

自己重力回転流体の平衡形状

江里口良治*

1. はじめに

「私が学生のころに萩原先生の書かれた『回転流体ノ平衡形状論ノ回顧』(1933)を読んだ記憶があるのですが、まだ回転流体についてわかっていないことがあるのですか。」とは木原太郎先生のお言葉である。木原先生の学生時代に「回顧」の言葉のもとでふり返られていた問題が、なぜ今ごろになってむしかえされるのかと疑問を持たれる方も多いと思う。しかしその点について述べる前に、回転流体の平衡形状の問題とは何かについて書いておこう。

問題は単純である。莫大な量の伸び縮みのしない(非圧縮性)流体が一樣な角速度で回転しているとき、どんな形をするであろうか? ということである。もちろん、流体の量が莫大なために重力の作用(自己重力)を考えなくてはならない。もともとこの問題はニュートンが地球の形状を調べるために、回転の遅い場合について解を求めたことから始まったものである。その後マクローリン・ヤコビ・ポアンカレらによって、回転の速い場合を含めた一般の天体に対して拡張されてきた。しかし地球や一般の天体を非圧縮性流体とみなすことは、現実と大きくかけ離れていると考えられ、その後の研究は非圧縮性の制限を取り除き、回転するガス体の平衡形状へと向かって行くのである。

さて、そうした非圧縮性から圧縮性へという“時代の流れ”と逆行する、しかも“古くさい”問題を取り上げる理由として二つの事を述べておこう。一つは、その“古くさい”問題は部分的にしか解が得られていないということである。マクローリンからポアンカレに至るまで解析的な解を求めることが主眼であった。しかし解析的手法で求めうる形状には(当然のことながら)制限がついてしまう。したがって古典的に得られた解は“求めやすい”解のみを求めたことになっている。複雑な形状を求める手段がなかったのである。

二番目の理由としては、最近の圧縮性ガスの計算からすると、非圧縮性と圧縮性の違いは定性的にはほとんどなく、定量的にもかなり良く一致していることが示されている。軸対称の場合にはオストライカーとボーデンハイマーが回転ポリトロップと非圧縮性流体を比較し、良い一致を見出している。3次元の形状については、蜂巢・

江里口が同様にポリトロップと非圧縮性流体の比較から定性的・定量的類似性を明らかにした。このことは全く別の方向からも示されている。それは最近になって活発になされるようになった、ガスの3次元的重力収縮の計算である。ガスの動的な収縮の結果、準定常的に平衡状態が実現することがあるが、その状態が非圧縮性流体の平衡状態と非常によく一致しているのである。ガスで計算できるのなら、非圧縮性流体の計算などやらなくてもよいのではないと思われるかもしれない。しかし、ガスの3次元(本当は軸対称についてさえ)の計算については、誰がどんな計算コードを使うかで結果が変わってしまうという状態で、とてもすべてを信用できるまでにはなっていない。そこで非圧縮性流体での平衡形状を十分に調べておけば、動的計算をも含めた3次元の構造に対する理解のために大いに役立つものと思われるのである。

2. 古典的結果

平衡状態にある回転流体の形状を求めることが問題なのだが、形状を定めておいて、それが解になるための条件を求めるというやり方が歴史的にとられた方法であった。

(a) 楕円体平衡形状

最初に考えられたのは表面が楕円体

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1, \quad (1)$$

であらわされる場合であった。このとき楕円体の内部での重力ポテンシャルは

$$V_G = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2, \quad (2)$$

とあらわされる。平衡状態では、重力ポテンシャルと回転のポテンシャルの和が表面上で一定値をとることになる。流体が z 軸のまわりに角速度 Ω で一樣回転しているとすると、回転のポテンシャルは

$$V_R = \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2), \quad (3)$$

となる。ポテンシャルの和が表面上で一定である条件は

$$\frac{1/a_1^2}{\alpha_1 + \Omega^2/2} = \frac{1/a_2^2}{\alpha_2 + \Omega^2/2} = \frac{1/a_3^2}{\alpha_3}, \quad (4)$$

が成り立つことである。この条件を満足する正の Ω^2 , a_1^2 , a_2^2 , a_3^2 が存在するときに楕円体状の平衡形状が存在するのである。とくに $a_1 = a_2$ のときに求まる解を、マクローリン回転楕円体と呼び、 a_1 , a_2 , a_3 が異なるときは

