

コンピューターシミュレーションが切り拓く天文学——星から宇宙の果てへ—— (7)

## 数値的相対性理論

中村卓史\*・大原謙一\*\*

一般相対性理論の基礎方程式は解析的に扱うことは極めて難しい、これまで一般相対論的な現象の説明は非常に制約されてきた。しかし最近のスーパーコンピューターの目ざましい発達により、一般相対論の“一般的”な問題を数値的に解明することが可能になってきている。ここではその一例として、中性子星の合体によるブラックホールの形成の超大シミュレーションを紹介しよう。

### §1. 一般相対性理論とスーパーコンピューター

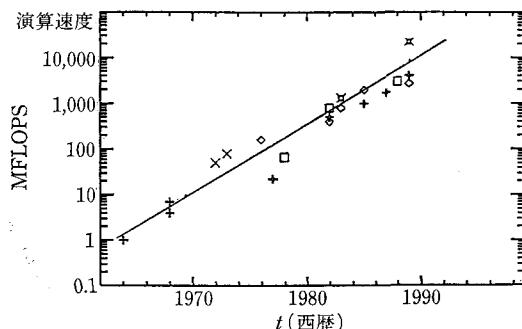
コンピューターの進歩については、すでに梅村氏(天文月報1990年1月号)が書いているが、図1にもう一度示す。ここでは、縦軸にスピードをMFLOPS単位の対数目盛で、横軸に西暦をとって、各印は、当時、群を抜いて速かったスーパーコンピューターである。実線は、

$$\text{演算速度} = 10 \text{ MFLOPS} \cdot \exp(0.3(t-1970)) \quad (1)$$

であり、計算機のスピードが、インフレーション的(指数関数的)に増大して来ている事を示している。(1)式で $t=1990$ 年とすると、スピード $\sim 2$  GFLOPSとなる。

現在、主記憶 $\sim 500$  Mbyte、スピード2 GFLOPSのスーパーコンピューターが存在しているが、これが、一般相対論に対して、どういう意味を持っているのだろうか?

一般相対論と言えば、“むずかしい”とか“ふくざつ”とか、読者のイメージであろう。実際、その通り、解くべき方程式は、大変複雑だし、未知数の数(約60ケ)も多い。しかし、現在のスーパーコンピューターの能力は、この複雑さと多量のデータを処理できるレベルに達して来ているのだ。一般相対論の基礎方程式は非線型偏微分方程式であるが、数値的には微分を差分にして解くのが一般的である。そこで、一般相対論の“一般的”



実線は演算速度 $=10 \text{ MFLOPS} \exp(0.3(t-1970))$ を示す。

図1 スーパーコンピューターの演算速度の進化。各印は違ったコンピューターを示す。

な問題すなわち、球対称とか軸対称等の対称性の全くない問題を考えてみよう。この時、 $x, y, z$ の各方向にどのくらいの格子(差分点)を取れるかが問題になる。 $N_x, N_y, N_z$ を各方向の差分点の数とすると $N_x \times N_y \times N_z \times 8 \text{ byte} \times 60 = 500 \text{ Mbyte}$ より $N_x \times N_y \times N_z = (100)^3$ となって、一方向に約100ケの差分点をとれる事がわかる。変数の数が多いはずなのに、意外に大きいと思われるかもしれないが、一方向にとれる差分点の数は、変数の数の立方根に逆比例するので、その効果は小さいのである。100を多いと思うか少ないと思うかは、人によるかもしれないが、決して少なすぎる数ではない。つまり、一般相対論の“一般的”な問題も現在計算可能になっているのである。

### §2. 2連星中性子星の合体と重力波

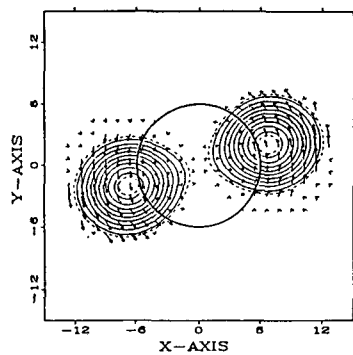
それでは、ここで、一般相対論の関係した巨大シミュレーションの1例を示す。それは連星中性子星の合体過程である。

