積分不可能な古典力学系

吉　田　春　夫*

1. はじめに

古典力学に積分可能系，および反対概念としての積分不可能系という言葉がある．積分可能系とは一言で言えば，解が解析的に表わされ運動が規則的になる力学系であり積分不可能系とは，そうではない，いわゆるカオス的挙動を示す力学系である．――と言ってしまうのは容易なことであるが，与えられた力学系に対してその積分可能性，不可能性を判定することは大変困難なことで，今日まだ完全な結果が得られていない．本稿では積分不可能性の判定条件（定理）について，まず古典的な結果を紹介し，それに最近の筆者による結果を加える．

2. 積分可能な力学系一定義

積分可能系という言葉，概念は 19 世紀末に初めて積分不可能系の存在が意識されるまで有り得なかった．それ以前に有り得たのは「解が××関数によって表現出来る.」とか「この問題はすでに××によって解かれている.」といった様な，系に intrinsic なものではないものの様に思われる．

リウビュ (1855) は自由度 n のハミルトン系において，自由度の数だけの独立な（かつ包合系をなす）1 価の第 1 積分が存在すれば解は求積のみによって得られることを示した．後にアーノルド (1964) はリウビュの条件に加え，もし等エネルギー曲面 $H(p, q)=E$ がコンパクトならばそれは n 次元トーラス T^n となることを示し，原理的に作用-角変数が導入でき，解は n 次元トーラス上の準周期運動としてとらえられることを示した．このトーラス上の準周期運動に対して微小な初期値の摂動を加えてやると，元の準周期運動とのずれ――すなわち不安定の度合は高々 t のオーダーであることがわかる．一方ハミルトンの方程式を実際に数値積分することによって，有界であるにもかかわらず準周期運動でない，すなわち解 $x=x(t)$ のパワースペクトルが連続的となるもの，あるいは不安定性が t の指数関数的オーダーで起こる力学系が実際に存在することを容易に認識することができる．

これらの運動（解）の質的な違いは積分可能，不可能という性質が系に固有のものであり，決して解を表現する関数が既知のものであるか否かといった人為的なものでない事を強く示唆する．それゆえ今日では前出のリウビュの定理の成立する状況，すなわち自由度の数だけの独立な 1 価の第 1 積分が存在する時，積分可能，そうでない時，積分不可能と定義する事が普通となっている．

注意しておくべき事はここに述べた積分可能性，あるいは 1 価の第 1 積分の存在ということは，あくまでも系を大局的に見て意味を持つものである，ということである．局所的に見れば，すべてのまともな力学系は積分可能であるとも言える．なぜなら正則な正期値に対して Δt 後の解はコーシー・リプシッツ型の存在定理で保証され，$0 \leqq t \leqq \Delta t$ の解は $2n$ 次元の位相空間中の 1 次元曲線となる．それゆえ局所的には $(2n-1)$ 個の十分すぎる数の第 1 積分が存在しているわけである．しかしこれらの $(2n-1)$ 個の積分すべてがエネルギー積分の様な大局的な（1 価の）積分ではあり得ない．もしすべての積分が 1 価ならばすべての有界な解は $-\infty<t<\infty$ で 1 次元曲線，すなわち周期解とならなければならないが，こうなるのは等方調和振動子，ケプラー運動などの積分可能系の中でも特にエリートクラスの「完全縮退」した系に限られる．通常の積分可能系では一般の初期値に対して解曲線全体 $(-\infty<t<\infty)$ の次元は n 次元となり，積分不可能系では $n+1$ から $2n-1$ の間の次元をとり得る．$2n$ 次元の位相空間の中で解曲線のもつ次元のいわゆる余次元が，ここで問題にしている 1 価の第 1 積分の数なのである．

