

目で見る相対論 4. 赤く凍る刻

福 江 純*

1. 時間の遅れ

空間のつぎは時間というきわめて安易な順番により、今回は時間の遅れと赤方偏移を扱ってみよう。初心者、中級者、上級者に関する但し書は前回(天文月報 1988年5月号128頁)と同じである。

まず例によって、からっぽな空間に球対称なブラックホールを1ヶ置こう。

さてブラックホール(質量)の存在は、空間を曲げるだけでなく、時間をも“曲げる”，ということになっている。すなわち質量の近くでは、空間の長さは伸びるセンスだったが、時間の方はゆっくりと進むのである。

たとえばブラックホールから、距離 r のところに「静止している人」の時計の進み方(固有時間 τ)は、無限遠にいる人の時計の進み方(座標時間 t)よりも、

$$\tau = \sqrt{1 - r_g/r} t \quad (1)$$

の割合で遅くなる。ただし $r_g = 2GM/c^2$ はシュバルツシルト半径とする。 τ と t の比を r の関数としてグラフに表したものが、図1の実線である。

ちなみに、ブラックホールに向けて「自由落下している人」の場合は、落下運動に伴うドップラー効果の分が掛かるために、

$$r = (1 - r_g/r) t \quad (2)$$

となり、静止している場合より時間の遅れの割合は大きい(図1の破線)。

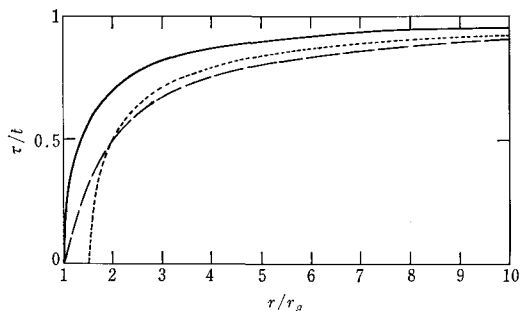


図1 固有時間 τ と座標時間 t の比。横軸はシュバルツシルト半径を単位とした動径 r 。なお実線は「静止した観測者」の固有時間、破線は「自由落下している観測者」の固有時間、点線は「軌道運動している観測者」の固有時間を表す。

またブラックホールのまわりを「円運動している人」の場合は、軌道運動のドップラー効果によって、

$$r = \sqrt{1 - 3r_g/2r} t \quad (3)$$

のようになる(図1の点線)。

2. プログラムの説明 1

最初のプログラムは、(1)式で表される固有時間の遅れを、ディスプレイ上に表示するものである。

プログラムを実行すると、まず簡単な説明文が出てくる。何かキーを押せば画面上に表示する最大半径を聞いてくる。リターンキーを押せば標準値 $10r_g$ が設定される。ここでプログラムの流れは、一時サブルーチン* GRAPHに移り、グラフィック画面の初期設定、表題と日付の表示、枠と目盛りの表示などが行なわれ、メインルーチンに戻る(図2)。

図2で赤い円盤はブラックホールを表し、白い(本当は緑)円盤は無限遠の時計(座標時、プログラム中では宇宙時)を表す。もっとも秒針しかないので時計というもおこがましいが、

つぎに最初の無限ループで時計を置く場所を聞いてくるので、シュバルツシルト半径を単位とする距離 R を入力する。時計は赤道面上に最大 10 個まで置ける。

リターンキーを押すか、 R に 0 以下を入力するか、時計の個数が 10 個を超えれば、秒針が動き始める。またそれぞれの時計の時刻も表示される。ちょうど1分経過後の画面が図3である。

なおプログラムは無限ループになっているので、止めるには STOP キーを用いる。

【発展問題】もし自由落下している観測者の固有時間や、軌道運動している観測者の固有時間を表示したいときは、 $SQR(1-1/R)$ を、それぞれ $(1-1/R)$ または

