

高温・高密度物質の状態方程式

荒 井 賢 三*

1. 序

質量が太陽の 10 倍よりも大きい星は、進化の最終段階において超新星爆発を起こし、その結果、中心部に中性子星あるいはブラックホールを形成すると期待されている。星の中心核の重力崩壊に関して多くの大規模な数値実験がなされており、そのいくつかは星の外層部の物質をうまく吹き飛ばしてはいるものの、爆発に否定的な結論も多くあって、現状では、まだ共通の理解には到達していない。その原因は種々あるだろうが、状態方程式が良く分かっていないことも一因であると考えられる。そこで超新星の中心核において実現されるような高温 ($10^{10} \sim 10^{11}$ K) でかつ高密度 ($10^{12} \sim 10^{14}$ g cm⁻³) における原子核物質の物理的性質を調べてみる。

まず、絶対零度の場合にベーム達 (1971) によって論じられた圧縮性液滴モデルを有限温度の場合に拡張したラティマー達 (1978) の方法に沿って大枠を把握し、次に、マルコス達 (1982)、小笠原と佐藤 (1983)、それに荒井達 (1983, 1984) によってなされたトーマス・フェルミ法による計算結果について述べることにする。

2. 系のエネルギー密度

系を構成する物質として、中性子過剰の原子核、その原子核からこぼれ落ちた中性子と陽子、それに、ほぼ完全に縮退している電子とニュートリノとを考える。高温の状態では、いくつかの種類の原子核が存在しうけれども、ここでは代表的なもの 1 種類だけに限定する。さらに光子の寄与は小さいので無視する。

温度が 10^{10} K 程度に高温であっても、密度が充分に高いので、原子核は結晶格子を形成していると考えられる。従って、その中心に原子核をちょうど 1 個含むような球、すなわち、ウィグナー・ザイツ球を単位細胞として採用する。

これまで数多くの核力のモデルが提唱されてきているが、ここでは原子核の実験値をかなり良く説明し、さらに比較的使いやすい形をしているスキーム型のポテンシャルを用いることにする。このとき、核物質のハミルトニアン密度は中性子と陽子の粒子数密度 n_n, n_p 、及びそれらの運動エネルギー密度 τ_n, τ_p を用いて

$$H = \frac{\hbar^2 \tau_n}{2m_n^*} + \frac{\hbar^2 \tau_p}{2m_p^*} + V(n_n, n_p) + W(V n_n, V n_p) \quad (1)$$

と表わされる。ここで、 $\hbar = h/2\pi$ 、 h はプランク定数であり、粒子 i の有効質量 m_i^* は核力の影響を通して n_n と n_p の関数になっており、高密度になると通常の質量より約 20% 軽くなる。(1) 式の第 3 項は均質な物質のポテンシャルエネルギーで、3 体核子間相互作用まで考慮に入れてある。最後の項は粒子数密度の勾配に依存するもので表面エネルギーに相当している。

温度が高くなると、原子核の励起状態が無視できなくなり、かなり手続きが煩雑になるが、簡単のために温度の影響は粒子の占有数にのみ含ませることにする。このとき、粒子 i の粒子数密度と運動エネルギー密度とは

$$n_i = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_i^* kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(\eta_i) \quad (2)$$

$$\tau_i = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_i^* kT}{\hbar^2} \right)^{5/2} F_{3/2}(\eta_i) \quad (3)$$

で関係づけられる。ここで、 k はボルツマン定数であり、 F_α はフェルミ・ディラック積分で

$$F_\alpha(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{\exp(x-\eta)+1} \quad (4)$$

と表わされる。縮退パラメーター η_i は核力相互作用のポテンシャル U_i だけ化学ポテンシャル μ_i より小さい。すなわち

$$\eta_i = (\mu_i - U_i)/kT \quad (5)$$

である。さらに、粒子 i のエントロピー密度 S_i は

$$\frac{S_i}{k} = \frac{5}{3} \frac{\hbar^2 \tau_i}{2m_i^* kT} - \eta_i n_i \quad (6)$$

で与えられる。

次に軽粒子、すなわち電子及びニュートリノは強く縮退している超相対論的な自由粒子とみなせるので、それらのエネルギー密度は (4) 式のフェルミ・ディラック積分を用いて書くことができる。さらに、電子のフェルミエネルギーはクローンエネルギーに比べて、はるかに大きいので、充分に良い精度で電子の空間分布は均質であると近似できる。

3. 液滴モデルによる平衡解

単位細胞内において、核子密度が高い原子核相と低い密度の核子ガス相との 2 相を考え、その各々の相での核子分布は均質であると仮定する。従って、(1) 式の核ハミルトニアンで W の項を落として、これを原子質の質

