目で視る相対論 5. 脱軌道用作動体

福 江 純*

1. 近日点の移動

距離の2乗に反比例する引力が働く場合，すなわち逆2乗の力の場では，粒子の軌道は円錐曲線になる．とくに捕捉された粒子の軌道は，きれいな楕円軌道になる．これがニュートン力学の帰結だった．

一方，相対論では，引力が逆2乗で表せないために，たとえば楕円軌道は閉じなくなり，いわゆる近日点の移動が起こる．水星の近日点の移動量のうちでニュートン力学で説明できない部分が 100 年当り 43″ 残っていたが（近日点の移動は他の惑星の影響などによっても起こり，観測される移動量は全部で，100 年につき 5600″ ほどもあった），これが一般相対論によってあざやかに説明されたのは，あまりにも有名な話である．

この話は，相対論の入門書や教科書には必ず出ており，また同時に必ず出ているのが，相対論的効果が小さい極限での，1公転当りの近日点の移動角 $\delta\varphi$ の表式:

$$\delta\varphi=\frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)} \qquad (1)$$

である．ただしここで G は万有引力定数，c は光速，M は中心の天体の質量，a は軌道長半径，e は軌道の離心率である．水星の場合は，M に太陽質量，a に 0.3871 天文単位，e に 0.2056 を入れると，(1) 式から1公転当り，$\delta\varphi=5\times10^{-7}$ ラジアン$=0.103''$ となる．公転周期が 0.2409 年だから，100 年では約 43″ の移動量となるわけだ．

かつては重力場中での物体の運動方程式を解くのは大変面倒だったし，水星の場合は一般相対論的な効果は非常に小さいので (1) 式で十分だった．が，現在では，運動方程式はパソコンで造作もなく解けるし，また相対論的効果が小さいという近似が使えないようなケース，中性子星やブラックホールなどもごろごろしている．

というわけで今回は，ブラックホール周辺での質点の運動方程式を数値的に解いて，その結果をディスプレーに表示してみよう．

2. 運動方程式

例によって，何もない空間に，質量 M の球対称の天体，たとえばブラックホールを置こう．

さて質量 m の粒子（ブラックホールと比べて質量も大きさも十分小さければ，星屑でも，宇宙船でも何でもいい）の運動方程式は，ブラックホールの中心を原点とする極座標 (r, φ) を用いて，

$$m\frac{d^2r}{d\tau^2}=-\frac{GMm}{r^2}+\left(1-\frac{3r_g}{2r}\right)mr\Omega^2 \qquad (2)$$

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau}=r^2\Omega=L \ (\text{一定}) \qquad (3)$$

と表せる．ただしシュバルツシルト半径を $r_g=2GM/c^2$ とした．また $\Omega=d\varphi/d\tau$ は角速度で，L は単位質量当りの角運動量と呼ばれるものである．

これらは，式の上ではニュートン力学の場合と大変よく似ている．たとえば (2) 式の左辺は粒子の加速度の項で，普通の時間の代わりに粒子の固有時間 τ が用いてある点が異なるだけだ．右辺の第1項は中心の天体からの重力である．第2項は角速度 Ω で回転する粒子に働く遠心力を表しているが，この項の括弧内が，ニュートン力学の場合とちょっぴり違う．$-3r_g/2r$ という付加項のために，粒子が中心に近付くとこの部分は負になる．見方を変えれば，ニュートン力学に比べて中心では重力が強くなっていると考えることもできる．このことは，回転のエネルギーが一般相対論では質量と等価で，したがって重力のもとになることと関係する．最後に (3) 式は，面積速度一定の法則（あるいは角運動量の保存の法則）そのままである．

数値的に解く便宜上，(2)，(3) 式を少し変形しておこう．まず (2) 式の両辺を m で割る．さらに粒子の動径速度

$$v=dr/d\tau$$

を導入して，(2) 式の時間に関する2階微分を2つの1階微分に分割すると，

$$\frac{dr}{d\tau}=v \qquad (4)$$

$$\frac{dv}{d\tau}=-\frac{r_gc^2}{2r^2}+\left(1-\frac{3r_g}{2r}\right)\frac{L^2}{r^3} \qquad (5)$$

となる．ここで $GM=r_gc^2/2$ で置き換え，Ω は L で表した．一方 (3) 式は，

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{L}{r^2} \qquad (6)$$

$$\frac{dL}{d\tau}=0 \qquad (7)$$

と分けることができる．

角運動量 L は保存される量なので，本当は (7) 式は不要だが，バランスがいいので入れてしまった．

* 大阪教育大 Jun Fukue: Visual Relativity 5. Motion of Spacecraft

なお後述するプログラム中では，長さはシュバルツシルト半径 r_g，速度は光速 c を単位としてある．したがって時間の単位は r_g/c である．たとえば粒子の単位質量当りのエネルギー（c^2 が単位）は，

$$E=\sqrt{1-\frac{1}{r}+v^2+\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}} \qquad (8)$$