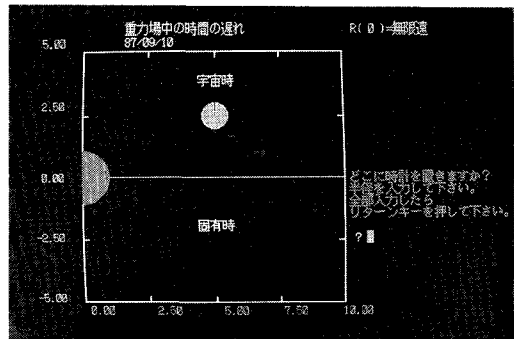


図2 固有時計の設置段階。

* 大阪教育大 Jun Fukue: Visual Relativity 4. Time Delay and Redshift

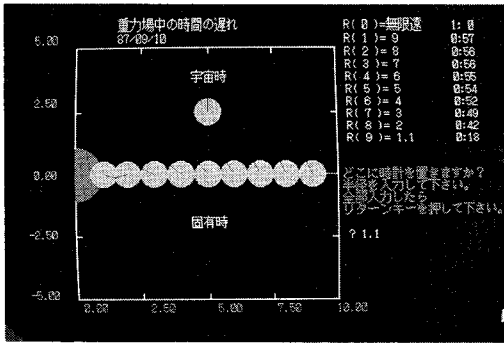


図3 1分経過時点での各固有時計の針.

SQR(1-1.5/R) に変更すればよい. なおプログラム中では, 長さはシュバルツシルト半径, 速度は光速を単位としてある.

このプログラム例では, 視覚化といっても, ほとんどプログラムの基本テクニックと画面表示の練習に過ぎない. ただ, どこにでも出ているものだが, 内蔵クロックを用いた時刻の切り出しと表示は別のところでも役に立つだろう. また(計算速度が速すぎることから生じる)秒針のちらつきを防ぐためにダミーループを入れてある.

あ, それから忘れるところだったが, ブラックホールの近くでは時間が遅れる, とよく言われるが, 図3からもわかるように, 時間の遅れがほんとに目だつのは, ブラックホールのごく近傍に過ぎない.

3. 赤方偏移

時間の遅れと切っても切り離せない関係にあるのが, 重力場中での光の赤方偏移である.

ブラックホールから距離 r の宙点に静止した発光体が, その固有時間で τ の間に n 個の山を持つ電磁波を放射したとすると, 放射宙点での振動数は,

$$\nu_{em} = n/\tau$$

である. 一方, 無限遠では, この n 個の山を無限遠の固有時間で t かかって観測するので, 無限遠での振動数は,

$$\nu_{\infty} = n/t$$

となる. これらの式と (1) 式から,

$$\begin{aligned} \nu_{\infty} &= (\tau/t) \nu_{em} \\ &= \sqrt{1-r_0/r} \nu_{em} \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる. すなわち無限遠での振動数は, 放射時の振動数より $\sqrt{1-r_0/r}$ の因子だけ小さい. 逆にこの因子の逆数分だけ波長は長くなる. 言い替えば, 赤方偏移する.

4. プログラムの説明 2

今回の2番目のプログラムは, (4) 式の赤方偏移をデ

イスプレー上に視覚化するものだ.

プログラムを実行すると説明文が表示されるのは前と同じ. 何かキーを押すと座標が設定される (図4=表紙上).

図4で同心円はシュバルツシルト半径を単位とする中心からの距離 r を表すのだが, ブラックホールの地平面近傍を強調するために,

$$u = 1 - r_0/r$$

という変換で地平面近傍が引き延ばしてある. その結果, 同心円の中心がシュバルツシルト半径 ($r=r_0$) に対応し, その外側のだんだん間隔の狭くなる青い円が, それぞれ $r=2r_0$ から $10r_0$ までを示す (1530行). また一番外側の白い円は無限遠を表す (1520行).

まず最初に放射する光の波長を聞いてくるので, オングストローム単位で入力する (1600行). リターンキーを押せば, 6000 オングストロームに設定される (1610行). つぎに放射宙点の中心からの距離を聞いてくるので, シュバルツシルト半径を単位として距離 r を入力する (1750行). 距離を入力する度に, 波の概形 (1790行-1930行) と無限遠での波長 (1950行, 1960行) が表示される (図5=表紙下).

距離 r に負の値を入れれば, 波長の設定に戻る.

この場合も, 大きな赤方偏移を受けるのは, やはり非常に地平面近くから放射された光だけである.

【バグ】 現在判明しているバグは, 波長を短くすると波の波形がぐちゃぐちゃになってしまうものだ. おそらくその場合は, 1680行をいじれば直ると思う.

