膨張宇宙における密度ゆらぎの非線型成長

中 村 卓 史*

1. 重力，三次元，そして非線型

宇宙は約 100 Mpc 以上のスケールでは一様等方で $\bar{\rho}\sim 10^{-29}$ g/cm^3 の平均密度を持っている．しかし，100 Mpc 以下のスケールでは，大きいものから順に超銀河団—銀河団—銀河—星団—恒星—コンパクト星（白色矮星，中性子星，ブラックホール）等の種々の構造がある．スケールによる系列は，ほぼ密度 ρ による系列にもなっていて，超銀河団の $\rho\sim 4\bar{\rho}$ から中性子星の $\rho\sim 10^{45}\bar{\rho}$ にまでわたっている．

一方，3K 宇宙黒体輻射の非等方性の観測によると，宇宙黒体輻射には生のデータですら 0.1% 程度の小さなゆらぎしかない事が明らかにされている．(データ解析からは，もっと小さい上限値が出ている.) これは単純に考えると，銀河等の構造が生じる以前の宇宙には，せいぜい 0.1% 程度の密度のゆらぎしかなかったことを意味する．

平均密度の 10^{-3} 倍以下の小さなゆらぎから，平均密度の 10^{45} 倍に至るまでの大きなゆらぎが宇宙の進化によって生じたわけであるが，その進化をドライブした相互作用は，主に何なのであろうか？ 自然界には 4 種類の相互作用 1) 強い相互作用，2) 弱い相互作用，3) 電磁相互作用，4) 重力相互作用があると言われている．そして，4 つの相互作用は，全て宇宙の進化に関わっているが，宇宙における密度のゆらぎの成長を押し進めているのは主に重力と考えられる．重力は逆二乗則に従う引力であり，その第 1 の特徴は長距離力であるということである．例えば強い相互作用では，10^{-13} cm という特徴的な長さがあって，それより遠い所では，実質上，力は働かないのに対して，重力には，特徴的な長さはない．一方，電気力も逆二乗則に従うが，電気力の場合には，物質が大局的には中性であるため，実際上はデバイ半径までだけが逆二乗であって，それ以上では，強い相互作用と同じように急激に減少する．即ち重力の第二の特徴は，電気のように中性化ということがないということである．重力の持つ 2 つの特徴は，結局遠い所からの寄与も重要であることを意味する．重力が関係したとたんに問題を局所的に取扱うことは不可能となり，常に大局的(非局所的)に考える必要がある．この点が重力の問題の難かしい所である．

さて重力によって小さなゆらぎから生じた構造は，どのような形をしているのだろうか．例として図 1 に，我々の近傍 $\sim$(100 Mpc)^3 の密度分布を示す．図 1 での立体図形は 1130 個の銀河の観測データを基にして密度が平均密度の 4 倍以上の部分を表している．我々の銀河は左下に位置している．全体的な印象は「塊と細長い物が網の目の様にごちゃごちゃと繋がっている」と言ったものであろうか．なかなか表現しにくい形をしているが，とにかく重要な事は立体図形は球対称（一次元的）でも軸対称（二次元的）でもなく三次元的であるということである．一方，銀河や星など第一近似として，軸対称とか球対称が良い構造もある．しかし，これらの構造間の関係は軸対称でも球対称でもない．例えば，二重星や三重星がそのよい例である．つまり宇宙の諸構造の形状は基本的には如何なる対称性も持っておらず本質的に三次元的なのである．

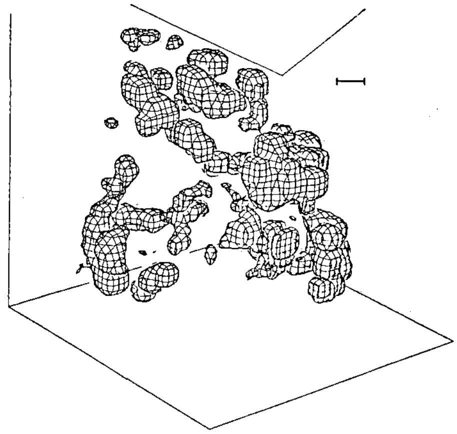

図 1 我々の近傍 (100 Mpc)^3 での，平均密度の 4 倍の密度の面．右上の棒が 10 Mpc を表す．(C. F. Frenk, S. D. M. White and M. Davis, Ap. J. **271** (1983), 429 の Fig. 6 より)

