

粘性流体中を運動する天体の受ける抵抗

武 田 英 徳*

1. まえがき

天体现象の一つの大きな特徴は、天体による重力がその現象に強い影響を与えることが多いということである。流体中を運動する物体のまわりの流れの様子や、それに働く抵抗の大きさも重力の強さによって大きく変えられる可能性がある。実は、この抵抗の大きさを知ることが、原始太陽系における惑星形成の速さを推定するのに必要なのである。林 (天文月報 70 巻 1 号), 中沢 (天文月報 72 巻 1 号). そこで、ガス中を運動する天体の受ける抵抗の大きさを数値計算で求めることを行っているが、その結果の一部を、特に「重力が物体まわりの流れをどのように変え、又重力の強さと物体の受ける抵抗の大きさの関係はどうであるか」という点に力点を置いて述べる。

ここで考えている天体 (原始惑星) の特徴的大きさは、質量 $M_* \sim 10^{25}$ g, 半径 $r_0 \sim 10^8$ cm である。主に水素分子から成る原始太陽系星雲のガスは密度 $\rho_0 \sim 10^{-9}$ g/cm³, 音速 $c_s \sim 10^5$ cm/sec (温度 $\sim 100^\circ$ K) である。レイノルズ数 Re は分子粘性を用いれば極めて大きい値となるが、現実には高粘性等によりそれ程大きくはならないであろう。又、高レイノルズ数の流れを時間平均したものは、低レイノルズ数の流れによってシミュレートできるという事実もあるので、ここでは比較的低レイノルズ数 ($Re=20, 50, 200$) の流れを、特にその抵抗の大きさが重力によってどのように変わるかについて述べる。

2. 数値計算

問題を簡単にするために天体は完全な球とし、以後天体とともに運動する座標係で考える。即ち、ガス流中に球状の天体が静止していると考え (図 1 (a)). ガスは天体から十分離れたところで一様で、密度 ρ_∞ , 速度 u_∞ ($v_\infty=0$), 音速 c_∞ で流れて来るとする。流れは軸対称であると仮定し、次の方程式 (円柱座標で書かれている) を解く。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f^x \\ \rho f^r \\ \rho(u f^x + v f^r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_x \\ V_r \\ V_E \end{bmatrix} \quad (1)$$

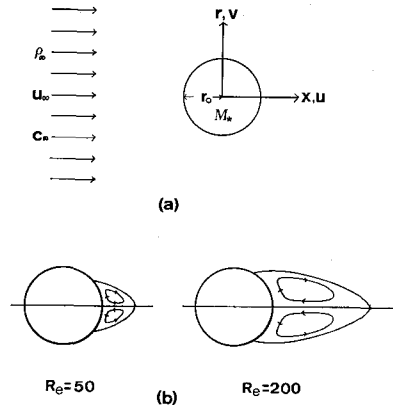


図 1 (a) 概念図
(b) 球の後の渦

ここで ρ は密度, u, v は x, r 方向の速度, p は圧力, e は単位体積当りの内部エネルギーである。 f^x, f^r は、天体がガスに及ぼす重力の x, r 方向成分で、 $f^x = GM_* x/R^3, f^r = GM_* r/R^3$ ($R = \sqrt{x^2 + r^2}$) である。右辺は粘性や熱伝導を含む項である。ガスは比熱比 $\gamma = 1.4$ の理想気体とする。

数値計算は、空間を多くのメッシュに分割し、上式を差分化して行うが、重力の影響は遠方にまで及ぶ為に計算領域は十分大きくとらねばならない。又、物体表面近くには厚さが $Re^{-1/2}$ に比例する境界層ができるゆえ表面に近いところではメッシュを細かくせねばならない。そこで計算のタイムステップを大きくとることのできる陰的解法を用いた。物体まわりのメッシュ点は簡単のため球座標を用いた (例えば、 $(\Delta R)_{\min} = 0.03, R_{\max} \approx 300r_0$). 物体表面上の速度は粘性のため $u=v=0$ である。