* 東大教養 Yoshiharu Eriguchi: Equilibrium of self-gravitating and rotating fluid

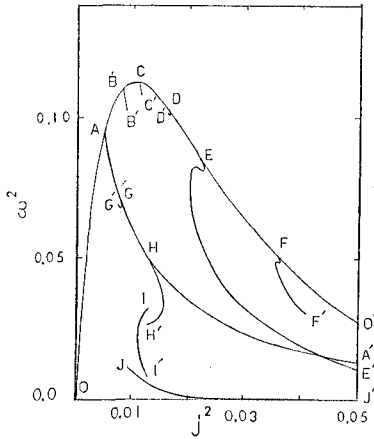


図 1 種々の系列. 角速度 $\omega^2 = \Omega^2 / 4\pi G\rho$ と角運動量 $j^2 = J^2 / 4\pi G\rho^{-1/3} M^{10/3}$ の関係をあらわしている. O-A-B-C-D-E-F-O': マクローリン系列. A-G-H-A': ヤコビ系列. B-B': 三角オニギリ系列. C-C': ザブトン系列. D-D': アンモナイト系列. E-E': ハンバーガー・ドーナツ系列. F-F': 二重リング系列. G-G': “西洋梨”系列. H-H': ダンベル系列. I-I': ダーウィン系列. J-J': 二質点系列.

ヤコビ楕円体と呼ぶ。もちろん、上の条件 (4) はどんな Ω についても満足されるとは限らず、図 1 にみられるように、マクローリン系列 ($a_3/a_1=1$ からはじまって、 $a_3/a_1=0$ にいたる一連の平衡形状を系列と呼ぶ。) には最大の $\Omega = \Omega_{max}$ が存在し、 $\Omega < \Omega_{max}$ では角運動量の異なった 2 つの平衡状態がある。一方、ヤコビ系列についても Ω に最大値があるが、興味あるのは角運動量に最小値があることである。マクローリン系列とヤコビ系列は交点を持つが、この点のことを分岐点という。マクローリン系列が 2 つに分岐してヤコビ系列が始まるというわけである。

(b) リング状平衡形状

楕円体以外の形で求められたのは、形状がリング状になる場合である。リングというのは回転軸から十分離れたところで、切り口が円形のハリガネが回転しているという状態である。切り口を円形に限るときには、重力ポテンシャルは解析的にあらわすことができ、楕円体の場合と同様にして平衡解の存在する条件を求めることができるのである。こうして得られた解の系列をダイソングと呼ぶ。

(c) 楕円体連星

ダーウィンは連星のモデルを作ろうとして、2 つの楕円体が重心のまわりを回転している場合に平衡状態になる条件を求めた。このときには、一つの楕円体に対してもう一つの楕円体は潮汐力を及ぼす。楕円体間の距離が十分に離れていて、しかもその質量が同じであれば、角

速度を適当に選ぶと、この潮汐力のポテンシャルは

$$V_T = \beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2$$

とあらわせる。そこで (a) の場合と全く同じ形式となり、平衡状態にある楕円体連星が求まるのである。この系列をダーウィン系列という。

(d) 西洋梨型平衡形状

ポアンカレが指摘した形状として有名である。この形状は、ヤコビ楕円体の $x-z$ 平面に対する対称性をゆるめて、表面が

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} + x(b_0 + b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 z^2) = 0,$$

(5)

となるとして求められるものである。しかしここで注意しておく必要があるのは、ポアンカレの求めたのは、 b_0, b_1, b_2, b_3 が微量である場合についてであり、有限の大きさを持ったときには調べられていないのである。西洋梨型の解は存在することは示されたが、実際に「西洋梨」になった形状は予想されたにとどまったわけである。

(e) ドーナツ型平衡形状

古典的とはいえないのだが、最近になってウォンがダイソングの拡張を試みた。この計算はもはや解析的な計算ではなく、コンピューターを使用したものである。このときには、形状を仮定するのではなく、平衡の条件を満足する形状を求めるのである。その結果、ダイソングは、切り口が太くなるとともに、切り口が円型から楕円型へと変化して行く系列が存在することが示された。しかしウォンの計算では、角運動量がある値以下では平衡形状が存在しないことになった。そのためこのドーナツの系列が他の系列とどう関係しているかは明らかにはならなかった。このことは、とくにマクローリン系列の安定性を調べることで明らかにされていた $P_2(\cos \theta)$ 的な変形に対する不安定点とのつながりがつかないということから、満足できる結果ではなかった。

3. マクローリン系列から分岐する平衡形状

マクローリン系列やヤコビ系列に対して、種々の微小変形を加えたときの安定性は、1960 年から約 10 年間に、チャンドラセカールを中心にして書かれた約 40 の論文によって徹底的に調べられた。その結果、マクローリン系列やヤコビ系列上での中立安定点や動的不安定点が多数見出された。これらの中立安定点は、必ずしもそこから新しい系列が分岐する分岐点とは限らないのだけれども、それぞれの中立安定点から出発して、新しい系列を捜そうとする試みが筆者たち (江里口・蜂巢・杉本) によってなされた。