と表される（静止質量エネルギーを含む）．

3. プログラムの説明

今回のプログラムは，ブラックホール周辺の粒子の軌道を表す (4) 式から (7) 式までの連立1階微分方程式系を，適当な初期値を与えて数値的に解き，粒子の軌道などをディスプレー上に表示するものである．

プログラムを実行すると，例によって説明文が出てくる（入出力が多いので2面ある）．なお初期設定で定義している関数は視点から画面上に投影する関数である（第3回，天文月報 1988年5月号参照）．入力パラメータは多いのだが，リターンキーを押して行けば自動的に標準値が設定される．

さて説明画面のつぎに，サブルーチン＊PARA に跳んで，視点に関するパラメータを聞いてくるので，まず仮想3次元超空間での視点の位置，

r_e： 中心からの距離［標準値＝$25r_g$］

θ_e： Z 軸からの極角［標準値＝0°］

を入力する．さらに

α： 視野の広さ［標準値＝30°］

を入力する．なお視野の広さを入力するときに参考とするため，投影面の一辺の長さの半分がシュバルツシルト半径の 10 倍になるような角度を計算して，“適当な角度”として表示するようになっている．

サブルーチン＊GRAPH へ移って，グラフィック画面の初期設定，表題と日付の表示，枠と目盛りの表示を行なった後，サブルーチン＊COOD で座標格子を描くかどうか聞いてくる．描かない（リターンキー）を選択しても，シュバルツシルト半径内は赤で塗りつぶし，またシュバルツシルト半径の3倍の半径の円: 最終安定円軌道は必ず描くようになっている（以下の図を参照）．

ここまでは第3回のとほぼ同じである．

一度，メインルーチンへ戻る．

一応，視点の位置に関して確認を取った後，やっと初期条件設定サブルーチン＊IC へ入る．最初に相対論かニュートンかを選択して，テスト粒子の初期値を入力していく．すなわちまず

R_0： 初期半径［標準値＝$10r_g$］

φ_0： 初期方位角［標準値＝0°］

V_0： 半径方向の初速度［標準値＝0］

を入力する．続いて，参考のために円軌道の回転速度が表示された後，

$V_{\varphi 0}$： 回転方向の初速度［標準値＝0］

を入力する．

さらに計算上都合のよい時間幅を表示した後，

DT_0: 時間ステップ

を聞いてくる．ここでリターンキー［標準値］を押せば，可変時間きざみが設定される（中心からの距離によって計算の時間ステップを変更する）．最後に，

$TEND$： 計算終了時刻

を入力する．リターンキーを押せば，大体半回転から1回転後に計算を停止する．

計算の開始は，再びメインルーチンへ戻って初期条件の確認を取った後，リターンキーで実行される．サブルーチン＊RKG が，ルンゲ・クッタ・ギル法によって微分方程式を解く中心部分である．紙数の制限を口実にこの部分の説明は省略しよう（参考文献）．

プログラム実行中は，粒子の位置と諸量を時々刻々と表示する（図1）．表示する値には，時刻，位置，速度など以外に粒子の単位質量当りの角運動量 L とエネルギー E がある．これらは両方とも保存されるはずの量であり，一定かどうかが，計算精度のチェックになる．E は (8) 式にしたがって計算されるが（粒子の静止質量エネルギーを含んだ値），ニュートン力学を選択すると $E=\frac{1}{2}\left(V^2+\frac{L^2}{r^2}\right)-\frac{1}{2r}$ で計算される（静止質量エネルギーを含まない）．なお図1では可変時間きざみにしているので，粒子を表す点は等時間間隔ではない．

終了後リターンキーを押せば，計算を続行していく（図2）．図2から，近日点（近ブラ点？）がどんどんずれていること，何周しても軌道が閉じそうにないことがわかる．

一方，最終安定円軌道の半径 ($3r_g$) から円運動の回転速度より少し小さな回転速度でスタートすると，軌道がブラックホールへ落ち込んでいくことがよくわかる（図は省略，というより撮り忘れました）．たとえば，降着円盤の内縁からブラックホールに吸い込まれるプラズマ塊の軌道がそうなるだろう．

図3はニュートン力学を選択し，時間きざみを固定した場合で，粒子を表す点は等時間間隔になっているのだが，数値的な誤差のために中心近くで弾かれている（E が変化していることに注意）．可変時間きざみにすれば，図4のようにちゃんと楕円になる．念のため．