【発展問題】 波長に応じて波に色を着けるには, 1910行の色指定をいじればよい.

【研究問題】 自由落下している発光体とか, 軌道運動している発光体から放射された光の赤方偏移は, (4) 式の因子を, (2) 式や (3) 式の因子で置き換えればいいというものでもない. 光の赤方偏移においては, 発光体や観測者の運動の方向が関係するからだ. これは研究問題に残しておきたい.

最終的には宇宙船に時計を載せてブラックホールに自由落下させ, 「ブラックホールに近づくにつれ宇宙船の時計の進み方は遅くなり, また宇宙船はどんどん赤く暗くなって, ついに事象の地平面ではすべてが凍りついた……」というやつ, 相対論の解説書なんかによく出てくるあれを視覚化したいですね. 今回は若干, 看板に偽りありでした.

参考文献

ランダウとリフシツ『場の古典論』(東京図書 1978年) §88, §100.

```

1000 '***** REDSHIFJ.BAS *****
1010 '
1020 '          Ver. 1  1985 0826-0827
1025 '          Ver. 2  1986 0419-0430 Japanesize
1026 '          Ver. 3  1987 0812      minor change
1030 '
1040 'initialize : 'シキ セツテイ *****
1050 '
1060 CONSOLE 0,25,0,1,0 : WIDTH 80,25 : SCREEN 3,0,0,1 : CLS 3
1070 DEFINT I-K
1080 'DEFDBL A-H,L-Z : PRINT "Double Precision"
1090 PAI=3.141592653589793# : TEN.L=LOG(10#)
1100 '
1110 'document routine : 'フ ロク ラム ノ セツメイ *****
1120 '
1130 PRINT
1140 COLOR 5
1150 PRINT "          プログラム名 < REDSHIFJ >"
1160 PRINT
1170 PRINT "          Ver.1  1985 0827      by Jun Fukue" : COLOR 7
1180 PRINT
1190 PRINT " このプログラムは、球対称重力場すなわちシュバルツシルト時空に";
1193 PRINT "おける電磁波の" : COLOR 6 : PRINT "<赤方変位>" : COLOR 7
1195 PRINT "を視覚化して表示するものです。
1210 PRINT " 重力場中での赤方変位は次式で表わされます。" : COLOR 4
1220 PRINT "           $\nu_{obs} = \nu_{em} \sqrt{\{(1-1/R_{em}) / (1-1/R_{obs})\}}$ 
1230 PRINT "           $\lambda_{obs} = \lambda_{em} \sqrt{\{(1-1/R_{obs}) / (1-1/R_{em})\}}$ 
: COLOR 7
1240 PRINT " 但し $\nu_{obs}$  ( $\lambda_{obs}$ ) は、ブラックホールの中心から距離 $R = R_{obs}$  ";
1250 PRINT "の場所に位置する観測者の観測する振動数(波長)で、 $\nu_{em}$  ( $\lambda_{em}$ ) は";
1260 PRINT "、 $R = R_{em}$ で発せられた光の振動数(波長)です。 $R$ はシュバルツシ";
1270 PRINT "ルト半径を単位として測ってあります。
1280 PRINT " コンピューターの指示に従って、次のパラメーターを入力して下さい。
1290 PRINT "          <  $\lambda_{em}$  > = オングストローム単位で測った輝線の波長
1300 PRINT "          <  $R$  > = 発射点の場所
1310 PRINT " プログラムは次のデータを表示します。
1320 PRINT "           $\lambda_{inf}$  : 無限遠で観測する波長
1330 PRINT " ブラックホールの地平面近傍を強調するために、距離 $R$ は $U = 1 - 1/R$ ";
1340 PRINT "という式を用いて、スクリーン上での座標 $U$ に変換してあります。";
1350 PRINT "従って、画面の中心がシュバルツシルト半径( $R = 1$ )で、一番外側の";
1360 PRINT "円が無限遠に対応します。
1370 COLOR 2
1380 PRINT "          説明を読んだらリターンキーを押して下さい。
1390 '
1395 BEP=1 : GOSUB *BEEP1
1400 DOC$=INKEY$ : IF DOC$="" THEN 1400
1410 IF ASC(DOC$)<>13 THEN 1400
1420 COLOR 5 : CLS 3
1430 '
1440 *MAIN : 'メイン ルーチン *****
1450 '
1460 GOSUB *GRAPH
1500 '
1510 *START
1520 CIRCLE(0,0),1,7,,,,F,0
1530 FOR R=2 TO 10 : CIRCLE(0,0),1-1/R,1 : NEXT R
1540 FOR I=0 TO 12 : T=2*PAI*I/12 : LINE(0,0)-(COS(T),-SIN(T)),1 : NEXT I
1550 '
1560 COLOR 4 : LOCATE 0,23 : PRINT "青い円はR = 2から10までを示す。中心がR
= 1、一番外側の円が無限遠に対応する"
1570 COLOR 5 : LOCATE 53, 0 : PRINT "輝線の波長"

