

天体のカオス現象を調べる

海野和三郎*・浦田健二*

1. はじめに

私たちの天体カオス研究は開発途上なのでカオス学事始めとでも表題をつけようかと思った。しかし、蘭学事始めと決定的にちがう点は、カオス学は一応の発達を上げてからまだ5年かそこらしか経っていないといわれており、まだ今から始めても先端に達するのにあまり日時を要しないことである。同志をつのって氣勢をあげ、楽しみながら成果を上げようではありませんか、というのが本稿の趣旨である。

実は、今年(1984)の春、京都でこの方面の国際研究集会があり、コロンビア大(ニューヨーク)の E. A. Spiegel がやってきて私どもの研究室にも立寄った。私たちが以前から太陽や星の乱対流の研究をしていたので、ちょっと Spiegel に火をつけられた形でカオス学に手を出し始め、8月には野辺山宇宙電波観測所で小グループのワークショップを聞かせてもらった。その後始末の報告書もまだ出していないので、本稿がその代りになってくれれば大変有難いと考えている。

2. カオスとは何か

カオスとは無秩序の混沌のことである。しかし、この頃のカオス屋のいうカオスはどうか少し違った意味に使われているようである。彼等のカオスは決定論的つまり常微分方程式の解のように初期条件を与えればいつまでも解がきままっていく場合に限られ、また、その中のある範囲にある任意の初期値にいくらかでも近い状態が有限時間のうちに再現出来る場合をカオスと表現している。つまりどんな状態も出現するからカオスなのである。これに反し、一寸たった後のことは皆目予測できないノイズ的な振舞はカオスといわずにストカスティックというようである。したがって擬周期的な振舞のカオスがよく研究の対象になるので、カオスとは規則性のある場合というような錯覚をおぼえることになるのである。

以上のことを周波数ごとの勢力すなわちパワースペクトルの上でみるとどういうことになるであろうか。森肇(科学8月号, 1984)によれば、図1(a) 周期的カオス、(b) 間欠カオス (c) 不整合カオスがカオス発生の基本的な3つのタイプをあらわすパワースペクトルである。いずれの場合も針状の線スペクトルの下にでっぴりした連

続的なスペクトルがついているが、これが無限に近い隣りの状態と混然となったカオスの連続スペクトルに他ならない。ただし、連続スペクトル部分がついているだけでは、それがカオスによるのかストカスティックなゆらぎによるのかわからない。ノイズはカオス検出の天敵なのである。線スペクトルの周期の相対的關係や強度比がカオス発生の起源論と合致すればカオスの強い証拠となる。天体カオスが上記3つの類型にあてはまるか、あるいは他のタイプのものがあらわれるかは、いろいろな天体の系に対する数値シミュレーションを多数行って検討する必要があるが、上記のタイプの特性を知っておくと天体カオスを調べる上に大いに参考になるであろう。(a) は水を下から温めたときの対流速のスペクトルである。温め方を少しずつ増すと、初め伝導だけで熱を伝えていた状態から定常対流が生じ、二次元ロール状の対流となるが、ついでロールがのたうつように振動する。さらに振動の周期が2倍のものがあらわれ、こうした周期倍現象がくりかえされる。それから先は急激にカオスが発生し、線スペクトルがでっぴりと幅をもってくる。これが(a)の場合である。(b) は周期現象が時々パーストにより振幅と位相にランダムなとびを起した数値実験のスペクトルである。これについては次節でまた述べる。(c) は同心差動回転円筒内の水の振動運動のスペクトルで、基本的に ω_1, ω_2 の2つの有理比にない周期があり、 $\omega_{mn} = |m\omega_1 - n\omega_2|$ のようなビートの振動が励起されて、それらがカオス化したものである。

カオス現象の研究はこれまで主として数学的モデル、数値シミュレーション、実験室実験で行なわれており、自然界での検出は極めて少ない。天体については皆無といつてよい。しかし、グラニュレーションなど、太陽対流運動、黒点数変動、脈動変光星、X線星、キューサー等の変光には恐らくカオスが伴っているものと考えられる。

