目で視る相対論 6.　光の路

福　江　　純*

1.　光線の湾曲

一般相対論の検証のためにアインシュタイン自身が提案した 3 つのテストが，(1) 重力場中での時間の遅れ，(2) 光線の曲がり，そして (3) 水星近日点の移動である．このうち (2) の光線の曲がりは，1919 年の日食の際に，エディントン率いるイギリス観測隊が，実際に太陽のまわりに見える星の位置がずれていることを確かめ，アインシュタインと相対論の名を世界に知らしめたやつである．

重力場が弱い場合に，質量 M の天体の中心から，最短距離 p (近星点距離) のところを通る光線の曲がる角度 $\delta\varphi$ は，

$$\delta\varphi=\frac{4GM}{c^2p} \qquad (1)$$

と近似される (図 1)．この式は相対論のテキストには必ず出ている．が，ここで扱いたいのは，前回考えた質点の運動の場合と同じく，重力場が強い一般的な場合である．

2.　光線の経路

一般相対論によれば，質量 M の天体の周囲での光線

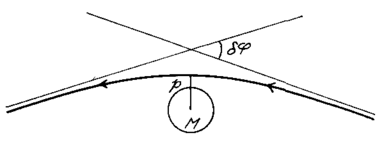

図 1　光線の湾曲.

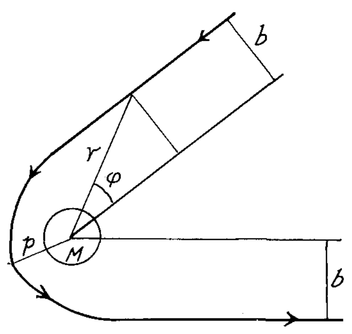

図 2　強い重力場中での光線の経路. 衝突パラメータ b と近星点距離 p.

* 大阪教育大学　Jun Fukue: Visual Relativity 6. Light Path

の経路を表す式は，図 2 に示したような極座標 (r, φ) を用いて，

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{3GM}{c^2}\frac{1}{r^2} \qquad (2)$$

という微分方程式の形に表せる．右辺が相対論的な補正項で，右辺をと 0 置けば，(2) 式は直線を表す式になる (ニュートン力学では光線は直進する)．

光線の軌跡の性質をちょこっとみるために，(2) 式を積分してみよう．(2) 式の両辺に $d(1/r)/d\varphi$ を掛け，φ で積分して整理すると，

$$\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)=\frac{1}{b^2} \qquad (3)$$

という中間積分が得られる．ここで $r_g=2GM/c^2$ は何度も出てきたシュバルツシルト半径だ．(3) 式の右辺は積分定数だが，b は衝突パラメータという物理的意味を持っている (図 2 参照)．実際，左辺第 2 項の中の，シュバルツシルト半径のくっついた相対論的な項を落とせば，(3) 式の解が，原点から b の距離を通る直線: $r\cos\varphi=b$ であることは容易に確かめられる．

さて (3) 式を眺めてみると，左辺の第 1 項は負にはならないはずである．また右辺も正の量である．したがって，ある動径 r で (3) 式が成り立つ (すなわち軌跡の解が存在する) ためには，右辺が左辺の第 2 項よりも大きいか等しくなければならないことがわかる．ところで左辺の第 2 項は，微分してみると，$r=1.5r_g$ で極大値 $4/27r_g{}^2$) を持つことがわかる．このシュバルツシルト半径の 1.5 倍の半径は，そこで回転角方向に発射された光が時空の曲がりから脱出できなくなるギリギリの場所であるため，光子半径と呼ばれている．質量を持った粒子の場合で言えば，最終安定円軌道の半径に相当するものである．