それでは本質的に三次元的な宇宙の諸構造は如何にして形成されるのだろうか？ 何がそれぞれの形成過程の決定因子であろうか？ 例えば巨大分子雲から星が形成される過程を考えてみよう．ガスの圧力，回転，磁場，乱流等いくつか挙げることが出来るだろう．しかし，いろいろな効果を全部考えることは問題の本質を判りにくくする可能性がある．どうしても必要なもの以外を順に取り除いて行くと，基本的に重要な物理過程が明確にならないだろうか？ 分子雲が重力崩壊して星が出来るという事は，重力がガスの圧力に勝った結果なのだから，ガスの圧力は基本的には二次的なものではないだろうか．他も同様にして考えて行くと，どうしても取り除け

* 京大理 Takuji Nakamura: Nonlinear Growth of Density Perturbation in Expanding Universe

ないものは，分子雲中にあった小さな密度ゆらぎが重力によって非線型段階にまで成長して三次元的な構造を形成したということであろう．つまり，キーワードは「重力，三次元，非線型」ということになる．

2. 膨張宇宙における密度ゆらぎの非線型成長

宇宙における他の構造の形成に対しても多くの場合やはり「重力，三次元，非線型」と言う3つのキーワードが重要と考えられる．中でも純粋にこの3つのキーワードで特徴ずけられるのが膨張宇宙における密度ゆらぎの非線型成長問題である．プラズマが中性化した以後の宇宙ではジーンズ質量は十分小さいので（$\sim 10^6\,M_{\odot}$）ジーンズ波長より大きい構造の形成を論ずる時には，圧力がゼロというのは十分良い近似になる．ニュートリノ等のダークマターを考えても，宇宙の大構造を問題にする限り同様である．又，宇宙の半径より小さな波長のゆらぎを問題にするならば，一般相対論の効果は考えなくてよい．このような場合，流体近似をすると，現象を支配する方程式は，

$$\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})=0 \qquad (1)$$

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial t+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla\phi \qquad (2)$$

$$\Delta\phi=4\pi G'(\rho-\rho_0) \qquad (3)$$

と書くことが出来る．ここで，$\rho, \boldsymbol{v}$ は共動座標系での物質の密度と速度であり ρ_0 は平均密度である．又，G' は重力定数 G と $G'=G/(1+z)$（z はレッドシフトで，宇宙のスケールファクター $a(t)$ と $(1+z)=a(0)/a(t)$ で結ばれている.）(3) 式の右辺の空間平均はゼロであるから，この系は言わば，電荷が時間と共に増大するプラズマ系と見なせる．ニュートリノ等のダークマターを考えるならば，(1), (2) 式の代りにブラソフ方程式を使うことになる．

3. 数値計算法

膨張宇宙における密度ゆらぎの成長を初期値問題として解く方法は大きくわけて2つある．すなわち

A) N 体計算法

B) 粒子－メッシュ法　の2つである．

A)に関しては藪下 信氏による解説が1984年8月号にあるので，ここでは省略するが，N体法の1つの特徴は粒子間の重力を直接計算するので計算時間が N^2 に比例するため，せいぜい数千個の粒子で，宇宙を表現しなければならない点である．又，N体の存在する領域の外にも本当は物質があって，N体が球対称でない限り外の物質は中の影響を受け，その反作用として，中にあるN体の運動が変化するのだが，その効果が入っていないというのも特徴である．

B) では，宇宙が無限個の周期的な立方体の細胞からなるとする．したがってN体法のような境界の問題は起らない．まず各細胞を $(32)^3\sim(64)^3$ 程度の格子に切る．次にこの格子とは独立に，3万から100万個の粒子（又は雲）を置く．これらの粒子によって流体系（(1)～(3) 式）又は，無衝突粒子系（ニュートリノ等のダークマター）を表現しようとするわけであるが，具体的な計算方法は以下の通りである．

① 初期の密度ゆらぎを再現するように粒子を配置する．

② 各格子に何個の粒子が属するかを数えることによって密度分布を知る．

③ 密度分布をもとにして，高速フーリエ変換 (FFT) によって格子点での重力を計算する．

④ 各粒子の点は格子点とはふつう一致しないので，各粒子に対する重力は，格子点での重力を内挿することによって求める．

⑤ 運動方程式を使って，次の時刻での粒子の位置と速度を決定する．

⑥ ②～⑤を繰返す．というものである．

この方法の特徴は格子点の総数をNとすると，重力計算に高速フーリエ変換を使っているため，計算時間が $N\log_2 N$ にしか比例しないという点である．このおかげで，N体法よりも多くの粒子（$\lesssim$100万）を用いることが出来る．しかし，格子を使っているため，近距離での重力の精度は，直接に重力を計算しているN体法に較べると良くない．最近この難点を改良する方法として，(粒子－粒子)－(粒子－メッシュ) 法 (P^3M 法) をフレンク達は使っている．この方法では，ある特定の粒子に対する他の粒子による重力を計算する際に，近くの粒子に対しては，N体法のように直接に計算するが，遠くの粒子に対しては高速フーリエ変換を使って，内挿をするというもので，N体法と粒子－メッシュ法の折衷になっている．