重力は、 f^x, f^r に例えば、 $\exp\{-(R/100r_0)^2\}, \exp\{-(R/200r_0)^2\}$ をかけてある。即ち、 $100r_0, 200r_0$ で重力をカットしている。重力の強さを表わすパラメータとして $\Gamma = \frac{GM_*}{r_0} / u_\infty^2$ を用いる。これは物体表面での重力エネルギーと入射ガスの運動エネルギー (の 2 倍) との比である。

数値計算は、各 Γ の値に対して時間を追って、抵抗値が一定の値に収束するかあるいは周期的に振動するまで続けた。 $\Gamma=0$ の場合、数値計算で得た抵抗値は実験結果とよく合う。

$\Gamma=0$ の場合、 $Re=20$ という値は、球の後ろで流れが剥離し渦が発生するかどうかのほぼ臨界のレイノルズ数である。これより Re が大きいと、物体後方で流れが剥れ、

* 京大工 Hidenori Takeda: Drag on a Gravitating Sphere Moving through a Gas.

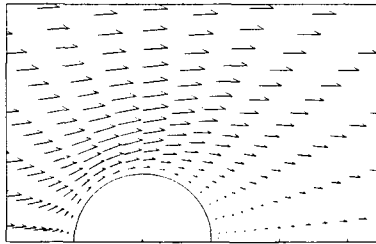
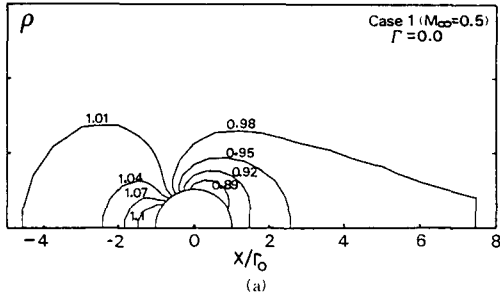


図 2 $R_e=20, \Gamma=0$ の流れ

逆流領域が発生する (図 1 (b)).

3. 計算結果と議論

図 2 は $R_e=20$, マッハ数 $M_\infty(=u_\infty/C_\infty)=0.5$, $\Gamma=0$ (物体が小さく重力が効かない) の場合の密度の等高線と物体まわりの流れの速度場を示す。図 2 (a) 中の数値は ρ/ρ_∞ の値である。密度は物体表面の上流側のよどみ点で最大となり、下流側対称軸から測って角 $\theta \approx 80^\circ$ で最小となる。圧力の分布は密度分布に似ている。物体後方に流れの極めて弱い領域があるが、はっきりとした渦は見られない (図 2 (b)).

ここで物体に働く抵抗を成分に分けて考えておこう (抵抗の大きさは、これを $\frac{1}{2}\pi r^2 \rho_\infty u_\infty^2$ で割った抵抗係数で表わすことにする)。成分の 1 つは、物体に働く圧力の x 方向成分を、物体表面で積分したものでこれを C_p と書こう。上流側の圧力が下流側よりも高ければ $C_p > 0$ となり物体の運動を妨げる ($\Gamma=0$ の場合はこれに当る)。その 2 は流体の粘性によって物体が引きずられることによる抵抗である。これを C_v とする。図 2 (b) の場合は、物体近くの流れの向きから $C_v > 0$ となることがわかる。最後は、物体がそのまわりのガス全体から受ける重力 x 方向成分である。これを C_g と書く。 $\Gamma=0$ のときは当然 $C_g=0$ である。重力の無視できるような球状の物体が運動中に受ける抵抗の成分は、 $C_p > 0, C_v > 0, C_g=0$ で、従って全抵抗係数 $C_i (=C_p+C_v+C_g)$ も正となり、物体は抵抗を受ける。

