「座標系の相対論」のおはなし

福　島　登　志　夫*

むかしむかし

相対論の講義では，たいてい最初の方にローレンツ変換の紹介があります．そこでは「ローレンツ変換とは，四次元時空における回転であって」などという，訳のわかったようなわからないような話を聞いたり，双曲線関数という名の三角関数の従兄弟たちにお目にかかったりします．講義の中で「ローレンツ変換は特殊相対論では重要なのですが，一般相対論では，そうではありません」と教えられて，それではローレンツ変換の一般化が必要なのかしら？　と夢想していると「一般相対論では，一般の座標変換がローレンツ変換にとってかわるのです」といわれて，何か突き放されたような感じになった覚えがあります．「一般」の座標変換ではあまりにも漠然としすぎていて，ローレンツ変換やそれから導かれる特殊相対論での「速度の加法定理」などに感じられた親近感が，今度は少しも持てなかったからです．

座標系と座標変換

座標系についてお話しするはずだったのが，つい，座標変換から話を始めてしまいましたが，実は，この二つは互いに深くかかわりあっているのです．そもそも，座標系というのは，空間（あるいは時空）内の個々の点の位置関係を数量的に表わしたものですが，さて，これを具体的に示すとなると，はたと困ってしまいます．というのも，座標系自身が空間内の「もの」を具体的に，すなわち数量的に表現する道具に他ならないからです．

従って，座標系を具体的に示すには，もう一つ別の座標系（これを背景座標系と呼びます）を借りてきて，その上で，「座標系の原点の軌跡はどうのこうの，座標軸はこれこれの曲線で，座標軸に刻まれた目盛りは云々」などという以外にはありません．このように，ある座標系を別の座標系の中で表現することは，結局，空間内のある点が両方の座標系でどのように表現されるか，すなわち，両者を結びつける座標変換を与えることと全く同じになります．

特殊から一般へ

それでは，この座標系，あるいは座標変換に対する考え方が，どのように変わってきたかを見てみましょう．

表 1　座標系に対する考え方の移り変わり

項　目	ニュートン力学	特殊相対論	一般相対論
時間座標	絶対的	相対的	相対的
空間座標	相対的	相対的	相対的
相対性原理	ガリレイ	特殊	一般
計量	ユークリッド	ミンコウスキー	リーマン
基本座標系	慣性系	慣性系	任意
基本座標系間の座標変換	静的3次元アフィン	ポアンカレ	正則
基底ベクトルの変換行列	3次元直交（回転）	ローレンツ	非特異

表1をごらん下さい．この表は，ニュートン力学，特殊相対論，そして一般相対論となるにつれて，座標系に対する考え方がどう変わってきたかを項目別にまとめたものです．この表を見ると，全体として限定的なものからより一般的なものへ，という傾向がうかがえると思います．例えば，物理法則を表現するのに最も適切である基本座標系は，ニュートン力学と特殊相対論においては慣性系だったのが，一般相対論では任意の座標系となり，その結果として，基本的な座標変換が，時間に依存しない3次元アフィン変換群から，ミンコウスキー時空における平行移動と回転をまとめたポアンカレ変換群，そして4次元リーマン時空における正則な変換全部へと，しだいに拡張されてきたわけです．

ポスト・ニュートン近似

もちろん，こういった傾向自体は好ましいものなのですが，ただ，言葉として「一般座標変換を考えなければいけない」とか「どんな座標系を用いても物理法則は記述できる」というだけでは，話を先に進めるのが難しくなります．

そこで，一般相対論の枠内でも，あまり極端な場合を考えずに，ニュートン力学が正しい範囲をちょっとだけ超えたところでものごとを考えることにします．このような考え方を，例えば，質点の運動方程式においてニュートン力学（万有引力の法則）を最初の近似と考え，その次（ポスト）の近似という意味で，ポスト・ニュートン近似といいます．ポスト・ニュートンの効果は，ニュートン力学そのものの効果に比べて，例えば地球付近で約一億分の一と非常に小さいことが多いので，普通，これ以上近似を進める必要はありません（後に出てくる表3をごらん下さい）．