さて近星点では左辺第 1 項はゼロ．これと左辺第 2 項が極大値を持つことから，近星点が存在するためには，右辺 $1/b^2$ がその極大値より小さくなければならないことになる．その境目として，衝突パラメータ b には，ある臨界値

$$b_c=\sqrt{27/4}\,r_g\sim 2.60r_g$$

が存在する (b が臨界値の時の近星点距離 p は $1.5r_g$ である)．そして b がこの臨界値より大きければ，無限遠からやってきた光線はブラックホール近傍で曲げられた後，再び無限遠まで到達できるが，この臨界値より小さければ，近星点が $1.5r_g$ より内側になり，光はブラ

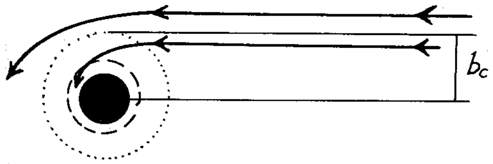

図3 シュバルツシルト半径 r_g，光子半径 $1.5r_g$，臨界衝突パラメータ $2.6r_g$．

ックホールに吸い込まれてしまう（図3）．したがって無限遠からみた場合のブラックホールの見かけの大きさは，r_g を半径とする円ではなく，$b_c \sim 2.6r_g$ を半径とする円になる．ここらへんの議論，詳しくは，Luminet, J.-P. 1979, *Astron. Astrophys.*, **75**, 228. を参照して欲しい．

上の (3) 式をもう一回積分すれば，解析的には光線の軌跡が得られるのだが，数値的には近星点の所で発散が起こったりして具合いが悪い．そこで数値的に軌跡を求めるには (2) 式にもう一度戻ろう．

3. 数値計算の初期条件

さて数値的に解く便宜上，(2) 式の2階微分を2つの1階微分に分けよう．中心の天体の質量をシュバルツシルト半径 r_g で表し，補助変数として，

$$u=\frac{1}{r} \tag{4}$$

$$v=\frac{du}{d\varphi} \tag{5}$$

を導入すると，(2) 式は

$$\frac{du}{d\varphi}=v \tag{6}$$

$$\frac{dv}{d\varphi}=-u+\frac{3r_g}{2}u^2 \tag{7}$$

と書き換えることができる．この (6), (7) 式を，適当な初期条件のもとにルンゲ・クッタ法などで数値積分すれば，光線の軌跡が φ の関数として得られる．なおプログラム中では，シュバルツシルト半径を1と置いてある．

ここで (6), (7) 式を解く際の初期条件について，一言触れて置くべきだろう．(6), (7) 式は1階連立微分方程式だから，2つの初期条件（たとえば u と v それぞれの初期値）が必要である．一方，実際的な条件としては，光線を発射する場所と発射する方向を与えるのが適当だろうから，それらを u と v の初期値に変換しなければならない．そこのところを図4を参照に導こう．

図4の座標系で，(r_0, φ_0) の位置に光線発射器を設置し，x 軸方向から測って ϕ_0 の方向に光線を発射したとしよう．このとき u の初期値は，

$$u_0=1/r_0 \tag{8}$$

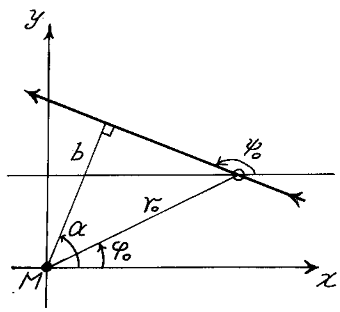

図4 光線の初期位置 (r_0, φ_0) と発射方向 ϕ_0．

である．これはあきらか．

一方，v の初期値を求めるには，$v=d(1/r)/d\varphi=-r^{-2}(dr/d\varphi)$ なので，$dr/d\varphi$ の初期値を知る必要がある．光線を発射した方向の直線の式は，図4中の記号を使って，$r\cos(\varphi-\alpha)=b$ と表わせる．この式を φ で微分して，

$$dr/d\varphi=r(\tan\varphi-\tan\alpha)/(1+\tan\varphi\tan\alpha)$$

となる．ここで $\tan\alpha\tan\varphi=-1$ に注意すると，結局，

$$v_0=-\frac{dr}{r^2d\varphi}=\frac{\tan\phi_0\tan\varphi_0+1}{\tan\phi_0-\tan\varphi_0} \tag{9}$$