3. スペクトル解析の限界

スペクトル解析はたしかに多くの情報をもたらしてくれるが可能ではない。図2は、P. Broglia, P. Conconi, (Aston. Astrophys. 138, 443, 1984) による Y Cam (楯座 δ 型主星の食連星) の B 等級の測光のパワースペクトルである。図1(b) の間欠カオスのスペクトルとの類似に注目していただきたい。一見して、Y Cam に間欠カオスありと早合点してはいけない。実は、観測時間が

* 東大理 Wasaburo Unno and Kenji Urata: On Detection of Astrophysical Chaos Phenomena

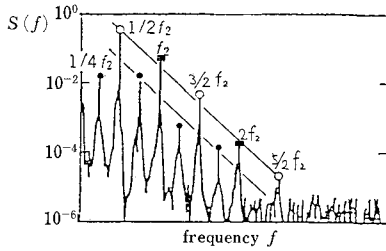


図1 (a) 周期的カオス
水のベナール対流の実験による流速のパワースペクトル $S(f)$ を示す。
基本振動数 f_2 とその高調波 (■ で示す) に、次々と励起された1次の低調波 $\frac{1}{2}f_2$ とその高調波 (○ で示す)、2次の低調波 $\frac{1}{4}f_2$ とその高調波 (● で示す) が連続スペクトルの上ののっている。

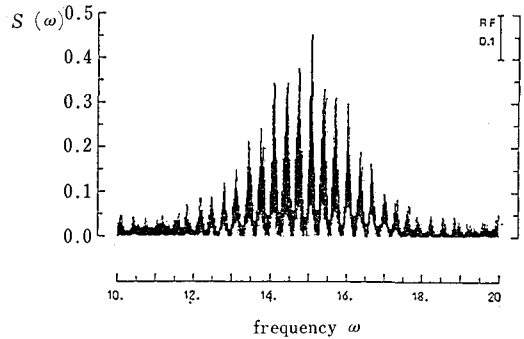
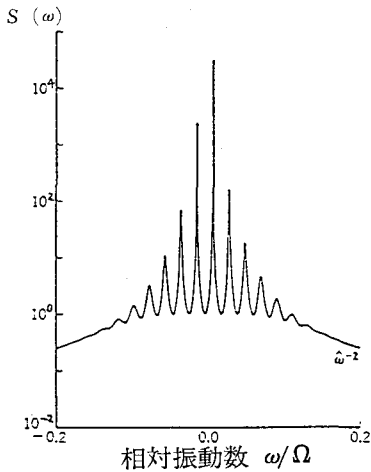
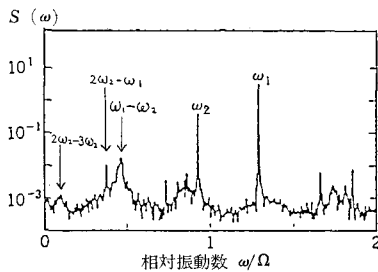


図2 Y-Cam の B 等級の測光によるパワースペクトル $S(\omega)$ 。図1(b) に非常によく似ている。



(b) 間欠的カオス
数値実験により得られた間欠的カオスのパワースペクトル $S(\omega)$ 。
時系列をランダムに切断するバーストがラミナー状態の間にあらわれ、振幅と位相がジャンプするモデル式より得られたものである。



(c) 不整合カオス
水のテイラー渦流の実験による流速のパワースペクトル $S(\omega)$ 。
内軸円筒の回転数 Ω をあげていった時に励起された ω_1, ω_2 ($\omega_1/\omega_2 = \text{無理数}$) の線スペクトルと連続スペクトルがあり、不整合カオスの例である。低調波 $\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1, 2\omega_1 - 3\omega_2$ もあらわれている。

夜に限定されるため約1日の擬周期の窓のスペクトルが重なったのであって、物理的にカオスが存在しているわけではないのである。間欠性は原子スペクトル線に対する衝突減衰のように、分散式であらわされるようなスペクトル線のすそのひろがりを与える。これと1日周期の窓関数のスペクトルとの積によってこのスペクトルはつくられているのである。