* 海上保安庁水路部　Toshio Fukushima: Tale of “The Relativistic Theory on Coordinate Systems”

もちろん，ブラックホールの近くのように重力が非常に強いところでは，このような考え方はすぐ破綻をきたしてしまいます．重力が強い場合にはいろいろ難しいことが起きるので，ここから先はポスト・ニュートン近似の枠内で座標系を考えていくことにします．

平行移動と回転

それでは，座標系としてどんなものを考えればよいのでしょう．表2をごらん下さい．これは，天文学で使う主な座標系を，その階層構造に着目して並べかえたものです．ここで気がつくことは，まず，座標系同士の関係が大きく分けて二通りに分かれることです．一つは，ある大きな系に伴う座標系と，その系に含まれる小さな部分系に伴う座標系というように，いわば「親子」関係ともいえるもので，例えば，太陽系座標系と地球座標系の間の関係はその典型といえます．もう一つは，同じ部分系に伴う座標系でも，回転しているものとそうでないものというように，いわば「双生児」関係とでもいうべきもので，例えば，地球座標系と地球固定座標系の間の関係などが，そのいい例といえるでしょう．最後にもう一つ，「兄弟」関係にあたるものとして，地球座標系と火星座標系のように，同じ系に含まれる異なった部分系に伴う座標系同士の関係がありますが，これは，「親子」関係が二回続いたものと考えればよいので，結局，本質的に異なる関係は二種類ということになります．この二つの関係，あるいは座標変換を，ニュートン力学の言葉では，「親子」関係にあたるものを「平行移動」，「双生児」関係にあたるものを「回転」と呼んでいます．従って，まず，一般相対論の枠内で座標系を考える第一歩として，この二つの座標変換のポスト・ニュートン近似を求めることが，当面の目標となるわけです．

表 2

対象	測定手段	座標系
クェーサー	VLBI (超長基線干渉計)	銀河系外座標系
恒星	人工衛星搭載望遠鏡 光電子午環	銀河系座標系
惑星，月	月，惑星探査機 月レーザー測距	太陽系(重心) 座標系
人工衛星	人工衛星レーザー測距 人工衛星VLBI	地球座標系
観測局	地上測量	地球固定 座標系
原子，光	原子時計， レーザージャイロスコープ	実験室座標系

大域的座標系 ⇨ 局所的座標系
非回転座標系 ➡ 回転座標系

フェルミ座標系

しかし，ポスト・ニュートン近似の座標変換を論じる前に，先に述べた「ある系に伴う座標系」とは，どんな座標系かを決めておかなければなりません．まず，回転していない座標系について考えてみましょう．

回転していない場合，ニュートン力学では慣性系が基本的な座標系でしたが，よく知られているように，一般相対論の世界では，広がりを持つ慣性系というものが存在しません．従って，何らかの意味で慣性系を拡張した座標系が必要となります．このような座標系としてはいろいろなものがありますが，なかでも運動方程式など力学的な法則を書き表すのに都合の良い座標系としてフェルミ座標系があります．ここではフェルミ座標系を例にとって，一般相対論における非回転座標系を考えてみることにしましょう．

フェルミ座標系のつくり方は，1) 時間座標軸の設定，2) 空間座標軸の設定，3) 任意の点の座標の計算法，の3段階に分かれます．以下に，地球座標系を例にとって，フェルミ座標系を構成してみましょう．前にも申しましたように，座標系は，それ自身だけでは具体的に構成することが難しいので，太陽系座標系を背景座標系として考えていくことにします．

フェルミ座標系における座標軸の設定

まず，時間座標軸についてですが，そもそも時間座標軸とは，4次元時空で考えて，すべての空間座標が0である点が時間が経つにつれて移動していく軌跡に他なりません．このような軌跡を相対論の言葉で空間原点の「世界線」といいます．地球座標系の空間原点としては地球の重心をとるのが最も自然です．従って地球座標系の時間座標軸は，地球重心の世界線と定義されます．