それでは重力が少し影響を与える様な物体ではどうであろうか。図 3 に $\Gamma=0.5$ の場合の物体まわりの密度分

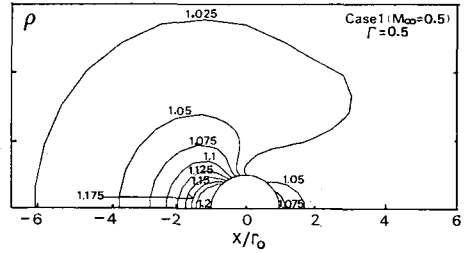


図 3 $R_e=20, \Gamma=0.5$ の流れ

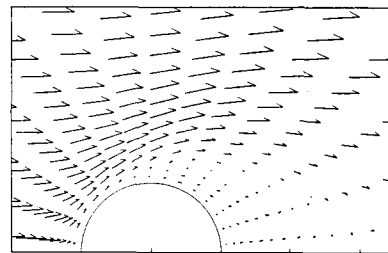
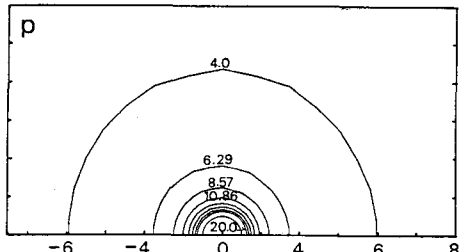
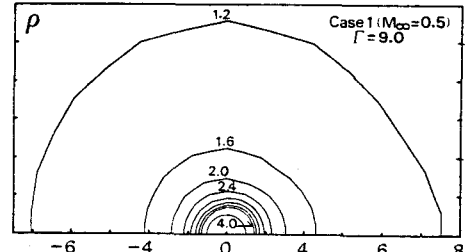


図 4 $R_e=20, \Gamma=9.0$ の流れ

布を描いてある。圧力分布もこれに似て前方で高く後方で低い。流れ場も図 2 (b) に近い。従ってやはり $C_p > 0, C_v > 0$ である。ところがガスの密度は平均して前方で高いゆえ、物体はガスの重力により前方に引かれ $C_g < 0$ となる。即ち重力の成分は推進力として働く。しかしながら 3 成分を加え合わせた全抵抗係数 C_i はやはり正となり常識的な結果を与える。

それではさらに重力が強い場合の流れ場はどのようであろうか。 $\Gamma=9$ の結果を図 4 に示す。図 4 (a) の等密度線が示す如く、物体の重力が強い場合には、物体前方よ

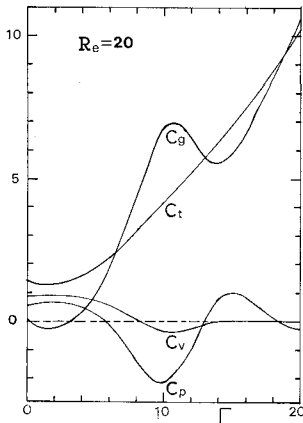


図 5 $R_e=20, M_\infty=0.5$ のときの抵抗係数の Γ 依存性

りも後方で密度が高くなりガスからの重力により物体は後方に引かれ ($C_g > 0$)、重力は抵抗として働く。圧力も後方で高くなり物体は進行方向に押される。即ち $C_p < 0$ で、この成分は推進力として働く。この様な Γ の値では、物体近くの前側では、流れは物体に沿って後方に流れるが、物体の後で発達した逆流の為全体として $C_v < 0$ となり、この成分も推進力として働く。しかしながら C_i はやはり正であり、物体を減速する向きに抵抗が働く。

$R_e=20$ の場合の抵抗係数の Γ 依存性を図 5 にまとめておく。 Γ が増大するにつれ、 C_g は一度減少した後は単調に増大するものと思っていたが図の如く $\Gamma \sim 10$ で極大、 $\Gamma \sim 14$ で極小をとる。この様な奇妙な振舞の原因はまだわかっていない。しかしながら C_g と C_p, C_v は逆の変動をする為 C_i は、一度 $\Gamma \sim 1.5$ で最小値をとった後は単調に増大する。 C_v の負のところでは反時計まわりの渦が発達しているはずであるが、図 6 に見られる様に逆流が物体前方にまで及ぶとは予想していなかった (図