が v の初期値として得られる．

4. プログラムと実行例

今回のプログラムは，光線の軌跡を計算してディスプレー上に表示し，ブラックホール周辺の光線の湾曲を視覚化するものである．

プログラムを実行すると，説明文が表示されるのはいつもと同じ（2面）．リターンキーで自動的に標準値が設定される．

初期設定の部分では，まずニュートン力学の場合の光線の軌跡（すなわち直線）も描くかどうか尋ねてくる．つぎに座標格子を描くかどうか尋ねてくる．必要なら直角座標か極座標を描くことができる．さらにビーム（ようするに懐中電灯のでかいの）の最初の位置を指定するように要求してくるのでシュバルツシルト半径を単位として入力する．表示画面はビームの位置の2倍の広さに設定してある．

後は自動的に画面の設定が行われる．すなわちいくつかの量を計算した後，サブルーチン＊GRAPH へ跳んで，グラフィック画面の初期設定，表題と日付の表示，枠と目盛りの表示を行ない．座標格子などのサブルーチン＊COOD へ移り，指定があれば座標格子を描き，ブラックホールを塗って，懐中電灯を描き，最後にカレント情報を表示する．

で，いったんメインルーチンに戻った後，無限ループに突入し，サブルーチン＊START でキーボードからの

入力待ち状態になる．この段階の画面が，図 5 である．

図 5 の中心の丸がブラックホールを表しており，右寄りの小さな丸にピット出たのが，ビームで，一応ひげの方向に光線が発射されることになっている．

画面右側の情報は，上から，まずカーソル移動キーでビームの位置を上下左右に変えられることを示している．最小移動量は表示画面の差し渡しの 100 分の 1 に設定してある．またテンキーの 4（左回り）と 6（右回り）でビームの向きが変えられることを表している．最小移動角度は 5° に設定してある．

リターンキーで光線で発射される．A/a を押せば，自動的に最小移動角度の 2 倍毎（すなわち 10° 毎）に 360° 方向にビームが連続発射される．また S/s で最初から再スタートができる．

図 5 の画面の右下には，ビームの現在の位置が直角座標と極座標で，また現在向いている方向が x 軸から測った角度で表示される．

いろいろな実行例が図 6 から図 13 である．

図 6，図 7，図 8 は，ビームをブラックホールからそれぞれ $10\,r_g$，$4\,r_g$，$2\,r_g$，の距離に置いて，光経を 10° 毎に自動発射させたものである．したがってビームから発射された光線の本数はどれも 36 本だが，ビームの位置がブラックホールに近付くにつれ，ブラックホールに吸い込まれる光線が増えるために，見かけの本数が減っているのがわかるだろう．またブラックホールと反対の方向に当射された光線はほとんど直線に近いこともわかる．

図 9 は，ビームをシュバルツシルト半径の 1.5 倍，すなわち先に述べた光子半径に置いて，円周方向に光線を発射したものである．光速で走る光は，パソコンの電源が切れるまでブラックホールの周りを回り続ける．

光線の軌跡が直線からどれくらいずれるかを見るためには，直線も同時に描くように選択すればよい．図 10 で，実線は光線，破線は直線（ニュートン力学での光線）を表す．

【バグ】 最後はバグのオンパレード．図 11，図 12 はその一例．どうも第 4 象限で相性がよくない．これは数値計算のステップ（角度 φ 方向）か三角関数に問題があるのだと思うが，まだこのムシは残っている．

またブラックホールの中からは光でさえも出てこれないというのが，いまや常識だが，このプログラムに限っては例外で，地平面のすぐ内側からなら出てこれる（図 13 $R\phi$ の値に注意）．これは初期ステップが荒いためのバグ．