* 熊本大理 Kenzo Arai: Equation of State for Dense Stellar Matter at High Temperatures

量公式における体積エネルギーに相当するものとみなす。さらに、静止エネルギー、表面エネルギー及びクーロンエネルギーを加え、エントロピーの項を差し引いて、核子 1 個当りの全自由エネルギーの表式を得る。ここで、クーロンエネルギーには有限温度における格子エネルギーも取り込んである。

単位細胞の中で、全核子数一定、全軽粒子数一定、荷電中性及びベータ平衡という束縛条件の下で全自由エネルギーを最小にすれば、平衡解を求めることができる。このことは結局、原子核相とガス相の間での化学平衡及び圧力平衡を満足する解を探すことである。

このようにして得られた結果を図 1 に示す。横軸は密度、縦軸は 10^{10} K を単位とした温度である。破線の左下が原子核と核子ガスとが共存している領域であり、破線の上方では高温のために原子核が溶けて均質な核子ガスになっており、破線の右下方では高密度のため原子核同士がくっついて、やはり均質なガスになっている。この後者の相転移の密度は、いわゆる原子核密度 ρ_N に近く、その値は温度によらず、ほとんど一定である。

核子 1 個当りの軽粒子の数を Y_L として、 $Y_L=0.25$ の場合の断熱線が実線で示されている。線に付随した数値はボルツマン定数を単位とした核子 1 個当りのエントロピーである。核子は非相対論的粒子とみなせるので、断熱線に沿って $T \approx n^{2/3}$ となる。核子ガス相では $n \approx \rho$ なので、ガス相の温度は $T_G \approx \rho^{2/3}$ となる。一方、原子核相では n はほぼ一定に保たれるので、その温度 T_N もほぼ一定になる。すると、密度 ρ が増えるにつれて、 T_G は T_N より高くなってしまふ。従って、熱平衡の条件より、ガス相から原子核相へ熱が輸送されることになる。図 1 の点線は $Y_L=0.35$ の場合の断熱線を示している。電子は超相対論的粒子とみなせるので、断熱線に沿って電子の温度は $T_e \approx n_e^{1/3}$ となり、 Y_L が一定の条件の下では $n_e \approx \rho$ なので、結局、 $T_e \approx \rho^{1/3}$ を得る。従って、電子からの寄与が大きくなれば、密度の増加に伴う温度の上昇はゆるやかになるのである。

図 2 は $Y_L=0.25$ の場合の断熱指数 Γ を密度の関数と

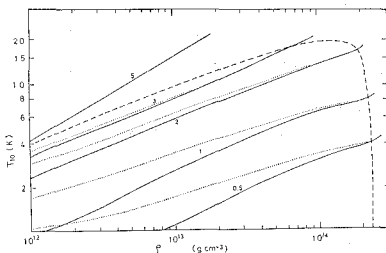


図 1 原子核と核子ガスとの共存領域及び等エントロピー曲線、実線は $Y_L=0.25$ 、点線は $Y_L=0.35$ である。

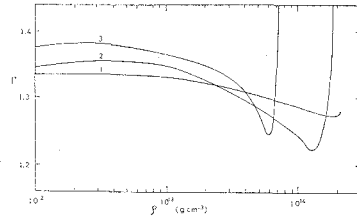


図 2 断熱指数。エントロピーの値を付した各々の曲線は図 1 の実線に対応している。

して示している。密度が低い領域では電子の縮退による圧力が優勢であるために $\Gamma \approx 4/3$ であるが、密度が増えるにつれて Γ は $4/3$ 以下になる。その原因は、前に述べた核子ガス相から原子核相への熱の輸送、及び核ポテンシャルにおける引力項によるものである。さらに密度が増加して、図 1 における破線の位置に達すると、共存相から均質なガス相へ転移することにより、 Γ の値は急激に大きくなる。このことはガス相の温度変化 $T_G \approx \rho^{2/3}$ に加えて、原子核密度 ρ_N 付近では核力の斥力項が効いてくることにもよっている。

よく知られているように、 $\Gamma=4/3$ は安定性を考える上での臨界値なので（一般相対論を考慮すると、この臨界値はもう少し大きくなり、不安定性が起こりやすくなる）、超新星の中心核は $\Gamma \geq 4/3$ の条件を満足する密度に達するまで重力崩壊を続行することになるであろう。

4. トーマス・フェルミ法による数値解

この方法では、単位細胞球の中心から外側へ向けて連続的に変化していく核子分布を扱うので、表面エネルギーやクーロンエネルギーを矛盾なく自動的に計算に取り込むことができるという利点がある。