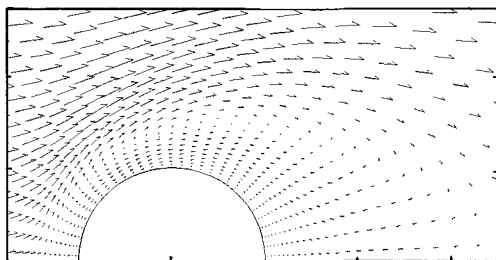


図 6 $R_e=20, \Gamma=12.0$ のときの流れ場

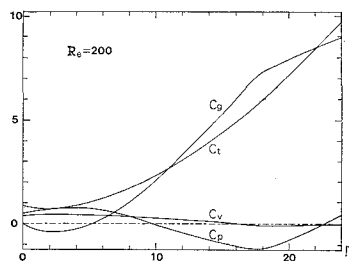


図 7 $R_e=200, M_\infty=0.5$ のときの抵抗係数の Γ 依存性

は $\Gamma=12$ の場合である)。この様に、 $\Gamma=0$ ではみられなかったが、重力の強さとともに、より発達した渦が見られる。

$R_e=50$ の場合の抵抗成分の Γ 依存性と渦の発達の様子は $R_e=20$ の場合と定性的には似ている。 $R_e=200$ の場合を図 7 に示す。この場合も又 Γ とともに C_v, C_p は増加-減少-増加となるが、 C_g は一度最小値をとった後は単調増大するが $\Gamma \sim 18$ で折れ曲る。しかしながら C_i はやはり、最小値をとった後は単調に増大するのみである、 $R_e=20, 50$ の場合と異なる点は、抵抗係数は Γ が大きくなるにつれ時間的により大きく振動するようになるということである。図は時間平均をもとに描いてある。流れ場ももちろん変動しており、渦も Γ の大きい場合にはより発達している。物体直後の渦の発生合体の様子を見てみよう。図 8 は $\Gamma=12$ の場合で (a)~(d) は時間の経過の順である。図 8 (a) には 3 つの渦が見られる。①は反時計まわり②, ③は時計まわりである。時間が経つと②③とは合体し (図 8 (b)), 発達する。①は左上に動き再び②に対応する渦が発生する (図 8 (c)). ②が発達し (図 8 (d)) ③が下方に移り再び①, ②, ③が元の位置を占める (図 8(a)). この周期が繰り返えされ、同時に p, ρ も時間的に振動し、従って C_v, C_p, C_g 及びその和 C_i も振動する。この振幅は Γ とともに増大する。

抵抗係数がレイノルズ数にどの様に依存するかを図 9 にまとめておく。当然ながら、 R_e が大きい程 (粘性が小さい程) C_i は小さいが、いずれの場合も、 Γ に強く依存していることがわかる。

さてここで簡単に、 C_i のマッハ数 M_∞ への依存性に触れておこう。 u_∞ を一定にした時、 M_∞ が大きい場合を考えると、ガスがより低温の場合を考えると、より強く重力の影響が現われることが期待される。図 10 は異なる M_∞ に対する、 C_i - Γ 関係を示す。同じ Γ の値に対して、マッハ数が大きい程抵抗が大きい。特に流れが超音速になると抵抗は急に大きくなる。これは超音速で運動する物体 (の近く) から発生した密度の高いマッハ円錐の内側のガスにより、物体が後に引かれることによる。極超音速流の場合、 C_g は Γ^2 に比例する。

今少し亜音速流に注目しよう。地上の実験においても重力の効く場合があるが、これを特徴づける量について考えてみる。問題にする系の特徴的長さ、速度、密度を L, V, ρ とする。これらで元の運動方程式を規格化する (圧力は ρV^2 で、時間は L/V で) と、粘性項には $1/R_e$ 、重力の項には $1/F_r$ なる係数がかかる。 R_e はレイノルズ数であり、 $R_e = LV/\nu$ 、 $\nu = \mu/\rho$ 、 μ はガスの粘性係数である (この解説では $L=2r_0$ 、 $\rho=\rho_\infty$ とした)。 F_r はフルード数とよばれるもので、 g を重力加速度とすると、 $F_r =$