時間座標軸上の目盛，すなわち，時間座標の単位としては，空間原点（地球重心）に静止している原子時計の1秒，すなわちSI秒をとるのが一見自然のように思えます．このようにして決められた時間は地球重心における固有時といいますが，こうすると，背景とする太陽系座標系では時と場所によってその長さが変化して見えることになり，実用上非常に不便です．これを防ぐには，IAUの最新の勧告にもあるように，背景座標系における時間単位（もしくはその定数倍）をフェルミ座標系における秒として定義するしかありません．

次に，空間座標軸ですが，ニュートン力学の場合をふりかえってみますと，慣性系の座標軸は直線として定義されていました．この場合，直線は2点間の最短経路という意味で使われています．一般相対論の世界ではニュートン力学のときと違って，曲がった時空というものを

考えます．この曲がった時空では，2点間を結ぶ最短経路は，直線でなく測地線と呼ばれるある種の曲線になります．従って，地球座標系の空間座標軸としては，背景として考えている太陽系座標系における測地線とするのが妥当といえましょう．空間座標軸上の目盛，すなわち空間座標の単位としては，上で決めた秒を用いた1光秒あるいは，その299792458分の1のメートルを用いるのが普通です．

フェルミ・ウォーカー移動

さて，これら4本の座標軸は原点において互いに直交していることが望ましいわけですが，測地線であることと直交条件とだけからでは，空間座標軸は一意に決められません．そこにはどうしても空間回転の自由度が入ってくるのです．こう書くと，「回転していない座標系を考えるといっておきながら，回転の自由度を議論するのはおかしい」という声があがりそうですが，実は，一般相対論では，さまざまな「非回転」の定義が考えられています．それに応じて，空間座標軸を決めるのに必要な空間回転の自由度を決定する方式がいろいろあり，そのため，各種の座標系が生まれてくるわけです．この問題については，後で，もう一度ふれてみたいとおもいます．

フェルミ座標系では，空間座標軸の持つべき空間回転は，いわゆるトーマス回転と測地線回転の和であるとしています．トーマス回転とは，特殊相対論の段階ですでに出てくるもので，重力以外の外力により加速度運動を行うジャイロスコープに生じる回転運動です．一方，測地線回転とは，測地線上を動くジャイロスコープが，重力場の影響で遠方の銀河等に対して行う回転運動です．測地線回転は，重力のスカラーポテンシャルによるド・ジッター回転と，重力のベクトルポテンシャルによるレンズ・シリング回転の2つからなり，これらは一般相対論で初めて出てくる効果です．

トーマス回転と測地線回転の説明でおわかりのように，フェルミ座標系の空間原点における空間座標軸のふるまいは，理想化されたジャイロスコープと同じであると考えてよいでしょう．このことを相対論の言葉では，フェルミ座標系の空間座標軸の空間原点における3本の接ベクトル（「空間三脚」と呼ばれます）は「フェルミ・ウォーカー移動」をしている，といいます．

フェルミ座標系における座標の表現

座標軸が設定されたので，いよいよ，任意の点の座標を求めることができます．まず，目的の点から時間軸に「垂線」，すなわち時間軸と直交する空間的測地線を下ろします．目的の点の時間座標は，この垂線の足の時間座標と同じにとります．一方，空間座標は極座標風に設定します．つまり，目的の点の空間座標ベクトルは，この垂線の測地線としての長さ，かける垂線の単位方向ベクトルとして定義されます．垂線の単位方向ベクトルとしては，垂線の足におけるものを用います．このように話が複雑になるのは，垂線すなわち測地線が普通の意味での幾何学的直線でないためです．

注意深い方は，「任意の点から時間軸に下ろせる垂線は一本に限るのかしら」と疑問に思われるかもしれません．実際，時間軸から十分空間的に離れた点では，垂線が一意に決まりません．このことは，フェルミ座標系自体が宇宙を覆うような大域的座標系とはなりえず，その有効範囲がある程度の大きさに限られることを意味しています．しかしながら，この有効範囲は地球座標系の場合で約 0.5 kpc と問題にしている範囲を大きくこえているのが普通なので，あまり必配はいりません．