このように原因の明確な場合は始末がよい。しかし、例えば、近接連星系で回転と潮汐や環流などがからんで非線形の乱れた力学系をつくっている場合に、観測者の相対位置が回転のために周期的に変るみかけの変動と真のカオティックな振舞の中に回転が関与している部分とを見分けることはスペクトル解析だけでは不可能であろう。もし、みかけの周期変動をとり除く操作をすると、角をためて牛を殺す結果にならないとも限らないのである。したがって、カオス現象の検出に必要なことは、いわゆるストレンジ・アトラクターの特性を見出すことである。アトラクターというのは文字どおり引きつけ役である。安定な平衡状態は、その近傍の初期状態から出発するとエネルギー散逸にしたがってそこへ引きつけられるから相空間内の点は0次元アトラクターである。極限軌道は1次元アトラクター、トーラス面は2次元アトラクターである。幾何学的に2次元のストレンジ・アトラクターがトーラスとちがう点は、いくらでも近いところまで戻ってはくることが、連続的な面をつくることはないことである。山に林があり木があり枝があり葉があり葉毛があるという構造の輪郭を書いた場合には一筆書きで1次元のようであるが、輪郭線は非常に複雑なので、1次元以上2次元以下の中途半端なフラクタル次元をもつことになる。ストレンジ・アトラクターは非整数のフラクタル次元をもつものである。フラクタル次元(ハウスドルフ次元)は次のように定義される。

N 次元位相空間の中の半径 ϵ の N 次元球で、アトラクターのえがく図形をおおうのに必要な球の数を $n(\epsilon)$

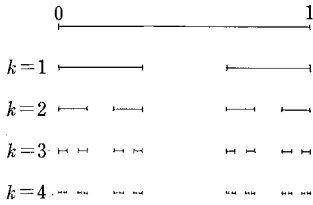


図 3 カントール集合

長さ 1 の線分を考える。3 等分して真中の線分中をまずとり除く。(k=1) 次に残った線分それぞれについてそれぞれ 3 等分して真中の線分をとり除く。(k=2) 以下これと同様のことを無限回くり返すとカントール集合が得られる。カントール集合はフラクタル次元をもつ。

とすると、フラクタル次元 D は、 $D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log n(\epsilon) / \log(1/\epsilon)$ で表わされる。例えば、図 3 に示すカントール集合の場合、真中 $1/3$ を消す操作を k 回くり返した時の線分の本数は 2^k であり、長さは $(1/3)^k$ であるから、 $n(\epsilon) = 2^k$ 、 $\epsilon = (1/3)^k$ で、 $D = \log 2 / \log 3 = 0.6309 \dots$ となる。

カオスの特性を表わすものとしては、フラクタル次元以外にリヤブノフ指数などがある。これについては後に述べる。フラクタル次元やリヤブノフ指数はフーリエ解析のパワースペクトルであらわせない特性であって、系を記述する新しい量であるといえる。これらを決定するには、まず相空間をつくらなければならない。

4. 天体の時間変動の相空間

天体の時間変動が多次元非線型の常微分方程式系、 $dX_1/dt = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n; t)$, $dX_2/dt = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n; t)$, ... で表されるものとしよう。天体の変動は一般に多変数の偏微分方程式で記述されるが、その場合は線型モード解析をして、各線型モードの振幅を X_1, X_2, \dots にとればよいであろう。 n は励起された線型モードの数である。変数 X_2 以下を消去し、 X_1 のみを残すと、 $F(X_1, dX_1/dt, d^2X_1/dt^2, \dots) = 0$ 、となるであろう。この方程式はさらに同値な差分方程式におきかえられるとすれば、或る時間 t での系を記述する量として、 $\{X_1(t), X_1(t+T), X_1(t+2T), \dots, X_1(t+(n-1)T)\}$ の n 個の値を採用しても一般性を失わない。 T の値は数学的には何をとっても同値であるが、実際には T を上手にとることがカオス検出に対して非常に重要である。

上記の $X_1(t_i)$ 以下の n 個の値は、 n 次元空間のベクトルの各成分と考えられ、この n 次元空間が系の状態を表わす相空間である。この相空間が通常最もよく用いられ、次節で述べる白鳥座の X 線星 (Cyg X-1) でもこれを用いる。しかし、上の議論からも明らかなように、相空間の取り方は、 $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ でも