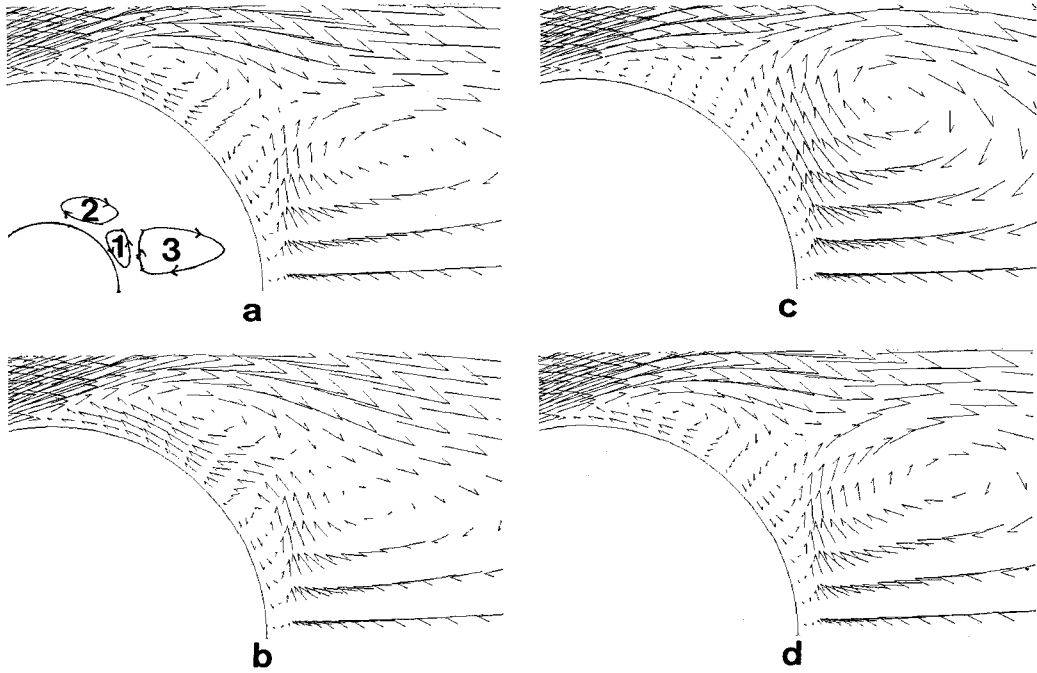


図 8 $Re=200, \Gamma=12.0$ のときの渦の発生・合体. a~d は時間経過の順

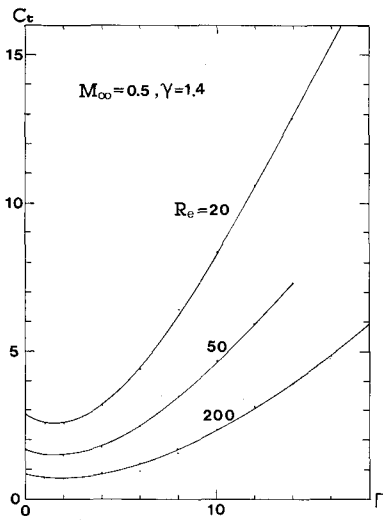


図 9 各レイノルズに対する抵抗係数の Γ 依存性

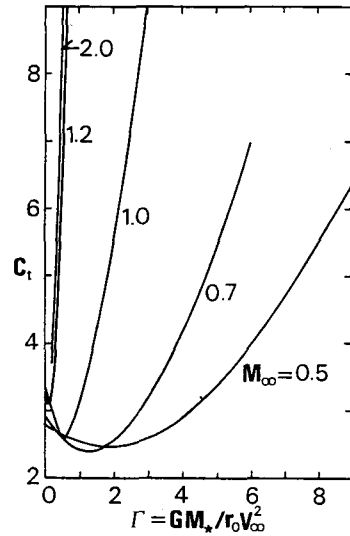


図 10 各マッハ数に対する抵抗係数の Γ 依存性

V^2/gL (ここでは、このように定義する). 異なる 2 つの流れも、各々の Re, Fr が等しく、又 (規格化した) 境界条件も同じであれば 2 つの流れは相似である.

さて運動する重力球のまわりの流れの相似について少し調べておこう. 粘性の効くのは物体表面近くの限られた領域のみであろう. 従って、物体からある程度離れた所では、粘性が無視でき、又、物体表面の境界条件の影響も小さいであろう. それゆえ、そこでは、フルード数の等しい流れは相似になるであろう. $g=GM_*/r_0$ とする

と、 $Fr=r_0^2 V^2/GM_* L=r_0/L\Gamma$ である. 従って Γ の異なる 2 つの流れも、規格化の単位 (L) を変えて Fr を等しくすれば、物体から離れた所では等しくなる. 図 11 は、 $M_\infty=0.7$ のときの $\Gamma=4$ と 6 の場合の密度の等高線である. 2 つの図はほぼ一致し、上記の状況が成立していることがわかる.

