

目で見る相対論 1. 星虹 1

福 江 純*

1. 星虹が視たい!

光速に比べ無視できない速度で運動している時や、ブラックホールや中性子星近傍のようにきわめて強い重力場中など相対論的な効果が顕れてくる状況では、日常の世界からは想像もつかない現象が起こる。そのようなファンタスティックな現象の一つに星虹(スターボウ)と呼ばれるものがある。星虹とは簡単に言えば、準光速で宇宙を航行する時に、一つには光行差のため星の見かけの位置が宇宙船の進行方向へ移動集中し、また一つにはドップラー偏移のため星のスペクトルがずれて星の“色”が変化し、それらの結果宇宙船のブリッジからは、進行方向を中心としたリング状の星の虹が見えるだろうという話である。詳しくは例えば石原藤夫氏の『銀河旅行と特殊相対論』(講談社ブルーバックス)などを見ていただきたい。

筆者も以前から相対論の世界にあこがれていたのだが、「星虹視たい願望」なども歳をとるほど募るばかりだった。最近になってパソコン CG の性能が向上したことや、星のデータなどが使いやすくなったことなど諸条件・環境が整ってきたため、やっと長年の夢の一部が実現した。本稿でその結果を報告したい。

もちろん星虹を視覚化するというような試みはこれが初めてではなく、諸外国では大型計算機を使ったものなどいくつかあるようだ(例えば Stimets, R. W. and Sheldon, E., 1981, *Journal of the British Interplanetary Society*, Vol. 34, p. 83)。しかし日本はこの方面では若干遅れているようだし、今やパソコンでも手軽にできるようになったので、ここで紹介しておく価値もあるだろう。また星虹に限らず、相対論的現象一般を視覚に訴えて表現することは、通常は添え字のいっぱい付いた怪しげな式の背後に隠れている相対論的効果が目の当たりに見て取れるので、教育・啓蒙の見地からも重要だろう。さらにその中味まで理解しようとするれば、星虹一つとっても、特殊相対論や輻射理論から球面三角法や投影法にいたるまで幅広い概念が必要とされる。その意味では、高校・大学等における天文・物理教育の教材としても有用なのではなからうか。

次節は輻射強度や等級などについての天体物理学的な概念と、光行差やドップラー効果などについての相対論

的な概念の準備にあてる。3節で、準光速で航行する宇宙船から視たときの星の見かけの温度や等級がどう変化するかを導く。星虹の視え方の予想については4節でまとめ、最後の節で<星虹>の対象として考慮すべき天体などに関していくつかの補足をしたい。結果だけに興味のある人は4節(次回3月号)へタイムワープしてもらって結構である。

2. 帯に短し褌に長しの準備

2.1 輻射強度と等級

後で用いるいくつかの物理量とその定義などをコンパイルしておく。詳しくは、大学学部レベルの天体物理学の教科書(例えばウンゼルト『現代天文学』)を参考にしたい。なお[]内は物理量の次元を表わす。

【輻射強度】 I_ν

輻射強度 I_ν [$\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1}$] とは、ある面を通してある方向に、単位時間(sec) 単位面積(cm^2) 単位立体角(str) 当たりに流れて行く、単位振動数(Hz) 当たりの輻射のエネルギー(erg) (図1参照)。単位振動数当たりでなく単位波長当たりで定義する場合も多い。

I は強度: Intensity の I である。

また輻射強度 I_ν を振動数 ν について 0 から ∞ まですなわち全波長域にわたって積分したもの

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad (2.1)$$

を全輻射強度 I [$\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{str}^{-1}$] とする。

【黒体輻射強度】 $B_\nu(T)$

輻射場が黒体輻射の場合の輻射強度 I_ν を、黒体輻射(blackbody) を示すために変数 B を用いて $B_\nu(T)$ [$\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{str}^{-1}$] と表す。一般の I_ν は振動数に