ま，他にもバグには不自由せず，ムシ取りもそれなりに勉強になると思う．

【発展問題】 なお光が“曲がる”と言ってきたが，本当

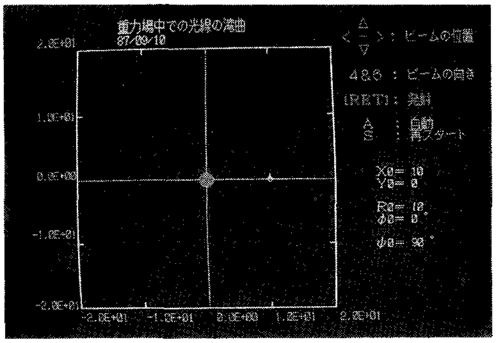

図 5　入力待ち画面.

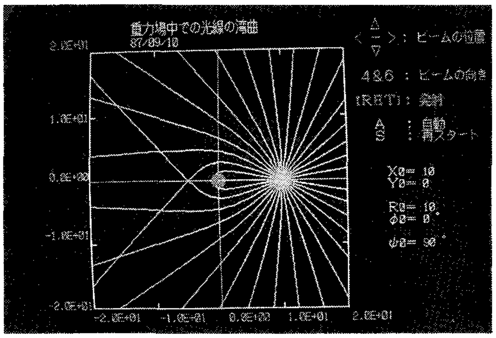

図 6　$10\,r_g$ で全方位自動発射.

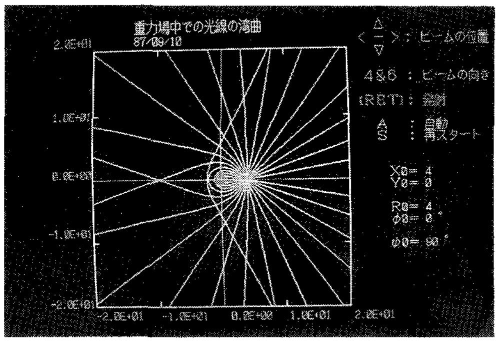

図 7　$4\,r_g$ で全方位自動発射.

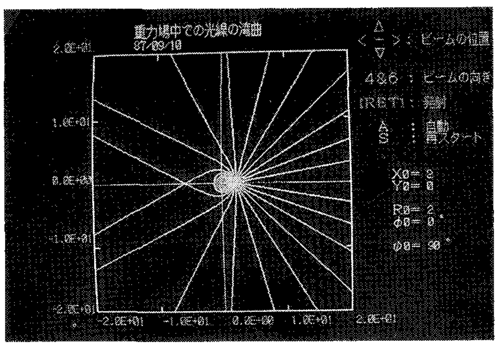

図 8　$2\,r_g$ で全方位自動発射.

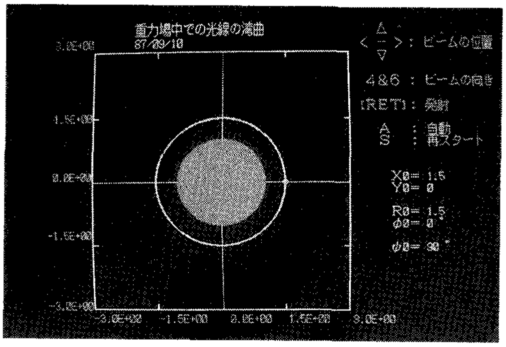

図 9 光子半径 ($1.5 r_g$) で円周方向に発射.

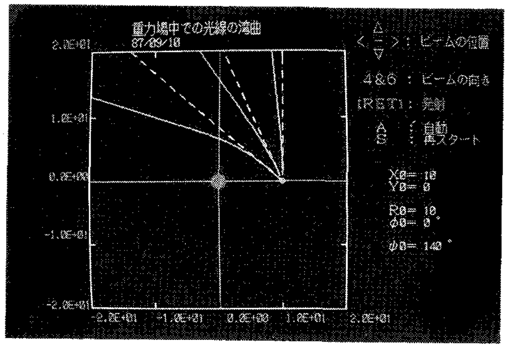

図 10 光線の軌跡の曲がり具合い.

