾のない解が得られると大変意義がある．太陽で観測される高度 z での z 方向の相関関数は

$$\sum_i\langle|a^{(i)}(\vec{k}, t)|^2\rangle 2\pi k\,|w^{(i)}(\vec{k}, z)|^2$$

で与えられるが，その計算結果ははたして粒状斑，超粒状斑，またはより大きな対流渦に相当する k の所にピークを有するかどうかが分かる．或いは粒状斑ぐらいの渦の計算された寿命が，観測値にあたる数分を与えるかどうかも分かる．このような様々な可能性を念頭におきつつプログラムを進めているが，最終的な解を得る段階には未だ至ってない．

参　考　文　献

1) T. Nakano, T. Fukushima, W. Unno and M. Kondo, Publ. Astron. Soc. Japan, **31**, 713 (1979).
2) W. Unno, to be published in Suppl. Progr. Theor. Phys.