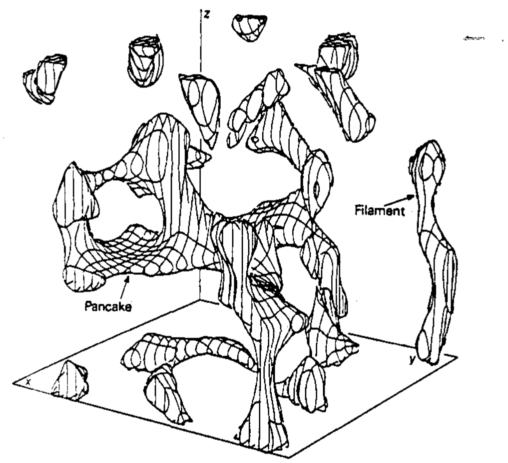

図2 粒子－メッシュ法による3次元シミュレーション．立体図形は平均密度の2倍の面を表している．(J. Centrella and A. L. Melott, Nature **305** (1983), 196, Fig. 1 より)

粒子 - メッシュ法によって膨張宇宙における密度ゆらぎの三次元的成長をはじめて計算してたのは，セントレラとメロット (1983) である．格子数は $(32)^3$ で，粒子数は $27\times(32)^3=89$ 万であった．初期の密度ゆらぎのスペクトルは $|\delta_k|^2\propto k$ （ここで $\delta_k=\int\delta\rho e^{ikx}d^3x$） で，高い k に対してはカットオフを設けており，これは質量のあるニュートリノが卓越した宇宙モデルに対応すると考えられる．図 2 がその計算例で，密度が宇宙の平均密度の 2 倍の面を表している．図 1 のようにヒモ状の構造が多く見られる．個人的な話になるが，筆者は 1982 年 12 月にテキサスのオースチンで開かれた第 11 回テキサスシンポジウムのポスターセッションで，この図をはじめて見たが，強烈な印象を受けた事を覚えている．日本に帰って，さっそく同じようなコードを作って，図 2 に似た結果を得た．

セントレラとメロット以後何人かの人々が同様の 3 次元計算を行って，いくつかの銀河形成に対する示唆を与えているが，最近粒子 - メッシュ法による計算法の信頼性について重大な問題提起がブーシェ達によってなされているので，次にこれを紹介したい．

4. 数値計算法の信頼性

数値シミュレーションの結果が信頼されるためには，そのコードがいくつかのテスト問題に合格する必要がある．ブーシェ達は，この目的のために，問題を二次元に限り，$(64)^2\sim(512)^2$ という大変細かいメッシュを用いて計算した．膨張宇宙における密度ゆらぎの成長は，線型段階では，どんな波数に対しても宇宙のスケールファクター $a(t)$ に比例して増大することが知られている．したがって，線型段階では，任意のスペクトルは，振幅が増大するだけで，同じ形のままのはずである．ブーシェ達は初期のスペクトルとして特に白色雑音スペクトル ($|\delta_k|$ ＝一定) を与えた．$|\delta_k|$＝一定（ただし一定値はスケールファクター $a(t)$ に比例して増大）のままで時間発展するはずであるが，シュミレーションの結果はそうはならなかった（図 3)．図 3 では宇宙のスケールファクター a が 1 から 6.3 倍になった時の $k|\delta_k|^2$ を k に対して書いている．今の場合 k の単位は $2\pi/L$ （L は細胞の一辺の長さ）であるので，k の最大値は 256 である．白色雑音スペクトルに対しては，$k|\delta_k|^2$ は直線になるべきであるのに，k が 50 あたりから，大きく直線からずれている．このずれは，数値計算法に対する理論解析からの予想とも合致しており，結論としては，波長が 6 格子間隔以下のモードに対しては，粒子 - メッシュ法は，線型段階ですら，答がおかしい．つまり成長は，人為的に抑制されてしまう．それでは，非線型段階になれば短い波長のモードも大丈夫かと言うとそうではない．図 4 に一次元の場合の解析解（点線）と数値解（実線）との比較を格子数 64 に対して示す．やはり 6 格子間隔以下では，成長が過小評価されていることがわかる．これらの事実は，粒子 - メッシュ法では，短いスケールの構造は信用できないという可能性を示している．フレンク達の P^3M 法はどうかと言うと，まずブーシェ達のような線型段階のチェックは行なっていない．したがって信用度は不明であるが，フレンク達の場合では粒子数は格子数と同じかそれ以下であるので，事情はそんなに変わらないと思われる．又，一次元の解析解（非線型段階でも正しい.）との比較では，4 格子間隔以下のモードに対しては，非線型段階で，23%～100% の誤差が生じている．したがって，2 粒子の間の重力が粒子 - メッシュ法より正確だからと言って，基礎方程式を忠実にシュミレートしているという保証はないのである．これは，次の事実とも関係している．例えば，計算上の立方体の細胞の一辺の長さを 100 Mpc とすると，粒子 1 ケの質量は銀河質量 ($\sim10^{44}$ g) 程度になり，これはニュートリノ等のダークマター 1 個の質量 ($\sim10^{-32}$ g) や水素 1 個の質量 ($\sim10^{-24}$ g) とは 70 ケタ程度違う．したがって，3 万～100 万の粒子で宇宙をシュミレートしようとすれば，2 粒子間の重力の改良だけでは済まないと考えられる．