核ハミルトニアン (1) 式で表面エネルギーの項を含めたまま、全自由エネルギーを最小にする変分を行うと

$$\nabla^2 n_n = c_1 f_n - c_2 f_p \quad (7)$$

$$\nabla^2 n_p = c_1 f_p - c_2 f_n \quad (8)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi e(n_e - n_p) \quad (9)$$

という微分方程式が得られる。ここで、 c_1 と c_2 は数因子であり、 f_i は (2), (3) 式の n_i, τ_i と (5) 式の μ_i 、それにクーロンポテンシャル Φ の関数である。(9) 式はその Φ を決めるポアソンの方程式に他ならない。

粒子数密度の分布が球対称であると仮定して、これらの連立方程式 (7)-(9) を数値的に解くことにする。私達は便宜的にニュートリノの粒子密度 $n_\nu=0$ の極限の場合を調べてきており、まず、その結果から説明しよう。

隣接する単位細胞における核子の密度分布を図 3 に示す。横軸は 10^{-13} cm を単位とした距離で、縦軸は 10^{39} cm⁻³ を単位とした粒子数密度である。温度は $kT=2$ MeV に相当する約 2×10^{10} K に固定してあり、系全体

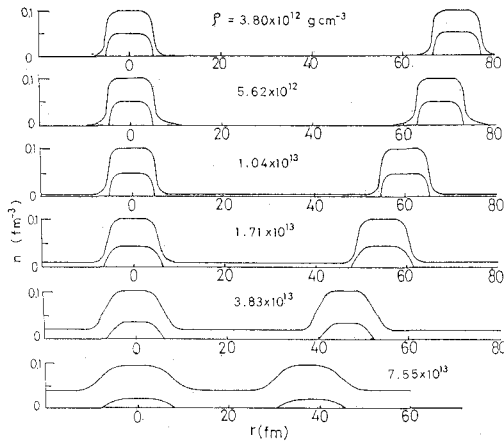


図 3 隣り合う細胞間での中性子と陽子の密度分布

の密度 ρ は上の図から下の方へと増加している。各々の図で上の曲線は中性子の密度を、下の曲線は陽子の密度を表わしている。密度 ρ が増えるにつれて、原子核はお互いに近づいてきており、さらに、ガス相での中性子の密度が増加していることが目につく。一方、前にも述べたように、原子核内での核子の数密度はほぼ一定に保たれていることが分かるであろう。

温度の影響を見るために密度 $\rho = 5.5 \times 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$ に固定したまま、温度 $kT = 3 \text{ MeV}$ と 7 MeV の場合における中性子と陽子の密度分布を少し拡大して図 4 に示す。温度が上昇するにつれて、中心領域での粒子数密度は減少し、矢印で示した原子核の半径が大きくなっている。すなわち、原子核が熱膨張している様子が読み取れるであろう。

原子核の電荷数 Z と質量数 A は密度 ρ にかなり敏感に依存しているが、例えば、図 4 の場合には $Z \approx 40$, $A \approx 1200$ となり、非常に中性子過剰の原子核ができています。もっとも、この図からも分かるように、中性子ガス

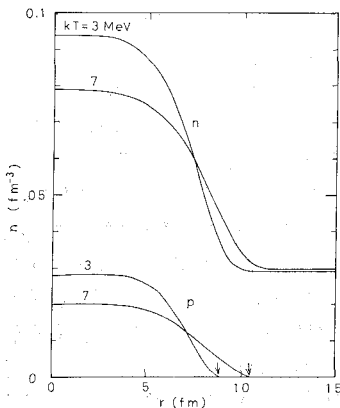


図 4 中性子と陽子の密度分布の温度依存性

の海から突き出ている部分だけに着目すれば、その中に含まれる質量数は約 150 に落ち着くことになる。

これまではニュートリノの密度 $n_\nu = 0$ の場合を考えてきたが、この条件は“天上の出来事”のように理想化しすぎている。実際には、密度が $10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ 以上になると、ニュートリノは原子核と衝突散乱して、系から逃げられなくなってくる。いったんニュートリノが系に閉じ込められ、縮退するようになると、原子核による電子捕獲反応が抑制され、従って、 Z の大きな原子核が安定に存在しうようになる。さらに、電子の密度も増加して、 Y_L の値も大きくなる。

小笠原と佐藤の計算結果によれば、 $Y_L = 0.3$ の場合、密度 $\rho = 5 \times 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$ で、温度 $kT \approx 6 \text{ MeV}$ の時に $Z \approx 300$, $A \approx 900$ という巨大な原子核が形成されている。しかも、原子核からの中性子の落ちこぼれがほとんど起きていないことがこの場合の著しい特徴である。マルコス達は似たような状況の下で、 $Z \approx 160$, $A \approx 500$ という結果を得ているが、これは計算方法が少し異なるためであると思われる。