```

```

1580         LOCATE 53, 1 : PRINT "          "
1590         BEP=3 : GOSUB *BEEP1
1600 COLOR 2 : LOCATE 53, 1 : INPUT "[RET]=6000";LAMBDA
1610         IF LAMBDA=0 THEN LAMBDA=6000
1620 COLOR 6 : LOCATE 53, 1 : PRINT "          ";LAMBDA;"angstrom"
1630 COLOR 5 : LOCATE 53, 3 : PRINT "輝点の"
1640         LOCATE 53, 4 : PRINT "半径"
1650         LOCATE 65, 3 : PRINT "無限遠での"
1660         LOCATE 65, 4 : PRINT "波長"
1670 '
1680 AWAVE=.05 : NWAIVE=50 : ' amplitude & numbers of waves
1690 ITHETA=0 : NTHETA=12
1700 '
1710 WHILE 1
1720 COLOR 2 : LOCATE 54,19 : PRINT "Rを入力して下さい。"
1730 LOCATE 54,20 : PRINT "負の値を入れれば他の場合"
1740         BEP=3 : GOSUB *BEEP1
1750         LOCATE 54,21 : INPUT R0
1760         IF R0<0 THEN BEP=5 : GOSUB *BEEP1 : GOTO *START
1770         IF R0<=1 THEN BEP=1 : GOSUB *BEEP1 : GOTO 1750
1780 '
1790 WAVE =2*PAI*6000/LAMBDA*SQR(1-1/R0)*NWAIVE
1800 THETA=2*PAI*ITHETA/NTHETA
1810 '
1820 U0=1-1/R0
1830 X1=U0*COS(THETA)
1840 Y1=U0*SIN(THETA)
1850 FOR U=U0 TO .9999 STEP .005
1860     R =1/(1-U)
1870     X =U
1880     Y =AWAVE*SIN(WAVE*U/SQR(1-1/R))
1890     X2=X*COS(THETA)-Y*SIN(THETA)
1900     Y2=X*SIN(THETA)+Y*COS(THETA)
1910     LINE(X1,-Y1)-(X2,-Y2),4
1920     X1=X2 : Y1=Y2
1930 NEXT U
1940 '
1950 COLOR 5 : LOCATE 53,ITHETA+6 : PRINT R0
1960 LOCATE 61,ITHETA+6 : PRINT LAMBDA/SQR(1-1/R0)
1970 '
1980 IF ITHETA>10 THEN ITHETA=ITHETA-12
1990 ITHETA=ITHETA+1
2000 WEND
2010 '
2020 RETURN
2030 '
2040 *GRAPH : 'ク`ラフィック サブ`ルーチン *****
2050 '
2060 'Initialize
2070 CONSOLE 0,25,0,1 : WIDTH 80,25 : SCREEN 3,0,0,1 : CLS 3
2080 WINDOW(-1,-1)-(1,1) : VIEW(65,20)-(415,370)
2100 'Headings
2110 WHAT$="球対称重力場中での赤方変位"
2120 COLOR 6 : LOCATE 0,0: PRINT WHAT$          : LOCATE 0,1: PRINT DATE$
2140 RETURN
2150 '
2160 *BEEP1:'*****
2180 FOR I=1 TO BEP : FOR K=1 TO 5 : BEEP 1 : FOR J=1 TO 50:NEXT J : BEEP 0
2190 FOR J=1 TO 5:NEXT J : NEXT K : FOR J=1 TO 100:NEXT J : NEXT I : RETURN
2210 '*****

```