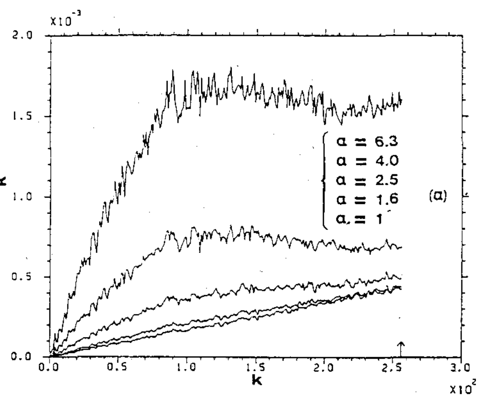

図 3　線型段階での白色雑音ノイズの時間発展．(F. R. Bouchet, J. C. Adam & R. Pellat, A&Ap. **144** (1985), Fig. 6 より)

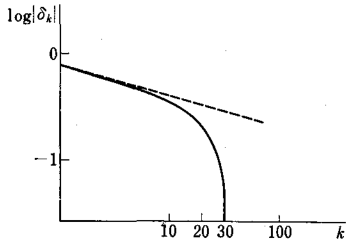

図 4　一次元の場合の厳密解（点線）と数値解（実線）との比較．格子数は 64 で，許される最高の波数は $2\pi/L$ (L は，周期の長さ）を単位として 32 である．

5. 密度の発散の次元と相関関数

前章で今までのシュミレーションは短いスケールでの結果の信用度に疑問があると言ったが，膨張宇宙におけ

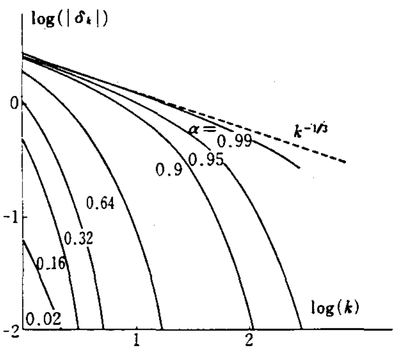

図5 一次元の時の$|\delta_k|$の時間発展.（T. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **73** (1985), Fig. 2 より）

る密度のゆらぎは，非線型段階になると密度が加速的に増大しついには発散が生じる．これは，圧力がゼロという近似をしたために重力崩壊を止めるものがないからである．実際は，物質には圧力があるし種々の輻射過程を考える必要があるが，第1近似としては，密度の発散が生じると見なすことが出来るだろう．この密度の発散の仕方については，ほとんど解析的にいくつかの事を言うことが出来る．まず一次元的な崩壊を考えてみよう．この時には，(1)～(3) 式は解析的に解けて，