現在までに、約10ケの連星系をなしているパルサー(=中性子星)が発見されており、この中の2つは、伴星の質量も中性子星に近い $1.4 M_\odot$ ( $M_\odot$ =太陽質量)を持っている。特にPSR 1913+16というパルサーについては詳しく観測がなされており、2つの中性子星の質量は、それぞれ $1.445 M_\odot$ と $1.384 M_\odot$ と考えられている。この2つの中性子星は、重力波を放出して、約1億年後に合体する。宇宙全体でこのような連星中性子星の合体が定常的にあるとすると、10 Mpcの距離内で、3年に1回程度起る事になり、重力波天文学の重要なテーマの1つになっている。合体した、中性子星の全質量は $\sim 3 M_\odot$ となるので、中性子星の最大質量( $\leq 2 M_\odot$ )を越える。したがって確実にブラックホールが形成されるので、一般相対論として、大変興味深い現象であるが、残念ながら、対称性を全く持たない系であるので(すなわち球対称とか軸対称でない)、今まで手の出しようがなかったのである。

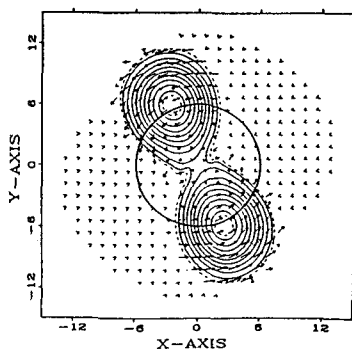
最近、我々は、連星中性子星の合体に対して、アインシュタイン方程式をポストニュートン近似をする事によって数値的に解く事に成功した。我々の方法では、

\* 高エネルギー物理学研究所 Takashi Nakamura

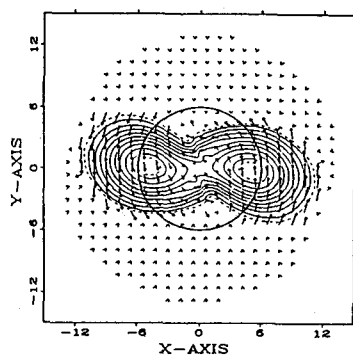
\*\* Ken-ichi Oohara: Numerical Relativity