フェルミ座標系の座標変換

さて，以上述べた3段階の構成法を数学の言葉でいいかえると，フェルミ座標系と背景として考えている座標系を結びつける座標変換式が得られます．仮に，フェルミ座標系における座標を新座標，背景座標系における座標を旧座標と呼ぶことにしますと，この式は時空内のある点について

(旧座標)＝(垂線の足の旧座標)
＋(空間三脚の旧座標表示行列)×(新空間座標)
＋(垂線の直線からのずれ)

という形に書けます．一見すると，新しい時間座標が入ってないようにみえますが，実は，垂線の足と空間三脚を通して旧座標に関与しているので心配いりません．

上式で，第一項は原点の平行移動の部分を，第二項はローレンツ変換と上で述べた空間回転の部分を表わしており，この2項は，ニュートン力学や特殊相対論でも存在した部分です．ここまでは，一般相対論による多少の変更はありますが，概念的には，今までとそう変わらないと思ってさしつかえないでしょう．

最後の項は，フェルミ座標系を導入することによってはじめて付け加えられる項ですが，通常，例えば地球座標系の場合のように，この項自体は他の項の一般相対論的な修正量と比べてもさらに小さい場合が多いので，ここではこれ以上ふれないことにします．

座標変換に伴う物理量の変換

いったん，座標変換式が与えられますと，その座標変換に伴う速度，加速度，重力ポテンシャル，電磁場等の諸量の変換公式，あるいは，運動方程式の変換などは，一般相対論では非常に簡単に得られます．

これは,「物理法則の表現は座標系に依存しない」という一般相対性原理のおかげで,旧座標系において,全ての物理量を4元速度,4元加速度,計量テンソル,電磁場テンソル等のように4元化したあと,その各々に座標変換の変分行列とその逆行列を何回か機械的にかけるだけで,新座標系における表現が得られる仕組みになっています.後は,得られた4次元の公式を見慣れた3次元の形に書き直すだけでよいのです.

回転座標系

非回転座標系についてはこのぐらいにして,次に,回転座標系について考えてみましょう.(ここでは単に回転といえば空間回転を意味することにしておきます.)

一口に,回転座標系と申しましても,ニュートン力学の枠内においてすら,さまざまな回転座標系が用いられています.その数ある回転座標系の中でも最もよく用いられるのが,剛体回転している座標系です.ただし,剛体回転とは回転の角速度が場所に依存しないような回転を意味します.以下では,簡単のため剛体回転座標系だけ考えることにします.

この場合,一般相対論の枠内でも,回転を与える座標変換は,ニュートン力学の場合と全く同じく

(旧時間座標)=(新時間座標)

(旧空間座標)=(回転行列)×(新空間座標)

の形に書けます.従って,剛体回転座標系だけを考える限りにおいては,オイラー角やスピノル等,従来の扱い方をそっくりそのまま踏襲することができます.もちろん,回転座標系に移ることによって生じる速度,加速度などの諸量の変換や,運動方程式などの変換もニュートン力学の場合と全く同じであることは言うまでもありません.

こう書くと,平行移動の場合と比べてあまりに容易なので不審に思われるかもしれません.実は,回転がこう簡単に定義できる理由は,難しい変換のところを平行移動の方に全部押しつけているからなのです.実際,ここでいう「回転」とは,平行移動の方で定義したフェルミ座標系での「非回転」を基準として相対的に評価される状態なのです.

固有座標系と自然座標系

上でみたように,平行移動の部分を分離すると,回転はごく簡単に扱うことができます.一般に両者をミックスした座標変換を考えるときは,お互いの間を平行移動だけで移り変わるような座標系,例えばフェルミ座標系,とは別の座標系の概念が必要となります.相対論では,フェルミ座標系に剛体回転を施して得られる座標系を固有座標系と呼んでいます.固有座標系の物理的イメージとしては,地球などのように時空内を自転しながら運動する物体に固定した座標系を想像してもらえればよいと思います.