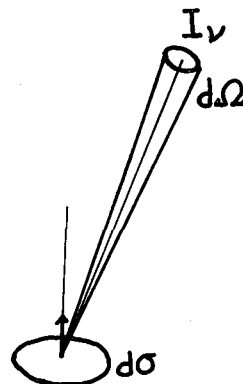


図1 輻射強度 I_ν

* 大阪教育大 Jun Fukue: Visual Relativity 1. Starbow 1

外にも時刻，場所や方向などに依存するが，黒体輻射 $B_\nu(T)$ は ν 以外には唯一温度 T に依存するだけである。式では，

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)} - 1} \quad (2.2)$$

と表されプランク分布とも呼ばれる。ただし， c ， h ， k はそれぞれ光速，プランク定数，ボルツマン定数である。図 2 参照。

黒体輻射のスペクトルのピークの位置は，

$$\nu_{\max} = 5.88 \times 10^{10} T \quad [\text{Hz}] \quad (2.3a)$$

$$\lambda_{\max} = 2.90 \times 10^3 / T \quad [\mu\text{m}] \quad (2.3b)$$

で与えられる（ウィーンの変位則）。

また (2.2) 式は， $h\nu \ll kT$ すなわちスペクトルのピークの左側（長波長側）では，

$$B_\nu(T) \sim 2kT\nu^2/c^2 \quad (2.4)$$

と，右側 ($h\nu \gg kT$) では，

$$B_\nu(T) \sim \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-(h\nu/kT)} \quad (2.5)$$

と近似され，それぞれレイリー・ジーンズ分布，ウィーン分布として知られている。

さらに全輻射強度 I に対して， $B_\nu(T)$ を振動数で積分したもの

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = (\sigma/\pi) T^4 \quad (2.6)$$

を全黒体輻射強度 $B(T)$ [$\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{str}^{-1}$] と呼ぶ。ただし σ はステファン・ボルツマンの定数： $\sigma = 2\pi^5 k^4/$

$15c^2 h^3 = 5.6696 \times 10^{-5} \text{ erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{deg}^{-4}$ である。(2.6) 式は，図 2 のグラフによって囲まれる部分の面積が温度の 4 乗に比例することを表わしている。

【観測される輻射流束】 f_ν

半径 R の星から距離 D の場所で，星から放射される輻射エネルギーを測定しているとする（図 3）。簡単のために星のスペクトルは黒体輻射としよう。観測地点において観測される輻射流束 f_ν [$\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$]，すなわち単位面積単位振動数単位時間当たりに流れる輻射エネルギーは，輻射強度 $B_\nu(T)$ に $\cos \theta$ をかけたものを立体角 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ で積分して

$$\begin{aligned} f_\nu &= \int B_\nu(T) \cos \theta d\Omega \\ &= B_\nu(T) 2\pi (\sin \theta_0)^2 / 2 \\ &= B_\nu(T) \pi (R/D)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。 f は流束：flux の f である。星から十分離れた地点 ($D \gg R$) では，(2.7) 式は星の表面での輻射強度 $B_\nu(T)$ に星を見込む立体角

$$\Omega_s = \pi R^2 / D^2 \quad (2.8)$$

をかけたものになる。

さらに (2.7) 式を振動数で積分すれば，星から十分遠方における，観測される全輻射流束 f [$\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2}$] が得られる：