3. 古典的な結果

最初にその積分不可能性が示されたのは言うまでもなく古典的な 3 体問題である．ブルンス (1887) は 3 体問題において座標と運動量について代数関数である第 1 積分（代数積分）は，系のもつ明らかな対称性と結びつくエネルギー積分，運動量積分，および角運動量積分だけであることを示した．より厳密な言い方をすれば，3 体問題における任意の代数積分は上の 3 つの積分の関数になるということである．このブルンスの定理における「代数積分」という制限は時折，過少評価されがちな傾向があるが（例えば Wintner, "Analytical Foundations of Celestial Mechanics", § 129)，少なくとも 3 体問題の様なポテンシャルが同次式となる系においては，整関数および整関数の商として書ける積分とほぼ同義である．こ

* 東大理　Haruo Yoshida: Non-integrable Classical Dynamical Systems

れらの「解析的」な積分の存在はより単純な代数積分の存在に帰着させることができるからである．ブルンスの定理における一番の問題点はその証明の難解さに加え，３体問題という力学系の持つどういう特殊性，あるいは普遍性が系の積分不可能性と結びついているのかが全く明らかにされていないことである．それゆえブルンスの定理を他の積分不可能系らしき系に適用しようとすると，我々は直ちに絶望感を味わうことになるのである．

同じく（制限）３体問題の積分不可能性を主張しているものにポアンカレの定理（1892）がある．積分可能系に微小の摂動（$\mu \ll 1$）を加えた系

$$H=H_0(\boldsymbol{I})+\mu H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})+\mu^2 H_2(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})+\cdots$$

を考える．ここで $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{\varphi}$ は非摂動系 H_0 で定義される作用-角変数で H_1, H_2 は φ について 2π の周期を持つとする．$\mu=0$ においては自由度の数だけの１価の積分がある．その積分は $\mu \neq 0$ においては，もはや積分となり得ないことを主張するのがポアンカレの定理である．具体的には積分をやはり μ で展開（できると仮定）して

$$\Phi=\Phi_0(\boldsymbol{I})+\mu\Phi_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})+\mu^2\Phi_2(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})+\cdots$$

とおき，Φ_i 達を順次決めて行く時，Φ_1 が決まるためには H_1 の φ に関するフーリエ係数についての条件が出るが，一般にはその条件は満たされないとして $\Phi=\mathrm{const.}$ なる積分の存在を否定するのである．この定理の意義は積分可能系はパラメーター空間で一般には連続しては存在し得ず，むしろ積分不可能系の方がより一般的であることを示したことにあるが，実際に具体的なハミルトニアンに対して H_1 についての条件をチェックすることは困難なことが多い．また，より根本的な難点は，ある $\mu=\mu_1$ においてだけ存在し得る積分の存在を決して否定できないことである．

ポアンカレ（1899）は別に解のカオス的な挙動と直接結びついた積分不可能性の証明のアイデアを与えている．今日それはホモクリニック点の存在とか２重漸近解の存在とか呼ばれる．摂動の加わった積分可能系を考え，特に非摂動系 H_0 には不安定平衡点を結ぶセパラトリックスがあることを仮定する．このセパラトリックス上の運動は振り子における１つの特殊解に見られる様に $t\to+\infty$ 及び $t\to-\infty$ において不安点平衡点に達するものである．$\mu=0$ で閉曲線となっているセパラトリックスは $\mu\neq 0$ で分離し自分自身と交差することがあり得る（その交点はホモクリニック点と呼ばれる）．その状況ではハミルトニアン以外の１価の積分の存在が否定されるとするものである．このセパラトリックスの分離という現象は数値的に得られるポアンカレ写像のカオス的な振舞いを，特にその発生時においてよく説明する．しかし与えられた系の積分不可能性を主張する際には H_0 がセパラトリックスを有するという仮定以外に，ホモクリニック点の存在を主張するためのある無限区間での定積分の評価が必要となり，それが簡単な留数計算で求まるような系以外ではその積分不可能性が証明されているものは無い様である．