$$x=q+\alpha S(q)\,, \tag{4}$$

$$\rho=\rho_0/(1+\alpha\cdot dS(q)/dq) \tag{5}$$

となる．ここでqはラグランジ座標で，αは初期の振幅と宇宙のスケールファクターに比例しており時間と共に増大する．Sはqの任意函数で，初期のゆらぎの形を表している．今 $S=\sin q$ とすると，(5) 式からわかるように，$\alpha=1$ となった時に，$q=\pi$ で $\rho=\infty$ となる．この時ρのフーリエ変換 δ_k を計算してみると図5の様になる．すなわち $k^{-1/3}$ というパワー則に従う．これは発散点の近くで密度が $x^{-2/3}$ で発散していることによる．次に軸対称な場合を考えてみる．この時には，解析的には解けないが簡単な数値計算と準解析的な分析によって，密度は $R^{-1.25}$ で発散し，δ_k は $k^{-0.75}$ に比例することがわかる．球対称な場合も同様の議論が出来て発散の生じる時，密度は $V^{-12/7}$ で発散し $\delta_k\propto k^{-9/7}$ となる．一次元的か軸対称的か球対称的かによって，生じる発散の形状は三次元的には，それぞれ面，線又は点になる．

さて，一般にパワー則に従う物理に対しては，特徴的な長さがないと言われる．上の一次元の例では（図5）$\alpha<1$ までは $k_c=(1-\alpha)^{-3/2}$ という所で δ_k は急に折れ曲がって，$\lambda_c(\equiv k_c^{-1})$ より短い波長に対しては，δ_k は実質上ゼロである．すなわち特徴的なスケールがあった．ところが $\alpha=1$ になったとたんに $\delta_k\propto k^{-1/3}$ となって，δ_k はどこまでも続くことになった．すなわち特徴的なスケールがない．あるいは，$\lambda_c=0$ ゆえ特徴的なスケールはゼロになったと言える．さて，$\alpha=1$ の時には，$q=\pi$ で $\rho=\infty$ となったことを考えてみると，逆に δ_k がパワー則であるという場合に，その系には発散が生じているという図式が成立するという仮説を立てることが出来る．

さて，銀河‐銀河及び銀河団‐銀河団の相関関数は $r^{-1.8}$ 則に従うことがよく知られている．相関関数はパワースペクトル($|\delta_k|^2$)のフーリエ変換であるので，$r^{-1.8}$ 則は $|\delta_k|\propto k^{-0.6}$ のパワー則を意味する．上の仮説が正しいとすると，これは発散の存在の反映となる．又，発散のトポロジーが面，線，あるいは点かによって$|\delta_k|$はそれぞれ $k^{-1/3}$, $k^{-0.75}$ 及び $k^{-9/7}$ になった事を考えてみると，現実の宇宙の大局的構造の発散の仕方は，線に近い線と面の中間という事になる．ところで，トポロジカルな次元と異なる次元を持った集合をフラクタルと呼んでいるが，相関関数からはマンデルブローが言っているように銀河分布がフラクタルだとすると，そのフラクタル次元は 1.2 となり，やはり線に近い．

6. 今後の課題

1970 年代に等温ガス雲の回転軸対称重力崩壊のシュミレーションが星の形成問題と関連してラーソンをはじめとして多くの人によってなされた．その時，剛体回転，一様密度という同じ初期条件にも拘わらず人によって定性的にも結果が異なった．多くの論争があり，現在では答は収束していると考えるべきだろうが，この時の経験は大変重要である．結果を分けた大きな点は，角運動量の保存である．軸対称系では，流体素片の角運動量は，どんな流体素片を取っても厳密に保存する．しかし，オイラー法で数値計算をすると一般に保存しない．多くのコードは，全角運動量の保存のチェックはしたが，各流体素片の角運動量の保存のチェックをしていなかったために，定性的にも正しくない結果を出してしまった．

さて，膨張宇宙におけるゆらぎの非線型成長の問題は2章で述べたように，重力収縮の本質を知る上で，純粋な問題でそれゆえ大変重要と考えられる．又5章で述べたようなフラクタル構造の起源というような問題とも関係しているが，ブーシェ達による指摘は，等温ガス雲の軸対称回転重力崩壊のシュミレーションにおける角運動量の局所的な保存問題に対応している可能性がある．重要な結論を引き出す前には，可能な限りのコードチェックそれも大局的な全エネルギーの保存と言ったものではなく，局所的なコードのふるまいのチェックが必要であろう．さらに，問題への異なったアプローチも必要である．実際$\boldsymbol{k}$空間で方程式を解く方法や，ブラソフ方程式を2次元，3次元で解く方法も追求されている．異なった方法で同じ問題を追求する事は問題の本質を鮮明にしてくれる可能性がある．又，物理を理解するためには，モデル化や解析解の追求も必要である．いずれにしても問題は未解決で，まだまだこれからだと思っている．