よく、 $\{X_1(t), X_1(t+T), \dots, X_2(t), X_2(t+T), \dots, X_2(t+(n/2-1)T)\}$ でもよいわけである。また、 X_2 の代りに dX_1/dt 又は $\int X_1 dt$ をとってもよいであろう。天体諸現象は 1 秒よりも何桁も小さい短時間から宇宙年齢 10^{10} 年をこす長時間で変動するものまでであろうが、観測的にはあまり短時間の変動は測定できず、あまり長時間の変動は多数の例を統計的に調べて変動の各フェイズを見ることになる。後者の場合はデータが時系列として与えられないので、相空間は $\{X_1, X_2, \dots\}$ 型となるが時刻 t というパラメータ値はよくわからない。このときはカオスの解析は困難であるが、多変数解析として多方面で実用となっている分類の手法が適用できる。

5. 白鳥座 X 線星の時間変動

野辺山ワークショップでは、X 線星の観測データからカオスを検出しようという試みがテーマの 1 つとなった。データは、“てんま”による Cen X-3, Cyg X-1 などの観測を井上 一氏を通じて宇宙研から提供されたものを用いた。パワースペクトル解析は主として米山忠興氏が行ない、カオス解析は正木 功氏が中心となって行

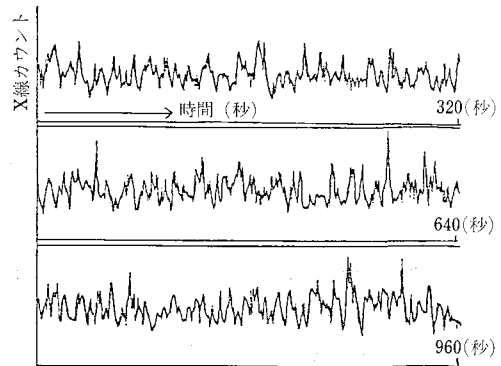


図 4 Cyg X-1 の X 線カウンントの時間系列データ。数秒程度の時間尺度で非常に乱れている。

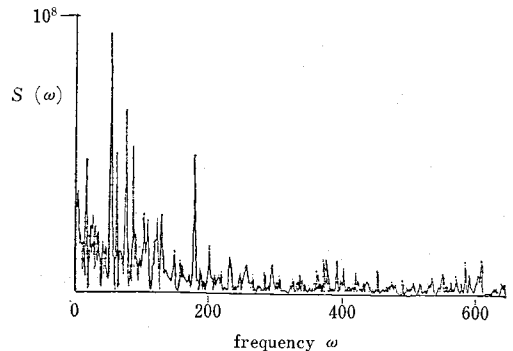
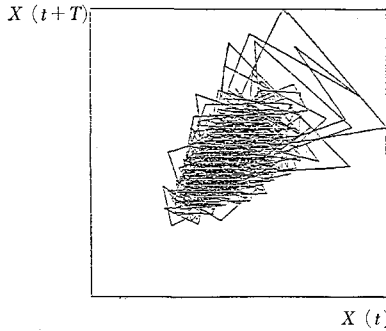


図 5 Cyg X-1 のパワースペクトル。図 4 のパワースペクトルで、非常に多くのピークと連続成分が存在する。

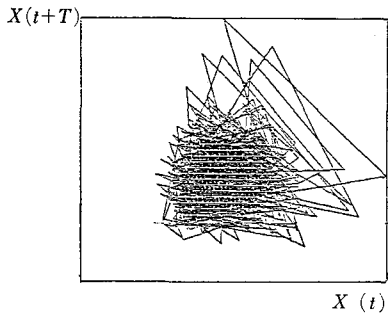
なった。ただし、解析はワークショップでは完結せず、その後もずっと継続して行なわれており、ここで述べる Cyg X-1 の解析も中間報告にすぎない。

Cyg X-1 はブラックホールへの連星の相手方の星から流入するガスがつくる降着円盤のシステムと考えられており、そのX線変動は数秒程度の時間尺度を中心に非常に乱れた変化を示している(4図)。これらの変化は系の自発的な変動によるであろうから、系は高度のカオスにあることは間違いない。それを検出しようというわけである。図5はそのパワースペクトルを示す。比較的に目立つピークの振動数の間の関係を見ると、不整合カオスのシステムがいくつか共存しているようにも見えるが何も確かなことはいえない。カオス解析の結果と比較して再検討する必要がある。