すでにおわかりのように,固有座標系は物理的イメージも明確で,力学理論を構築するのに都合のよい座標系なのですが,天文学者,特に観測にたずさわる人々からみると,不満な点がひとつあります.それは,固有座標系においては,背景座標系で静止してみえるものが,測地線回転とトーマス回転の分だけ回転してみえるという点です.

実際に,クェーサーなどをVLBIで観測して,精密な座標系を作ろうとする場合,この微小ではあるが,永年的な項も含む測地線回転などは,非常にいやらしい因子となります.これをさけるために,位置天文学においては,固有座標系の持つ「非回転」の意味を少し修正した座標系(自然座標系と呼びます)を用いるのが適切です.厳密にいえば,「非回転」自然座標系とは,フェルミ・ウォーカー移動する空間三脚のかわりに,その空間部分を対称化したものを用いて,後はフェルミ座標系と同じようにして定義される座標系を指します.回転している自然座標系は,この「非回転」自然座標系に,剛体回転を施したものとして定義されるのです.

相対論的効果の大きさ

いずれにしましても,ポスト・ニュートン近似の一般相対論において,実用的な座標系を導き出す座標変換式は,全く任意の座標変換というわけではなく,特殊相対論における平行移動とローレンツ変換(空間回転も含む)を組み合わせた,いわゆるポアンカレ変換,を少しばかり修正したものであることは,納得いただけたかと思います.特殊相対論における変換との差,すなわち一般相対論的効果の大きさは,背景となる座標系と考えている座標系のそれぞれがどういう物体の系に付属するかによって,いろいろと変わります.

表3は,表2に挙げたいろいろな系について,個々の座標系における相対論的効果のおよその大きさを表にし

表3　相対論的効果の大きさ

系	大きさ (AU)	質量 ($M_\odot$)	特殊相対論	一般相対論
	R	M	$\sqrt{\dfrac{GM}{c^2R}}$	$\dfrac{GM}{c^2R}$
銀河系	2×10^9	10^{11}	7×10^{-3}	5×10^{-7}
太陽系	1	1	10^{-4}	10^{-8}
地球	6×10^{-5}	3×10^{-6}	2×10^{-5}	5×10^{-10}

G は万有引力定数,c は光速度である.

たものです．表中の数字は，ニュートン力学の近似を 1 としたときの各効果の大きさを相対的に表わしたものです．例えば，地球近傍の太陽系における相対論的効果のうち，特殊相対論に起因する光行差の大きさは，

10^{-4} ラジアン　～　角度の 20 秒

のオーダーであり，一般相対論で出てくる空間座標軸のなす角度の 90 度からのずれの大きさは，およそ

10^{-8} ラジアン　～　角度の 0.004 秒

程度というように簡単に評価できます．

おわりに

「座標系」とか「単位系」は，誰しも，ふだんあまり気にしないで使っていますが，一度その本質を考え始めると，非常につかみどころのない，「ぬえ」みたいな概念だということが，よくわかります．ここでお話したことに関連する分野，すなわち，一般相対論の位置天文学における応用は，一般相対論の発表後，ごく最近になるまで進展することがありませんでした．

アインシュタインは，このわかりにくい座標系，あるいは座標変換に正面から取り組むことによって，相対性理論という宝物蔵の扉を開けたのですが，後世の人々は，蔵の中のブラックホールや宇宙モデルなどの財宝に見とれるばかりで，扉を開けるのに使った一般相対性原理という鍵の，別の使い道を考えるひまが，いままであまりなかったのではないでしょうか．

訂　正

天文月報第 78 巻 11 号の新田氏記事のうち下記の部分を訂正いたします．

p. 308 の題名（英語）

Microwave Emission Solar Flares
—from the Analysis Flux Time Variations—

→ Microwave Emission in Solar Flares
—from the Analysis of Flux Time Variations—

p. 309　右側　l. 9　　そ，こまで　→　，そこまで

p. 310　図 5　　左側が (b) で　右側が (a) です．