ここに述べたものも含めて古典的な積分不可能性に関する結果はコズロフの最近のレビュー "Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics" Russian Math. Surveys **38**, 1-76 (1983) を参照されたい．

4. 解の特異点から見た積分可能系 v.s. 積分不可能系

与えられた力学系の積分可能性を判定せよ，という問題提起に対して，その完全な解答は今日まだ与えられていない．すでに述べた古典的な諸判定条件もその適用性に種々の限界がある．一体，何がこの問題の解答を困難にしているのであろうか．

力学の方程式――ハミルトンの正準方程式は微分方程式である．微分方程式から直接に一定のアルゴリズムで引き出せる情報は解の局所的な挙動，性質のみである．一方**2**ですでに述べた様に積分可能性という性質は系を大局的に見てのみ意味を持つものであり，局所的には意味を失う．よって解のまともな（正則な）領域のみに限定する限り，与えられた微分方程式からその系の積分可能性についての判定条件を導く普遍的なアルゴリズムは存在し得ないことにもなりかねない．まさにこのことが基本的な困難であると筆者は考える．しかしながら大局的な性質もあえて解の特異点に注目すればその局所的な性質に反映することがあり得る．

話を具体的にするために古典的な n 体問題の方程式

$$\dot{\boldsymbol{q}}_i=\frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i},\qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i=-\sum\frac{m_i m_j(\boldsymbol{q}_i-\boldsymbol{q}_j)}{r_{ij}^3} \quad (1)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

を考えよう．この系はポテンシャルが q_i についての同次式であるという理由によって

$$\boldsymbol{q}_i=t^{2/3}\boldsymbol{c}_i,\qquad \boldsymbol{p}_i=t^{-1/3}\boldsymbol{d}_i \quad (2)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

なる特殊解を有する．但し $\boldsymbol{c}_i$, $\boldsymbol{d}_i$ は実定数ベクトルである．特殊解（２）は相似な形状を保ちながら $t\to 0$ ですべての $\boldsymbol{q}_i\to\boldsymbol{0}$，すなわち同時衝突する解を表わす．積分可能な２体問題 ($n=2$) と積分不可能な３体問題 ($n=3$) の差異はこの特殊解自身には現われてこない．ところが $t\to 0$ で特殊解（２）に漸近する，任意定数を含む解を考えた時，$n=2$ と $n=3$ の差異は歴然となる．一般論から（１）は

$$\boldsymbol{q}_i=t^{2/3}\{\boldsymbol{c}_i+\boldsymbol{P}(I_{\rho_1}t^{\rho_1}, I_{\rho_2}t^{\rho_2},\cdots)\} \quad (3)$$

なる形の解を有することが言える．ここで $\boldsymbol{P}(x,y,\cdots)$

は引数について有限の収束半径を有するテイラー級数で，$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}, \cdots$ は任意積分定数，また $\rho_1, \rho_2, \cdots$ は微分方程式のオーダーをサイズとするある定数行列の固有値として得られる指数である．2体問題においてはこれらの指数はすべて 1/3 の整数倍なる有理数であるのに対して3体問題（3体同次衝突）においては指数の中に無理数や虚数のものが現われる．この無理数，虚数の指数が現われるという事実自身は3体同次衝突の解析接続不可能性として古くから知られていた（ブロック．1908）．その意味は指数の内に無理数，虚数のものがあると，$t<0$ で定義された real な解が $t=0$ の特異点を超えて $t>0$ まで real な解として接続できないということである．($n=2$ の2体衝突では接続が可能である．）この3体同時衝突の解析接続不可能性は，実は3体問題において十分な数の代数積分が存在しないことの直接の帰結である．より詳しく言えば，指数 $\rho_1, \rho_2, \cdots$ には存在する代数積分の一種の次数が反映され，自由度の数だけの独立な代数積分を有する積分可能系では，すべての指数は有理数とならなければならないことが証明できるのである (Celestial Mech., **31**, 363 & 381, (1983))．この結果，ブルンスの定理とほぼ同程度の主張が，解の特異点の性質という，より普遍性を持つ見地から言えることになった．