$$f = B(T) \pi R^2 / D^2 \quad (2.9)$$

【等級：magnitude】 m

星の見かけの等級は，大雑把に言えば，観測される輻

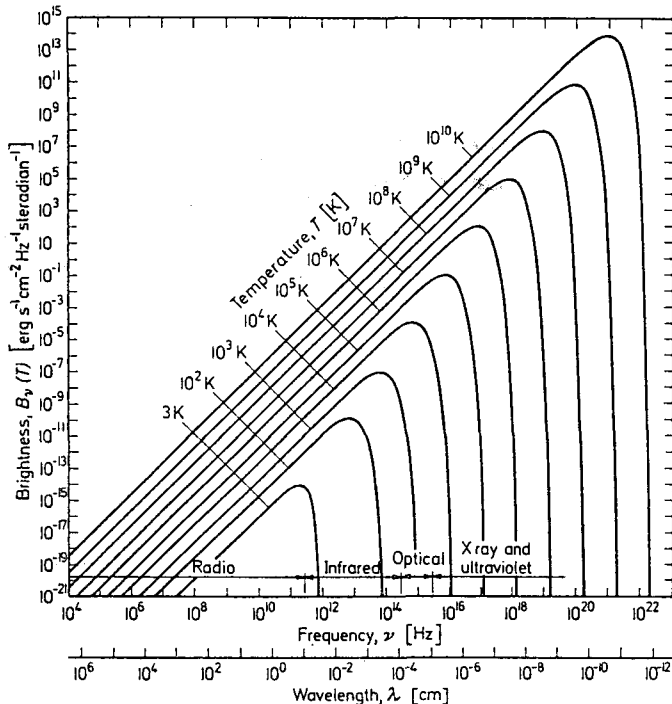


図 2 黒体輻射強度 $B_\nu(T)$ (ラング 1980 より)

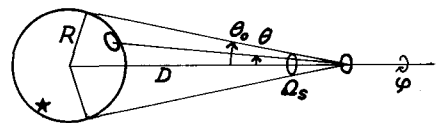


図 3 観測される輻射流束 f_ν

射流束を対数に引き直したものである。すなわち観測される輻射流束 (2.7) 式から、等級 m は、

$$m = -2.5 \log \int \Omega_s B_\nu(T) E_\nu d\nu$$

$$= -2.5 \log \int (\pi R^2/D^2) B_\nu(T) E_\nu d\nu \quad (2.10)$$

と定義される。一般的には B は I で置き換えなければならない。積分の中の E_ν は眼や器械の感度関数で、観測される輻射流束にこれをかけたものが実際に測定される量である (種々の吸収は省略)。対数の前の 2.5 (=5/2) は 5 等級違うごとに明るさが 100 倍違うことを表わし、マイナスの符号は等級が大きいほど暗いという悪しき慣例による。(2.10) 式では省略したが、等級の基準点はどこに設定してもよいので、右辺には任意の定数が付く。

【輻射等級】 m_{bol}

上の (2.10) 式で感度関数 E_ν を 1 とおいたもの。したがって積分範囲は 0 から ∞ で、スペクトル全域にわたって積分されたものになる。黒体輻射の場合は、

$$m_{bol} = -2.5 \log \int_0^\infty \Omega_s B_\nu(T) d\nu$$

$$= -2.5 \log \int_0^\infty (\pi R^2/D^2) B_\nu(T) d\nu$$

$$= -2.5 \log (\pi R^2/D^2) B(T)$$

$$= -2.5 \log f \quad (2.11)$$

などと書ける。

【実視等級】 m_v

緑色光 $\lambda 0.54 \mu\text{m}$ ($\nu_v = c/0.54 \mu\text{m} = 5.6 \times 10^{14}$ Hz) を重心とする感度関数を用いる (図 4 上)。ここでは簡単のために、可視光 $\lambda 0.38 \mu\text{m}$ から $\lambda 0.77 \mu\text{m}$ の間で $E_\nu = 1$ と置き他では 0 とする (図 4 下)。すなわち

$$m_v = -2.5 \log \int \Omega_s B_\nu(T) d\nu$$

$$= -2.5 \log \int (\pi R^2/D^2) B_\nu(T) d\nu \quad (2.12)$$

ただし (2.12) 式の積分範囲は、

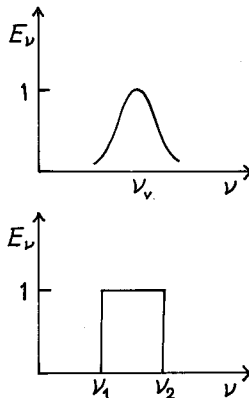


図 4 感度関数 E_ν

$$\nu_1 = c/0.77 \mu\text{m} = 3.9 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (2.13a)$$

$$\nu_2 = c/0.38 \mu\text{m} = 7.9 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (2.13b)$$

である。

2.2 光行差とドップラー効果

3 節での変数の表記を明確にするために式だけ挙げておく。詳しくは相対論の教科書を見て欲しい。以下では簡略のため無次元化した速度 $\beta = v/c$ とローレンツ因子 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ を用いる。

【光行差】

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \beta}{1 + \beta \cos \theta_0} \quad (2.14)$$