天体から十分離れたところでは、その形状の影響は小さく又ガスの粘性も効かず重力のみが重要な役割を果たすであろう. この考え方と、物理量の一樣流からのずれが

小さく、ガスは断熱という仮定に基づくと、天体から離れたところでの超音速流に対する ρ, p は次の様に書ける。

$$\left. \begin{aligned} p &= p_\infty + \frac{GM_* \rho_\infty}{S}, \quad \rho = \rho_\infty + \frac{GM_* \rho_\infty}{c_s^2}, \\ S &= \sqrt{x^2 + \lambda^2 r^2}, \quad \lambda^2 = 1 - M_\infty^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

これは p, ρ の等高線が楕円状になることを意味している。数値計算から得た ρ, p がほぼこの様になっている

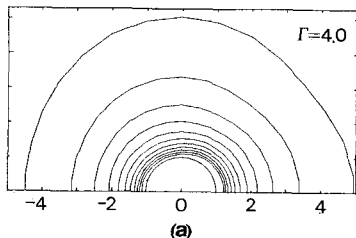
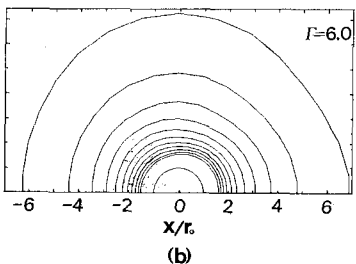


図 11 流れ場の相似関係



ことがわかる(図4, 11). 物体から十分離れた所で、式(2)が厳密に成り立つとすると、 ρ は $x=0$ 面に関して対称となるゆえ遠方のガスからの重力による抵抗への寄与は0となる。しかしながら、物体から十分後方でも流れは物体の存在を忘れることなく、そこでは等密度線が楕円からずれ、図4(a)の如く、物体後方に式(2)より予想されるよりも密度の高い領域が続く。それゆえ遠方のガスによる C_D への寄与は消えない。前に述べた如く重力には $100r_0$ (図3, 4, 6, 10, 11) もしくは $200r_0$ (図5, 7, 8) でカットが入っている。重力の影響は遠方にまで及んでいるので、カットの特に C_D に対する影響を調べて置く必要があると思われる。

4. まとめ

以上述べた如く、重力は天体のまわりの流れを大きく変える。重力の強く効く場合には、天体の抵抗係数は大きい。又 Γ が大きくなると、天体まわりに渦が発達する。

かつての惑星形成理論では重力を無視した場合 ($\Gamma=0$) の抵抗係数を用いて、その成長の過程を計算していた。重力を考えに入れると、抵抗は大きくなり成長時間は以前の推定値よりも小さくなる。正確な値を得る為には詳しい計算を行なわねばならないが、単純化した計算によれば惑星の成長時間は、以前の値の $1/2 \sim 1/3$ になると思われる。

天体観測雑誌

天文ガイド

12月号 定価420円+税 11月5日発売!

研究し続けている出口修至さんの詳しい解説
重力レンズとは?

ベテラン藤井旭さんがご紹介
楽しみな1987年の天文現象

ラグビーボール程の大きなものも!
四国に落ちた隕石

エリー小林さんからの第一報!
オランダの難波牧先生


カスタムクラフト
UMDの使い方

● コンピュータ・セミナー ● 12月の星空
● とびっくす ● 質問ルーム... など情報満載!

誠文堂新光社 東京都千代田区神田錦町1-5
電03(292)1221 振替東京7-128

新刊案内

星座の見つけかた



● 星座早見カード方式
1月から12月までに見られる夜空の様子をひと月ごとに、わかりやすく紹介します。切りとって野外でも使えます。
藤井旭・構成 定価1200円

切りとる本 **天体観測星図集**

天文ファンの必需品がまたひとつ
社会科の時間に使った白地図と同じ要領で使う「白星図」。全天を10に分け、6.5等星まで収録した、観測データをかきこめる、便利な本。
藤井旭 企画・構成 定価850円