図6(a),(b)はX線カウント数 $X(t_i)$ の2次元マップ $\{X(t_i), X(t_i+T)\}$ (t_1, t_2, \dots は観測時刻) であって、(a)では T が (b) のよりも小さくとってある。 T が小さいと $X(t_i) \approx X(t_i+T)$ の点が多くなり、 45° の線に沿って延びた図形を描くことになる。 T を大きくとりすぎると $X(t_i)$ と $X(t_i+T)$ とが無関係になり、2次元マップをつくる意味が失なわれる。Cyg X-1 の場合は、いずれにしても2次元相空間上の系の変動を描いた軌道



(a) 2次元マップ $\{X(t_1), X(t_1+T)\}$ 。
図4に示した Cyg X-1 の時系列データ $X(t_i)$ を用い、 $T=1$ (秒) として2次元マップをつくるとこのようになる。これは2次元相空間である。

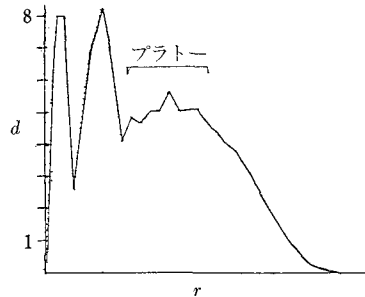


(b) $T=10$ (秒) とした時の2次元マップ。
(a) と比較していただきたい。

図6 相空間の2次元射影

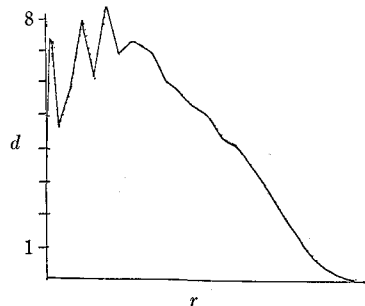
は重なり合いがひどくて図形的な構造はわからない。理由の1つは観測のノイズで、移動平均をとってノイズを押さえても完全に影響を除去できない。しかし、たとえノイズがなくとも、 D 次元のアトラクターを重なりなしに見るには原理的に $(2D+1)$ 次元マップが必要である。もし、Cyg X-1 の変動が幾何学的に5次元(フラクタル次元は $5+\alpha$) のアトラクターをもつならば、11次元マップが必要となるが、紙の上に11次元空間を表現できないのでいたしかたない。図6からいえることは、1次元アトラクターはなく、多分2次元以下の低次元アトラクターもなさそうだということである。

図7はフラクタル次元を求める解析を図にしたものである。相空間は11次元までとって解析したが、この図は8次元の場合である。即ち、 $\{X(t_i), X(t_i+T), \dots, X(t_i+7T)\}$ が t_i という時刻の相空間内の位置をあらわす。観測時刻 t_i は等間隔である。8次元相空間内の2観測点間の距離が r より小さなペアの数が r^d に比例してふえるとすると、もし点が完全にストカスティックなゆらぎで与えられているものならば r を半径とする



(a) Cyg X-1 のデータ(図4)を使って次元 d を求めた図。

r が小さい所ではストカスティックノイズの影響でプラトーはあらわれない。 r が大きいとデータの数が少なくなるので見かけ上 d は減少する。この図では r が中程度の値の所にプラトーがあらわれており、 $d \approx 5.2$ と思われる。



(b) ランダムノイズのデータを使った場合。
データの数や平均値分散は Cyg X-1 のものと同じにしてある。(a) と比べるとプラトーが見られない。

図7 フラクタル次元 d と8次元相空間内の2点間の距離 r とのグラフ。

8次元球の体積に比例してペア数はふえるから $d=8$ である(ただし, r はゆらぎの大きさに比し充分小さいとする). もし点がすべて1次元アトラクターに乗っているとすれば, $d=1$ となる. 7図は横軸に r , 縦軸に d をとったグラフであるが, (a) は Cyg X-1 のデータを解析したもので, (b) は比較のためにストカスティックなゆらぎを乱数で与えてデータとしたものの解析である. データ数や平均的な変動の大きさは同じにしてある. データ数がやや不足であるので結果にゆらぎがあるが, (a) ではまず r の小さいところでは $d=8$ が出ており小変動はX線フォトン数の少いためのノイズであるとみてよいであろう. r がノイズの大きさより大きくなると d は急減し $d=5.2$ くらいのプラトーをつくり, さらに r が $X(t)$ の変動振幅くらいになるとまた急激に d が下る. (b) では r の小さいノイズ部分と r の大きな粗分布部分とは (a) と同じであるが, 中間のプラトーがない. 図7からの結論は, Cyg X-1 の変動には約5.2のフラクタル次元をもつストレンジ・アトラクターがありそうだということである. しかし, なお不確実性があり, 例えば11次元相空間で解析をしても (a) (b) の比較があまり明らかになかったりする. データをふやして再解析を行う必要がある.