ただし θ_0 は宇宙船が静止している時の船首方向から計った光の到来角、 θ は速度 v で運動している時の到来角である。図 5 参照。

【ドップラー効果】

$$\nu = \nu_0 / [\gamma(1 - \beta \cos \theta)] \quad (2.15)$$

ただし ν_0 は宇宙船が静止している時に測定される光の振動数、 ν は速度 v で運動している宇宙船から観測する光の振動数である。 θ は運動時の光の到来角であることに注意。図 5 参照。

ちなみに赤方偏移 z は $z + 1 = \nu_0/\nu$ で定義される。 $z + 1$ が 1 より小さければ青方偏移、大きければ赤方偏移である。

【立体角の変換式】

天球上にある立体角 $d\Omega_0$ の天体は、宇宙船の運動時には、光行差によって、宇宙船の進行方向に移動すると共に、その見かけの立体角も $d\Omega$ に変化する (図 6)。コンプトン散乱の計算などでも出てくるものだが、簡単に導出しておこう。

宇宙船の進行方向を極軸とする球座標 (r, θ, ϕ) をとると、立体角 $d\Omega$ は、

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.16)$$

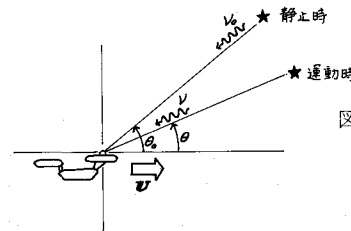


図 5 光行差とドップラー偏移

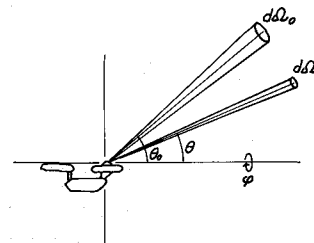


図 6 立体角の変化

で表わされる。光行差によって ϕ 方向は変化しないので立体角の変換では θ 方向のみ考えればよい。

そのためにまず、光行差の式 (2.14) の両辺を微分して整理すると、

$$\sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0 d\theta_0}{[\gamma(1 + \beta \cos \theta_0)]^2} \quad (2.17)$$

が得られる。一方、ドップラー効果 (2.15) 式の逆変換から

$$\nu_0 = \nu / [\gamma(1 + \beta \cos \theta_0)] \quad (2.18)$$

となるので、(2.17) 式は

$$\sin \theta d\theta = \sin \theta_0 d\theta_0 (\nu_0 / \nu)^2 \quad (2.19)$$

と書くことができる。

したがって立体角の変換式は、

$$d\Omega = d\Omega_0 \times (\nu_0 / \nu)^2 \quad (2.20)$$

となる。 (ν_0 / ν) が 1 より小さい (大きい) すなわち青方偏移 (赤方偏移) の領域では、(2.20) 式にしたがって、天体の立体角は見かけ上小さく (大きく) なる。

3. 点源 + 黒体輻射 ~ 星はどう見える?

まず一番簡単な場合として、天体が観測装置などで分解できない点源で、さらにそのスペクトルが黒体輻射で近似できるとしよう。要するに“星”を想定してもらえばよい。準光速の宇宙船から観測したとき、そのような天体の色 (温度) や等級はどのように変化するだろうか?

3.1 黒体輻射強度 $B_\nu(T)$, 黒体温度 T

まず最初に考えるべき問題は、振動数 ν_0 での強さが $I(\nu_0)$ の輻射を、速度 v で飛んでいる宇宙船から観測した時に、振動数 ν での観測される輻射の強さ I_ν はいくらになるかということである。ただし、 ν_0 と ν はドップラー偏移の式 (2.15) によって関係付けられているとする。

ドップラー偏移によって光のエネルギーが変化するため輻射強度は保存されないが、 I_ν を ν^3 で割った光子の分布関数と関係する量は相対論的に不変であり、

$$I_\nu / \nu^3 = I_{\nu_0} / \nu_0^3 \quad (3.1)$$

が成り立つ。詳しくは、例えば Lightman, A. P., Press, W. H., Price, R. H., and Teukolsky, S. A., 1975, *Problem book in relativity and gravitation*, p. 31 とか Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., 1973, *Gravitation*, p. 588 など参照して欲しい。