また視野などを適当に選択すれば，空間の歪みと合わせて，図5のように表示することもできる．

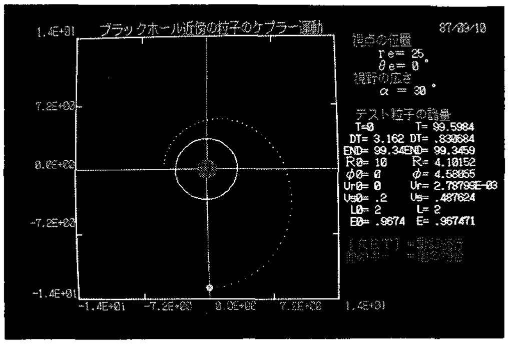

図 1 計算が終了した段階．中央の円盤はブラックホール，少し外側の円が最終安定円軌道を表す．テスト粒子の最初の位置は小さな円で，その後の位置は点で示されている（等時間間隔ではない）．テスト粒子の諸量の内，左側が初期値，右側が現在値である．角運動量 L とエネルギー E は保存されている．なおエネルギー E は粒子の静止質量エネルギーを含むため正の値をとっている．

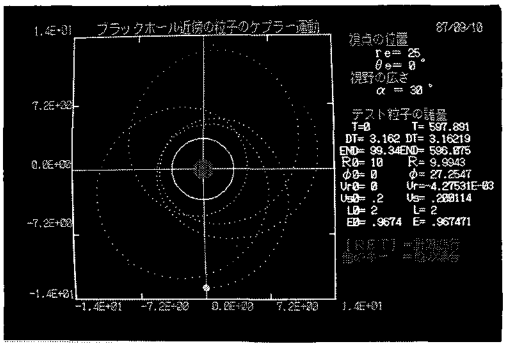

図 2 図1を続行したもの．軌道が閉じないことに注意．

4. 脱軌道用作動体

『竜の卵』という SF の中に，極めて細長い楕円軌道を描いて中性子星をまわる“脱軌道用作動体”というものが出てくる．これはもともとは，さしわたし 100 km ほどの小惑星で，それに磁気単極を打ち込んで直径 1 km の超高速密度の塊に凝縮したという設定である．この脱軌道用作動体は，中性子星調査隊を中性子星近傍の同期軌道に引き下ろすために使われた．関係する物理量の設定は以下のようになっている．