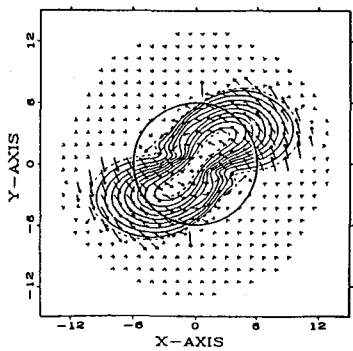
a:  $T=8.92, IT=1000$



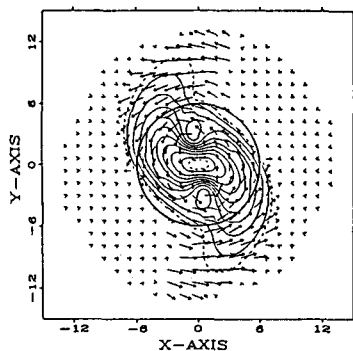
b:  $T=58.25, IT=5000$



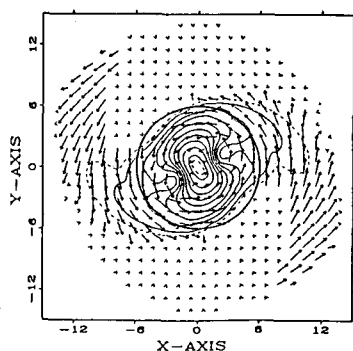
c:  $T=83.31, IT=7000$



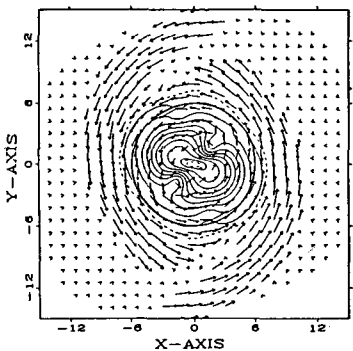
d:  $T=95.40, IT=8000$



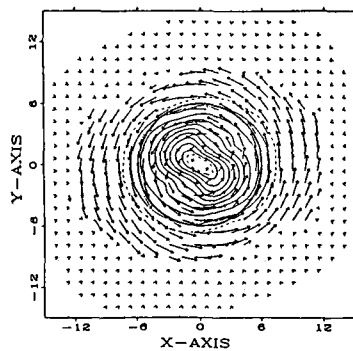
e:  $T=118.79, IT=10000$



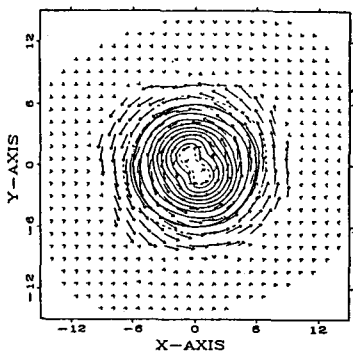
f:  $T=141.28, IT=12000$



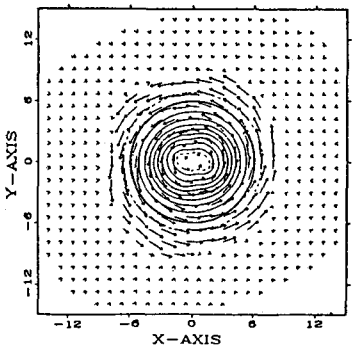
g:  $T=208.24, IT=18000$



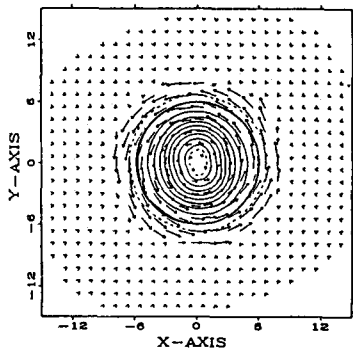
h:  $T=297.23, IT=28000$



i:  $T=409.70, IT=46000$



j:  $T=503.12, IT=64000$



k:  $T=600.91, IT=82000$

図2 連星中性子星の合体.  $T$ は時間,  $IT$ はステップ数. 実線は密度の等高線で最大値から  $1/10$  おきに描かれている. 矢印は速度ベクトルを示す. 太い円は, 系のシュワルツシルド半径 (重力半径) を示し, 物質が全てこの中に入れば, 系はブラックホールになったと考えられる.

ニュートニアンの流体コードとニュートン重力に、重力波による輻射の反作用を入れる形になっている。輻射の反作用は、重力波では、四重極放射からはじまるため、反作用ポテンシャル  $\phi_{\text{react}}$  は、

$$\phi_{\text{react}} = \frac{1}{5} \left( \frac{d^5}{dt^5} D_{ij} \right) x^i x^j, \quad (2)$$

$$D_{ij} = \int \rho (x^i x^j - \delta_{ij} r^2) dV \quad (3)$$

となるが、数値的に、 $D_{ij}$  の時間についての5階微分をいかにして求めるかも、今までの困難の1つであった。これについては、流体の連続方程式と運動方程式を用いると共に重力ポテンシャル  $\phi$  の時間についての1階微分  $\dot{\phi}$  と2階微分  $\ddot{\phi}$  も求めてやると、精度よく  $D_{ij}$  の5階微分を決定し得る事が明らかになった。