特に光源が温度 T_0 の黒体輻射を放射している場合は、 $I_{\nu_0} = B_{\nu_0}(T_0)$ とおいて

$$I_\nu = B_{\nu_0}(T_0) \times (\nu / \nu_0)^3 \quad (3.2)$$

となる。さらに (3.2) 式の右辺に黒体輻射の式 [(2.2) 式で ν や T に添字 0 をつけたもの] を入れて整理すると、 I_ν 自体も黒体輻射の形に表わすことができる (図

7 参照):

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= B_{\nu_0}(T_0) \times (\nu / \nu_0)^3 \\ &= B_{\nu_0}(T_0) / [\gamma(1 - \beta \cos \theta)]^3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし観測される温度 T は光源の温度 T_0 とは一般に異なり、

$$\begin{aligned} T &= T_0 \times (\nu / \nu_0) \\ &= T_0 / [\gamma(1 - \beta \cos \theta)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

という関係で結ばれる。(3.3), (3.4) 式で (2.15) 式を用いた。

図 7 のグラフで見れば (3.3) 式の意味はより明確になるだろう。すなわちドップラー偏移によって振動数が ν_0 から ν に変化した時、グラフの高さは ν / ν_0 の 3 乗で、言い換えれば、図 7 の対数グラフ上で傾き 3 の直線に沿って変化する。

以上をまとめると、(1) 天体が黒体輻射を放射しているれば、宇宙船でも黒体輻射として観測される。(2) ただしその黒体温度すなわち“色”は (3.4) 式にしたがって、宇宙船の速度と天体の方向に依存して変化する。なお特殊相対論が発表された直後の 1907 年には、光源が動いている場合について、遣り方は少々回わりくどいが早々と (3.4) 式が導出されていたことがラング (Lang, K. R., 1980, *Astrophysical Formulae*, p. 26) の本に載っている。

3.2 全黒体輻射強度 $B(T)$, 観測される全輻射流束 f

先に (2.1) 式で定義したように、全輻射強度は輻射強度を振動数で積分したものである。すなわち、宇宙船の静止時に観測される天体の全輻射強度 I_0 は、

$$I_0 = \int_0^\infty I_{\nu_0} d\nu_0$$

で、また宇宙船が運動している時に観測される全輻射強度 I は、

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$$

で計算される。ただし積分範囲はどちらも $0 < \nu < \infty$ で

$$\frac{B_\nu}{B_{\nu_0}} = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3, \quad \frac{d\nu}{d\nu_0} = \frac{\nu}{\nu_0}$$

$$\frac{B_\nu d\nu}{B_{\nu_0} d\nu_0} = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4$$

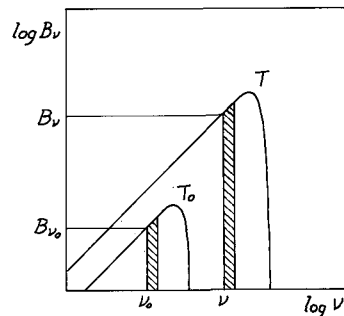


図 7 ドップラー偏移による黒体輻射スペクトルの変化

ある。

さてドップラー偏移の式 (2.15) を微分すると、

$$\begin{aligned} d\nu/d\nu_0 &= 1/[\gamma(1-\beta \cos \theta)] \\ &= \nu/\nu_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

という、微分 $d\nu$ と $d\nu_0$ の間の変換式が得られる。(3.1) 式と (3.5) 式を全輻射強度 I の積分式に代入することにより、結局全輻射強度は、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty I_\nu d\nu \\ &= \int_0^\infty I_{\nu_0} d\nu_0 (\nu/\nu_0)^4 \\ &= I_0 \times (\nu/\nu_0)^4 \end{aligned} \quad (3.6)$$

のように変換することが分かる。ただし、 ν/ν_0 は ν_0 によらないので積分の外に出せた。

黒体輻射の場合は $I=B$ とおいて、

$$\begin{aligned} B(T) &= B_0(T_0) \times (\nu/\nu_0)^4 \\ &= B_0(T_0) \times (T/T_0)^4 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ここで (3.4) を用いた。この結果は、図 7 から分かるように、黒体輻射のスペクトルのグラフによって囲まれる面積が温度の 4 乗に比例することと直接関係している。