マクローリン系列にそって、チャンドラセカールらによって明らかにされた中立安定点は表 1 の通りである。

表1 マクローリン系列上の中立安定点

e	$\Omega^2/4\pi G\rho$	不安定モード
0.8127	0.0936	$P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$
0.8993	0.1100	$P_3^3(\cos\theta)\cos 3\varphi$
0.9328	0.1123	$P_4^4(\cos\theta)\cos 4\varphi$
0.9694	0.1035	$(P_3^1(\cos\theta) + \alpha P_1^1(\cos\theta))\cos\varphi$
0.9810	0.0933	$(P_4^2(\cos\theta) + \beta P_2^2(\cos\theta))\cos 2\varphi$
0.9853	0.0871	$P_4^0(\cos\theta)$
0.9934	0.0658	$P_6^0(\cos\theta)$

この表からみると、とりあえず6個の新しい平衡形状が存在するらしいことが期待される。実際にはこれらの点から出発して5個の新しい平衡形状系列が求められたのである。

平衡形状を求める計算では、角速度を与えて、それに見あう形状を見出すというやり方が普通であるが、この方法は以下に述べる系列を求めるには有効ではなかった。ここでは赤道面上の最大半径と回転軸上の半径の比をパラメーターとして与えて、角速度も未知であるとして系列を求めた。得られた系列を順にみて行こう。

(a) 三角オニギリ型平衡形状

マクローリン系列上で、断面の楕円の離心率 $e=0.899$ から分岐する系列は、不安定モード $\cos 3\varphi$ に対応して、3個のどっぴりが次第に発達していく形状をとる。マクローリン系列との関係は図1に示されていることからわかるように、同じ角運動量に対しては、より小さな角速度で平衡が保たれている。これは、どっぴり部分に作用する遠心力が大きくなるため、平衡状態を保つには角速度を小さくしないといけないためである。しかしそれにも限度があって、ある限界の角速度に達すると、3つのどっぴりから質量を放出しはじめて、平衡解は存在しなくなる。この質量放出の直前の形を図2に示した。

(b) ザブトン型平衡形状

$e=0.933$ から始まる系列である。この系列も $\cos 4\varphi$ に対応して4つのどっぴりが発達して行く。そしてオニギリ型と同じように、ある限界に達すると質量を赤道面から放出して平衡状態がなくなってしまう。この質量放出直前の形を図3に示した。

(c) アンモナイト型平衡形状

$e=0.969$ から始まる系列である。この系列はヤコビ系列から分岐する“西洋梨型”に対応したもので、西洋梨とチャンドラセカールは呼ぶのだが、図4からわかるように西洋梨とはかけ離れている。この系列もやはり赤道面からの質量放出により平衡状態がなくなる。オニギリ型やザブトン型と異なるのは、ごく短い系列のもので、図1のようにマクローリン系列とほとんど区別できないものとなっている点である。

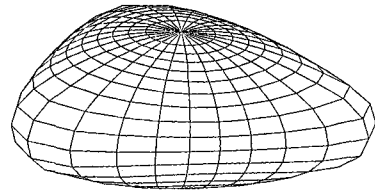


図2 三角オニギリ型形状

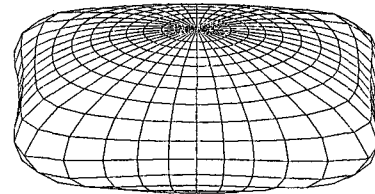


図3 ザブトン型形状

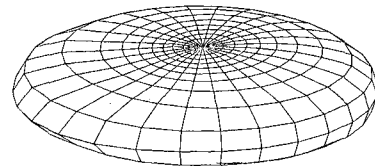
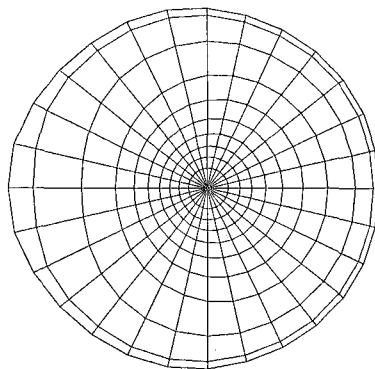
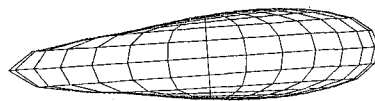


図4a アンモナイト形状

図4b アンモナイト形状. $x-y$ 面への射影.図4c アンモナイト形状. $x-z$ 面への射影.