3体問題において解の明らかな特異点としての衝突を考えることはまだ自然である．ところがエネルギー曲面がコンパクトで real t に対して解が決して特異性を持たない力学系も存在する．この場合はどうするべきか．例として自由度2のハミルトン系

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{4}(q_1^4+q_2^4)+\frac{\epsilon}{2}q_1^2q_2^2 \qquad (4)$$

を考える．この系は $\epsilon=0, 1, 3$ の時積分可能であることはすぐわかる．(2) に相当する特殊解は

$$q_i=t^{-1}c_i, \qquad p_i=t^{-2}d_i \qquad (5)$$
$$(i=1, 2)$$

であるが今度は定数 c_i, d_i 達は実数とはならない．つまり同じ様な解析をするためには (4) の解を複素 t 平面上で定義された複素関数として考えることが強要される．その上で (3) に相当する任意定数を含む解を考えた時，やはり ρ_i なる指数が登場する．具体的には，(5) の本質的に異なる2通りの選択に応じて指数 ρ_i 達は4次方程式

$$(\rho+1)(\rho-4)\left\{\rho^2-3\rho+4\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}\right\}=0$$

及び

$$(\rho+1)(\rho-4)\{\rho^2-3\rho+2(1-\epsilon)\}=0$$

の根として与えられる．積分可能系 $\epsilon=0, 1, 3$ の場合はすべての指数は整数となっている．厳密に証明できることは，ハミルトニアン H と独立な代数積分が存在すればすべての指数は有理数とならなければならないということである．それゆえ，例えば虚数の指数が現れる ϵ の領域

$$\epsilon<-\frac{1}{8}, \qquad \frac{25}{7}<\epsilon$$

での積分不可能性が証明できたことになる．この複素 t 平面での解の特異点の性質に基づいて積分不可能性を示すことは，古典的な積分可能系であるコワレフスカヤのコマの発見（1888）における謎についての1つの部分的な（決して完全ではない！）解答を与えることにもなる．コワレフスカヤのコマについては拙文（数理科学，1981年1月号）を参照されたい．

5. おわりに

本稿では主として力学系の積分不可能性をいかに示すかにスポットをあてて，いくらかのアプローチを振り返った．現在得られている結果は積分可能性に対する完全な判定条件という1つの究極的目標にはまだ程遠い．それよりも一体与えられた任意の力学系に対して，その積分可能，不可能性を判定する有限のアルゴリズムが存在するか否か自身が全く不明である．もしかしたら，具体的な力学系で『それが積分可能であるか否かが決して証明できない』ということが厳密に証明できる系が存在するのかもしれない．

本質的に新しい発想が必要とされていることを痛感する今日この頃である．

雑　報

小惑星の命名

IAU 小惑星中央局から発行されている小惑星回報 8912, 8914号（1984年7月13日付）によると，小惑星 2470 に Agematsu, 2924番に Mitake-mura, 2960番に Ohtaki と命名された．2470番は1976年10月22日，2924番は1977年2月18日，2960番は1977年2月18日に，それぞれ東京天文台木曽観測所の 105 cm シュミット望遠鏡により，東京天文台の香西洋樹・古川麒一郎の両氏によって発見されていて，1976 UW 15, 1977 DJ 2, 1977 DK 3 と仮符号が与えられていた．軌道が確定し正式登録と共に番号が与えられたのを機に，木曽観測所の所在場所である上松町，三岳村，王滝村の三箇町村に感謝の意を表わすことを目的として，発見者から IAU へ提案が出されていたものである．木曽観測所では，上記の3小惑星の他に，2271番 Kiso（木曽），2330番 Ontake（御岳）の2個が，同じメンバーによって発見・命名されている．（香西洋樹）