ところで観測される全輻射流束 f は、(2.9) 式にあるように、 $B(T)$ と天体を見込む立体角 $\Omega_s = \pi R^2/D^2$ をかけたものである。これらのうち $B(T)$ は (3.7) 式のように変換するが、立体角は光行差のため (2.20) 式によって変換する。結局 $(\nu_0/\nu)^2$ がキャンセルして、

$$\begin{aligned} f &= B(T)\Omega_s \\ &= B_0(T_0)\Omega_{s_0}(\nu/\nu_0)^2 \\ &= f_0(\nu/\nu_0)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られる。この f は観測宙点の単位面積を単位時間当たり流れる輻射エネルギーであるから、(3.8) 式の右辺の 2 乗は天体と観測者の時間とエネルギーの変化からひとつずつきていてと考えてもよい。

3.3 HR 図上での移動

以上までの話をもとに、宇宙船から観測する恒星が HR 図上でどう動くかをちょっと予想してみよう。

そのためにはまず宇宙船の静止時の星の光度 L_0 と運動的の見かけの光度 L の変換が分らなければならない。ところが観測される輻射流束 f を星までの距離を半径とする球面で積分したものが光度だから、結局星の光度も (3.8) 式と同じように変換する：

$$\begin{aligned} L &= L_0 \times (\nu/\nu_0)^2 \\ &= L_0 \times (T/T_0)^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

横軸を温度の対数、縦軸を光度の対数で表わした HR 図上で考えると、(3.9) 式から、恒星は宇宙船の運動によって傾きが -2 の直線上を移動することが分かる (2 でなく -2 となるのは温度の軸を右ほど低温とするた

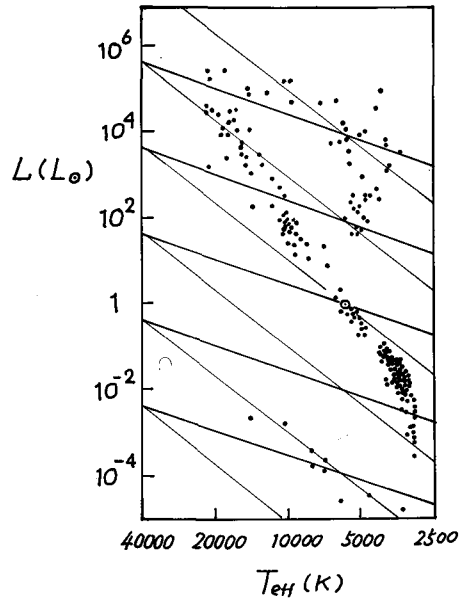


図 8 近傍の星の HR 図 (太線は見かけの星の移動方向、細線は等半径線)

め：天文における悪しき慣例の一つ)。その場合の移動方向 (+ か - か) や移動量は (3.4) 式より宇宙船の速度 β と星の見える方向 θ に依存する。近傍の星の HR 図に傾き -2 の直線 (太線) をプロットしたものを図 8 に示しておくので参考にして欲しい。また図 8 には星の等半径線 (細線) と太陽も描き込んである。

いくつかコメントしておく。 (1) 上で述べたように、観測される温度は (3.4) 式、光度は (3.9) 式にしたがって変化する。そこで例えば、宇宙船の船首方向で主系列星が青方偏移 ($\nu/\nu_0 > 1$) を受ける場合を考えると、星は図 8 の直線を高温側 (左上) へ移動する。 (2) その結果同じ温度の主系列星より光度が小さくなる。これは星を見込む立体角の議論や図 8 の等半径線から分かるように、宇宙船の運動によって、星の見かけの半径が ν/ν_0 に反比例して減少するように見えるためである。 (3) なお星団の場合、星の距離も見える方向もほぼ同じなので、星団の HR 図はその形を保ったまま、左上方向または右下方向へ移動するだろう。もちろん星団の拡がりの範囲内で、温度や光度は変化する。

紙数の関係で以下は次回に回すが、表紙の写真は実際に作成した星虹の一部である。宇宙船の速度は異なるが方向は 4 枚とも同じである。次回までに見なれた星座を探してみたい。またそれぞれの写真で、宇宙船の速度はどれくらいだろうか？

(つづく)