(d) ハンバーガー型平衡形状

$e=0.985$ という点は、前に述べたようにダイソンリング・ウォンドーナツ型との関係が期待されながら、ウォンの計算では明確にならなかった。しかし、我々の方法によって、この点から出発した計算を行うと、図5のよ

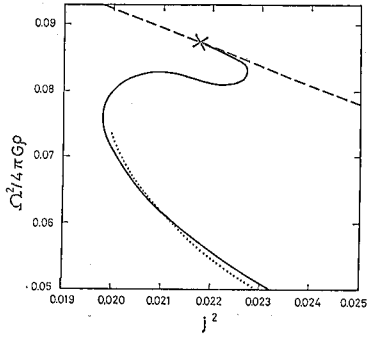


図5 $\Omega^2/4\pi G\rho - j^2$ 関係. 図1のE-E' 付近の拡大. マクローリン系列は破線, ウォンの計算結果は点線. 今回の結果を実線であらわしている.

うになめらかにダイソン・ウォンのドーナツ型へつながっていくことがわかる. 図5は図1の $e=0.985$ 付近を中心に拡大したものである.

ウォンの求めた系列は点線で示してあるが, ウォンの解の限界点は角運動量の極小値に対応していることがわかる. マクローリン楕円体からダイソン・ウォンのドーナツへの変化を, その切り口 (の4分の1) で示すと, 図6になる. 切り口は楕円形から次第に中央が凹んでいき, ハンバーガー型をへて, ついには中央に穴があいて, ドーナツ状になるのである.

(e) 二重リング型平衡形状

$e=0.993$ という点は $P_0(\cos\theta)$ 的なモードに対して不安定になることをバーディーンが示した. この点からの系列を求めてみると, 切り口が図7のように2つの山が発達し次第に2つに分裂して二重リングになることがわかる.

$e=0.985$ からの系列がハンバーガー型からドーナツ型へ変化したので, $e=0.993$ から $P_0(\cos\theta)$ のモードに対する不安定は, 中心に球状のコアがあり, そのまわりにリングやドーナツのある形状となるのではないかと予想していたのだが, 結果はちがってしまった. もちろん, $P_4(\cos\theta)$ モードに対しても, 微小変形の範囲では, コア+円板的な形状も考えうるのだが, その場合もリング的な変形に終わっていることも考えると, コア+円板やコア+リング的な構造は, 一樣回転では存在しないか, 存在するにしても, マクローリンからの微小な変形が, すぐに質量放出をして平衡でありえなくなるためと思われる.

(f) マクローリンから分岐する系列

こうして調べてみると, ほとんどすべての中立安定点から新しい系列が分岐していることがわかった (ただし $e=0.981$ については, 現在までのところ解が見つっ

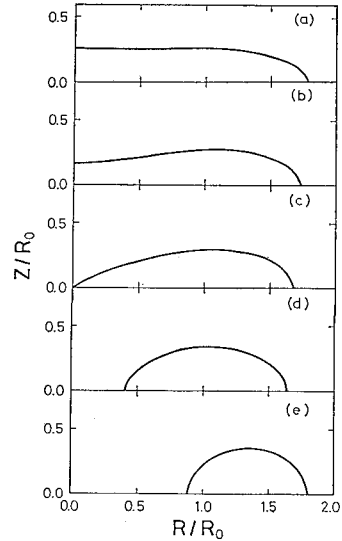


図6 ハンバーガー形状からドーナツ形状への変化. 子午面の4分の1をあらわしている.

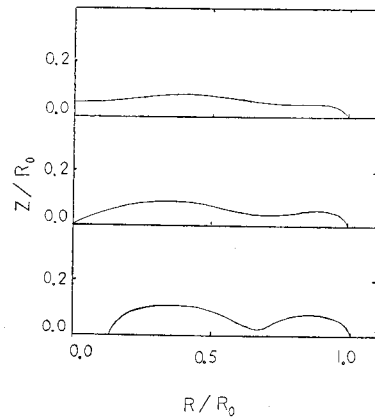


図7 二重リング形状の変化. 子午面の4分の1をあらわしている.

ていない). したがって, ここまでに求めたものより高次の変形に対しての中立安定点からは, 同様に新しい系列が分岐していると考えてよいであろう.