★中性子星＜竜の卵＞

質量＝0.5 太陽質量	周期＝0.1993 秒
直径＝20 km	表面重力＝670 億 G
自転＝5.018 回転/秒	表面磁場＝1 兆ガウス

★脱軌道用作動体

楕円軌道の周期＝4.56 分

近星点＝406 km（円軌道周期＝0.1993 秒）

遠星点＝10 万 km（円軌道周期＝12.82 分）

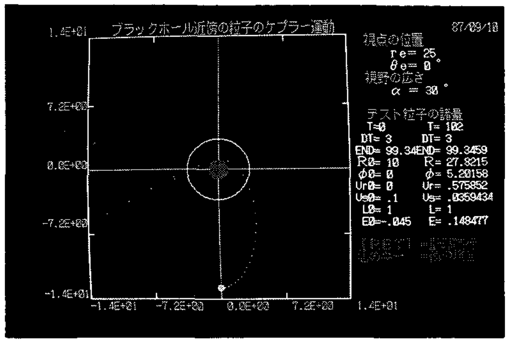

図 3 ニュートン力学で時間きざみを固定した場合の例．計算誤差のため中心近くで弾かれている．エネルギーが負（重力的に束縛）から正（自由）に変化している．

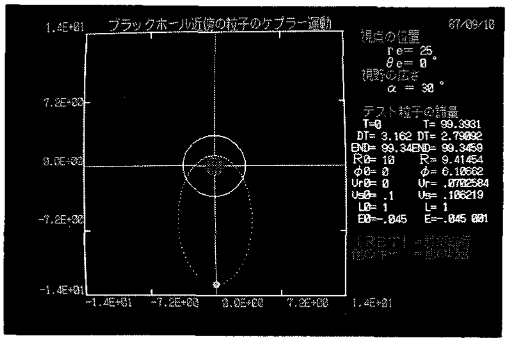

図 4 図3と同じパラメータで可変時間きざみにした場合．ちゃんと楕円軌道になる．

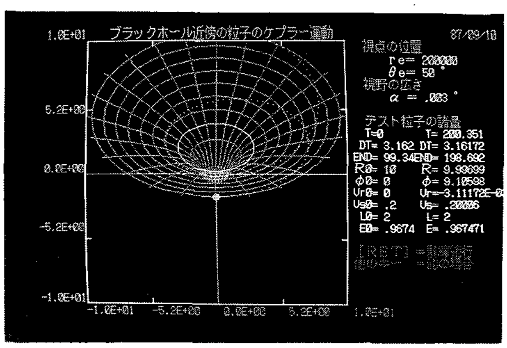

図 5 時空の曲がりを仮想3次元超空間に投影し，座標格子を描いた場合の例．

これらから，＜竜の卵＞のシュバルツシルト半径が，

$r_g=1.47$ km

であり，したがって脱軌道用作動体の軌道が，

近星点＝$275r_g$

遠星点＝$6.8\times10^4 r_g$

離心率＝0.99596

となることがわかる．

中性子星の質量や軌道長半径，離心率などを (1) 式に

代入すると，近星点移動角 $\delta\varphi$ として，

$$\delta\varphi=0.034\ \text{ラジアン}=2^\circ$$

が得られる．(1) 式の近似式がなんとか使えるぐらいの値だろうか．

この脱軌道用作動体の軌道をシミュレーションするための初期値はつぎのように導ける．

初期値として，位置（動径，方位角）$=(r_0,\ \varphi_0)$ と速度（動径速度，回転速度）$=(v_0,\ v_{\varphi_0})$ が必要だが，方位角は一般性を失わずに 0 とおけるし，遠星点で初期値を与えることにすれば，そこでの動径速度も 0 とおける．また遠星点の動径距離は $6.8\times10^4 r_0$ である．

問題は遠星点での回転速度だが，これは以下のように求められる．まず角運動量を求める．(8) 式のエネルギーは，遠星点でも近星点でも等しいので，近星点に添え字 1，遠星点に添え字 2 をつければ，

$$E^2=1-r_g/r_1+(1-r_g/r_1)L^2/(r_1^2c^2)$$
$$=1-r_g/r_2+(1-r_g/r_2)L^2/(r_2^2c^2)$$

が成り立つ．ここで動径速度は近星点でも遠星点でも 0 としてある．この式に近星点距離と遠星点距離を代入すると，角運動量が求まる：

$$L^2/r_g^2c^2=275;\quad L/r_gc=16.6$$

したがって結局，遠星点での回転速度は

$$v_{\varphi_0}/c=L/r_2c=0.000244$$

となる．以上ちょっとマニアックなおまけでした．

ブラックホールの周りでは楕円軌道が閉じないことや，最終安定円軌道の半径より内側では粒子が円運動できないことなど，強重力場中での粒子の振舞いをデモするには，パソコンの使用は非常に印象的だと思う．もっとも図 2 の軌跡は，なんかの加減で中性子星に捕まった小惑星だとか，活動銀河中心核の超大質量ブラックホールにとらわれた星屑（潮汐力で壊された破片）だなどと想像するだけでも楽しい．

参考文献

ロバート・L・フォワード『竜の卵』(山高　昭 訳) 早川文庫 (1982 年)

小島紀男・町田東一『パソコン BASIC 数値計算 I』東海大学出版会 (1982 年)

追記：今回のプログラムも今まで同様 98 系のパソコンで動きます．プログラムリスト希望の方はマシーンタイプ・性能（ディスクドライブ関係）等を記して，

〒543 大阪市天王寺区南河堀町 4-88
大阪教育大学地学教室
福江　純

までどうぞ．

お　知　ら　せ

東レ科学技術賞および研究助成候補者募集

上記について東レ科学振興会より本会あて推薦依頼が来ています．希望者は，学会庶務理事までご連絡下さい．(学会推薦の締切りは共に 10 月 25 日です) 募集の要項はつぎのとおりです．

科学技術賞……(1) 学術上の業績が顕著なもの
(2) 学術上重要な発見をしたもの
(3) 重要な発明をして，その効果が大きいもの
(4) 技術上重要な問題を解決して技術の進歩に大きく貢献したもの

賞　内　容……金メダル及び副賞 300 万円．

研究助成金……科学技術の基礎的な研究に従事し，その研究の成果が科学技術の進歩・発展に貢献するところが大きいと考えられる研究を行なっている研究者，またはそのグループに対し総額 1 億円前後，1 件 1,000 万円程度．但し，とくに重要と認められる研究については，3,000 万円程度まで助成が考慮されます．

贈呈期日は双方とも昭和 64 年 3 月の予定．

名古屋大学理学部物理学教室教官公募

1. 公募人員：助手　1 名
2. 所属部門：宇宙物理学研究室（U研）
3. 専門分野：赤外線天文学実験
4. 着任時期：決定後できるだけ早い時期．
   任　　期：5±2 年
5. 提出書類：履歴書 1 通．研究歴，研究計画，論文リスト，主要論文別刷，各 2 部．推薦書または本人について所見を求めうる人の氏名（1～2 名）．
6. 公募締切：1988 年 10 月 15 日（土）
7. 宛　　先：〒464-01 名古屋市千種区不老町
   名古屋大学理学部 物理学教室
   主任　長岡洋介
   公募に関する問合せ先：同教室，宇宙物理学研究室
   松本敏雄
   電話番号　052—781—5111
   内線　2452
8. その他：封筒に“赤外線天文学実験助手応募書類在中”と朱書の上，書留で送付のこと．

☆　　☆　　☆