6. リヤブノフ指数

フラクタル次元が5.2であれば, 恐らく5つ以上の多数のモードが非線型結合して降着円盤内の変動を支配しているのであろう. それらがどのようなモードであるかは, フラクタル次元を知っただけではわからない. 解析にあらわれたプラトーをつくるペアがどんな時間間隔のペアであるか, それ時間がともにどう距離をかえるかがわかれば Cyg X-1 の本質にかなり迫るものといえよう. N 次元相空間の中に半径 ϵ の球を考え, 時間とともにその球が楕円体にゆがんでいく場合, その主軸の半径を $\epsilon_i(t)$ とすると, リヤブノフ指数 λ_i は

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon(0)} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

雑 報

わし座 1984 年新星

倉敷市の本田 実氏は, 1984年12月2.40日に撮影した“わし座”の写真原板上に, 光度10等級の新星状の像を発見した. なお, 11月29日には該当する位置に, それらしい星像は見つかっていない. その後, 東京天文台木曾観測所の征矢野隆夫氏による確認観測が12月9.37日におこなわれ, 対物プリズムによるスペクトル

であらわされる. ノイズがある場合 ϵ をあまり小さくすることは無意味である. 上に述べたプラトーをつくるペアの間隔の範囲に ϵ をとるのが実際的であろう. ストレインジ・アトラクターのリヤブノフ指数は, 0(軌道にそった方向)以外に少くとも1つは正のものがある. 正のリヤブノフ指数があると接近したトラジェクトリー間の距離は指数関数的に増大するが, トラジェクトリーは互に交わらないことと, アトラクターは相空間のごく限定された一部分であることから, ストレインジアトラクターはコントロール集合のような構造をもつことがわかる. ストレインジアトラクターの特徴は, (1) リヤブノフスペクトル, 上の例の場合は $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, 0, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8]$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0 > \lambda_6 > \lambda_7 > \lambda_8$), (2) 初期条件(相空間内の位置)に鋭敏に依存, (3) コントロール構造, (4) 非整数ハウスドルフ次元である. Cyg X-1 の場合, もっとデータ数をふやさないとリヤブノフ指数を決定する精度は得られないようである.

7. む す び

Cyg X-1 のカオスの構造は相当複雑である. あるいはラビッド・パースターのようなもっとわかり易いものの解析から始めた方がよかったかもしれない. しかし, 何はともあれ, 天体カオスの尻尾がつかまえられたようである. リヤブノフ指数などの決定も今後の課題である. 相空間を定義する変数のとり方もいろいろ工夫してみる必要がある. 更に, 観測データの解析だけではなく, 理論的モデルの数値シミュレーションを行って, そのデータを解析するのが非常に有益であろう. 今後その方面の発展が盛んになっていくものと思われる.

野辺山ワークショップでの共同研究者, 近藤正明, 中野 徹, 正木 功, 米山忠興の諸氏, “てんま”のデータを提供していただいた井上 一氏に感謝する. また, 野辺山宇宙電波観測所はワークショップの sponsor であり, 祖父江義明氏が討論に参加した. この誌面をかりて感謝する.

に輝線が現われていることが確認された. また, 征矢野氏による精測位置は次の通りである.

$$\alpha = 19^{\text{h}}14^{\text{m}}05^{\text{s}}.82 \quad \delta = +3^{\circ}37'55''.4 \quad (1950.0)$$

この新星は, 1978年に本田氏, 1979年に桑野氏によって, それぞれ独立に発見された“こぎつね座新星状天体”を含めると, 本田氏にとって10個目に当る. また, 1936年に五味一明氏により発見された“とかげ座新星”以来超新星を含めて, 日本人による新星, または新星状天体の22個目(本誌3月号の“いて座新星”を加えると23個目)の発見である. (香西洋樹)