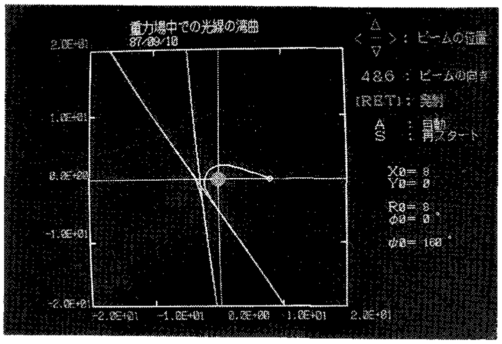

図 11 バグその 1. きざみに問題があるらしい.

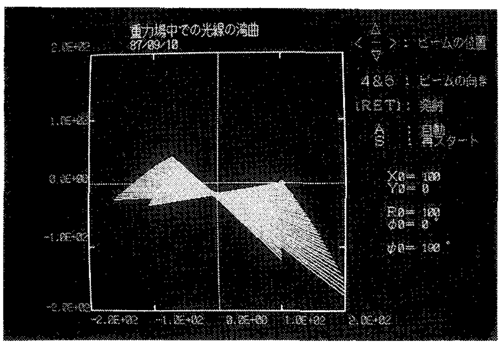

図 12 バグその 2. ブラックホール CG?

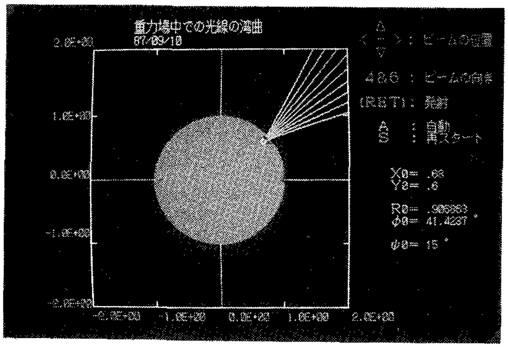

図 13 バグその 3. 相対論の常識を破る!

は曲がった時空間の中を“直進”していると言う方が,相対論の言葉では正しいのだろう.ここで“直進する”というのは,その経路があらゆる経路の中で最短距離であるということだ.このことは,ケプラー運動のプログラムのように,時空間の曲がりのプログラムとドッキングさせればより視覚化できるだろう.

またこのプログラムでは,光線の経路を初期値問題として扱ったが,経路を,光の発射点と到達点を決めた境界値問題として考えることもできる.そこらのところは,たとえば石原藤夫著『銀河旅行と一般相対論』(講談社ブルーバックス)などを参考にされたい.

その他,ブラックホール近傍での光線の伝播に関しては,同一位相での光波面の表示や,いろいろな場所から見たときのブラックホールの見かけの大きさ,赤方偏移との組合せ,重力レンズなどなど,発展問題は枚挙にいとまがない.

雑 報

9月27,28日の2日間,国立天文台(三鷹)において,『赤外線検出器とその周辺技術』のワークショップを開催した.

参加者はメーカーや研究所,大学をまじえて,42名で19個の講演と,総合討論が行われた.最近のわが国,および海外における赤外線検出器の進展,および各大学,研究所での天文研究者による技術開発への参入を反映して,実験データを基にした議論が活発に行われた.とりわけ若い研究者が,実験,開発の主力になっているのがうかがえ,10年前の研究会に比べて,わが国の赤外線天文学の基盤が強固になりつつあることを感じた.

集録は来年はじめに出す予定である.なお,本ワークショップは科学研究費 総合研究A『宇宙線による宇宙空間物理学の研究』(宮本重徳代表)の援助を受けました.

(世話人 松本敏雄,佐藤修二)