ただし, ほとんどの系列は途中で赤道面からの質量放出をおこして平衡形状がなくなるものと考えられる. 質量放出のない系列としては, $P_{2m}^0(\cos\theta)$ モードに対応する系列であり, これは $(m-1)$ -リング構造にいたると予想できる. しかし, 図1からわかるように, 1-リング状の系列が, 同じ角速度のときに一番小さい角運動量を持つ平衡状態であると思われる. 2-リング, 3-リング等の系列は, マクローリン系列 (これが一番大きな角運動量を持つ) と 1-リング系列にはさまれた領域に存在する

ものと考えられるのである。

4. ヤコビ系列から分岐する系列

チャンドラセカールが求めたヤコビ系列上の中立安定点は表 2 の通り 2 つである。それらの点から始まる系列について述べよう。

表 2 ヤコビ系列上の中立安定点

a_1	a_2	a_3	$\Omega^2/4\pi G\rho$	不安定モード
1.0	0.432	0.345	0.0710	$(P_3^1(\cos\theta) + \gamma P_1^1(\cos\theta))\cos\varphi$
1.0	0.297	0.258	0.0532	$(P_4^2(\cos\theta) + \delta P_2^2(\cos\theta))\cos 2\varphi$

(a) 西洋梨型平衡形状

$\Omega^2/4\pi G\rho=0.071$ がポアンカレの西洋梨型の分岐点である。この点からの系列は、微小変形の 1 次の大きさまで考えたときに平衡となることのみが知られていた。しかし、大多数の人々は、この系列をたどって行くと、変形が十分に大きくなって、大小 2 つに分裂して、その結果、連星が生れるのではないかと予想した。その後、この中立安定点は、動的不安定の始まる点でもあることが明らかにされたため、連星を作るのは準静的な変化ではなく、動的な変化によるものと予想の内容は変わったけれど、ポアンカレの西洋梨型の存在こそ、最終的な平衡状態としての大小 2 個からなる連星の形成を予期させる最大の根拠となっていたのである。

しかし、今回この系列を計算してみると、マクロローン系列から分岐する系列の多くが、質量放出でその系列を終らせたのと同じように、西洋梨型系列も赤道面からの質量放出を行うことが示された。このときの変形は、図 8 のようにさほど大きなものではなく、西洋梨の名前に値するほど変形していない。

こうして“西洋梨型”をへて分裂がおきるという筋書きは全く無理な注文ということになってしまった。

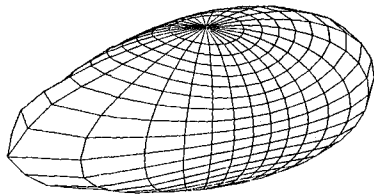


図 8 “西洋梨” 形状.

(b) ダンベル型平衡形状

$\Omega^2/4\pi G\rho=0.053$ から分岐する系列は、“西洋梨”の場合とちがって、十分に大きな変形をとげ、最終的には分裂にいたることが示された (図 9 a=表紙)。このときの

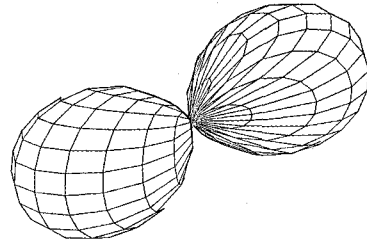


図 9 ダンベル系列の形状。(a.=表紙). b. ダンベル形状.

分裂は 1:1 の等分割である。分裂したあとは、2 つの星が重心のまわりを回転している系列につながって行くのであろうが、今回の計算法ではそこまで調べることはできない。しかし前述したダーウィンの 2 楕円体の系列へとつながって行くであろうことは図 1 から想像がつく。図 1 には、同じ質量の 2 個の質点が重心のまわりを回転している場合の関係も示してある。ダーウィンの系列を過ぎるとこの 2 質点の系列へとつながるのであろう。

(c) ヤコビから分岐する系列

マクロローンのときと同様に、高次の変形に対しての平衡形状についても予想がつく。 P_m^n モードに対しては一般には質量放出で終る系列になるが、 $m=$ 偶数、 $n=2$ に対してのみ質量放出のない、($m=2$) 重星へとつながっていくのであろう。このとき、($m=2$) 個の星は、1 つの串にささった団子状の多重星である。

5. おわりに

“古くさく”て“時代と逆行”しているかにみえる一樣回転する非圧縮性流体の重力平衡形状の問題は、マクロローン回転楕円体とヤコビ楕円体のみで代表させてしまうには、あまりにも不十分であることがおわかりいただけたであろうか。

天体との関連でいえば、非圧縮性と一樣回転ということは非常に制限をつけすぎていることになる。しかし、本格的な 3 次元計算は、ようやく始まったばかりであり、ここに述べたような結果は、これらの 3 次元計算で得られる結果を理解するのに大いに役立ってくれるのではないかと思っている。

☆ ☆

☆ ☆ ☆