このようにして解いた重力波による輻射の反作用入りの連星中性子星の合体過程の数値シミュレーションを図2に示す。質量  $M = M_{\odot}$ 、長  $L = \frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1.5 \text{ km}$ 、時間  $T = \frac{GM_{\odot}}{c^3} = 5 \times 10^{-6} \text{ sec}$  が、それぞれ単位にとってある。用いたグリッド数は  $141 \times 141 \times 131$  の直交座標  $(x, y, z)$  で、 $z=0$  面に対しては上下対称を仮定する。誌面の都合で  $xy$  面の密度の等高線と速度ベクトル(矢印)のみを示す。それぞれの中性子星の中心密度  $\rho_c$  は  $4 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ 、質量は  $1.5 M_{\odot}$  である。計算は、約9万ステップまで行った。これは、我々の単位では  $t \sim 600$ 、実際の時間にするると約3 msecに対応する。計算時間はHITAC S820/80で約240時間のCPU TIMEを要した。したがって、1ステップあたりのCPU TIMEは約10秒であるが、これの大半は、3つのポアソン方程式を解くためのものである。

図3には、重力波のエネルギー放出量(上)と中心密度(下)の時間変化を示した。図2にもどると、まず最初に(図2-a)2のつの中性子星は、平衡状態で遠心力と重力がつりあいながら、ほぼ一定の角速度で回転している。したがって、図3の  $t \leq 50$  を見ればわかるように、重力波のエネルギー放出率はほぼ一定である。しかし、 $t \leq 100$  までには、全角運動量の約10%が重力波によって持ち去られる。そうすると、重力が遠心力より強くなるので、2つの中性子星の合体がはじまる。(図2-b~d) 図2のそれぞれに、描いてある円は、全系が、ブラックホールになった時の重力半径(シュワルツシルド半径  $= \frac{2GM}{c^2}$ ) である。図2-e~iで合体はさらに進むが、それと同時に過状の2本腕が外部に発達してくる。図2-j, kは、ほぼ最終状態を示している。中心に小さい棒状のものが回転しているが、全体としては、軸対称に近づいている。これは、重力波による輻射の反作用の効

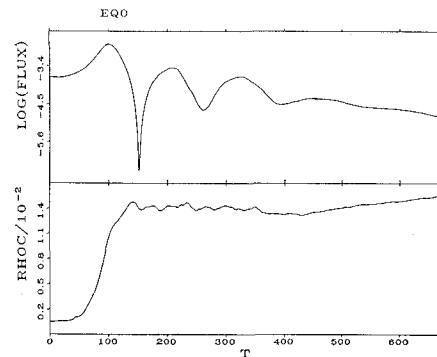


図3 重力波のエネルギー放出量(上)と中心密度の時間変化

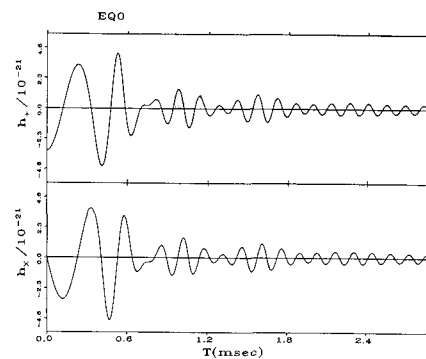


図4 我々から距離10 Mpcの所で連星中性子星の合体が起きた時に、地上に到達する重力波の波形。

果のためである。重力波のエネルギー放出量も図3を見ても分かるように、 $t \geq 400$  では、指数関数的に減少している。これは、系が、軸対称定常になりつつあるためである。(軸対称定常な系からは、四重極モーメントが時間変化しないので、重力波は放出されない。) 図2-kでは、ほとんど全ての物質が実線の円内に入っているの、最終的にはブラックホールが形成されたことになる。図4には、仮にこのような連星中性子星の合体が乙女座銀河団(～距離10 Mpc)で起きた時に、地球上で生じる重力波の振幅と波形を、重力波の2つの偏波成分( $h_y$  と  $h_x$ ) について、現実の時間の関数として書いた。このような重力波とレーザー干渉計で検出すべく世界中で実験が試みられているが、このようなシミュレーション結果は、検出装置の設計、データの分析等に欠くべからざるものとなっている。又理論家としては、このような数値計算が出来るとは、10年前には予想もできなかった。まさに夢の実現である。これもスーパーコンピューターの発達のおかげなのである。