圧力や断熱指数に関しては、前の液滴モデルの結論から大きくずれることはない。それはこのモデルでも相変わらず縮退電子の寄与が圧倒的に大きいからである。

5. いくつかの問題点

トーマス・フェルミ法は古典的な計算方法であって、ハートレー・フォック法による量子力学的計算の方が信頼度は高いと言える。事実、トーマス・フェルミ法ではスピン相互作用や核子対エネルギーを無視してしまうために、絶対零度の場合においては原子核の殻構造や質量公式の偶奇項を説明することが全くできない。それにもかかわらず、有限温度の場合になると熱的效果が量子効果をおおい隠すようになってくるので、これら2つの異なる方法による結果は驚く程に良い一致を示すようになる。

ただし、1つだけ大きな相違点がある。すなわち、トーマス・フェルミ法では、ただ1種類の原子核を考えてきた。しかし、ボンシェとヴォーテリン (1981, 1982) によるハートレー・フォック法の結果によれば、全自由エネルギーは質量数 A のゆるやかな関数になるので、存在する原子核の質量数にばらつきが生じ、その大きさ $4A/A$ は約 15% にも及んでいる。もしそうになると、種類の半径のウィグナー・ザイツ球を考えることが必要になってくるし、その上に、それらの球の最適な配置までも問題にしなければならないであろう。

次に、これまでは計算の都合上、単位細胞内で核子分布は球対称であると仮定してきた。図 3 から分かるように、密度 ρ が $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ より大きくなると、隣り合

う原子核がお互いに触れ合うようになってくる。そうなる
ると原子核の形は歪みはじめ、球対称の仮定はもはや成
り立たなくなってくる。

ラーベンホール達 (1983), さらに橋本達 (1984) は
絶対零度の場合ではあるが、前に述べた圧縮性液滴モデ
ルの枠組で安定な原子核の形を求めている。その結果に
よると、密度が増加するにつれて、原子核は球形から円

柱、平板と形を変え、さらに、空洞で外側がつまった円
柱孔、次に、気泡のような空洞の球孔になり、ついに
は、均質な核子ガス相へと転移していく。球対称を捨て
去ったトーマス・フェルミ法やハートレー・フォック法
でも類似の結論が得られるであろうか、興味ある問題で
ある。

天 体 観 測 雑 誌

天文ガイド

1月号 定価420円^{〒80} 12月5日発売

昭和60年の各流星群と月齢の関係

駿台学園高校天文台の活躍ぶり

アマチュア天文研究発表大会
下保奨励賞
「にせカークフィルター」川村幹夫さん

初心者向きに「今月の星空のページ」

ハレー彗星に探査機を送るガリレオ計画

世界に名だかい日本の天文アマチュアが、ハレー彗星を
とらえるのは、もう時間の問題。
今年末からいよいよハレー・ブームが始まります。

切りぬく本

万能星座早見 '85'86年版

●企画・構成 藤井旭 予定価690円

天文年鑑1985

●天文年鑑編集委員会編 定価500円

天体観測野帖 '84夏~'86夏

●企画・構成 藤井旭 定価690円

全天恒星図2000

●廣瀬秀雄 中野繁共著 定価2500円

誠文堂新光社

〒101 東京都千代田区神田錦町1-5
電話03(292)1221 振替東京 7-6294

1984年9月の太陽黒点 (g, f) (東京天文台)

1	2,	49	6	4,	17	11	1,	1	16	—,	—	21	—,	—	26	0,	0
2	4,	48	7	3,	10	12	1,	2	17	0,	0	22	1,	3	27	0,	0
3	5,	44	8	4,	7	13	0,	0	18	0,	0	23	—,	—	28	0,	0
4	4,	45	9	—,	—	14	—,	—	19	—,	—	24	1,	4	29	1,	1
5	6,	31	10	4,	4	15	—,	—	20	0,	0	25	1,	3	30	—,	—

(相対数月平均値: 22.5)

昭和59年11月20日	発行人	〒181 東京都三鷹市東京天文台内	社団法人 日本天文学会
印刷発行	印刷所	〒162 東京都新宿区早稲田鶴巻町251	啓文堂 松本印刷
定価 450円	発行所	〒181 東京都三鷹市東京天文台内	社団法人 日本天文学会
		電話 三鷹 31局 (0422-31) 1359	振替口座 東京 6-13595