

慣性閉じ込め核融合とガラパゴスのシミュレーション物理

矢 部 孝*・城之内忠正**・青木尊之***

1. はじめに

我々、慣性閉じ込め核融合 (ICF) を主として研究する者にとっては、天体物理は非常に親近感を覚える分野の一つである。核融合反応はもとより、超高密度、X線輻射、原子過程、超強磁場、はては最近ではレーザー・テラワット不安定性まで登場してきている。本稿では、シミュレーションの立場から、ICF で著者が多少なりとも関与した話題をいくつかとりあげ、天体との関連を見てみよう。

2. 多次元流体計算法

天体分野は数値計算法のガラパゴスであるとどこかで言った方があったのを記憶している。そうかといって、次々と新製品に移り変わる日本の消費者の様であっても困りものである。特に、ある分野では猫も杓子も TVD で、TVD にあらずば数値計算にあらずと言った声も良く聞かれる。これも極端である。ここで TVD を例にしたが、我々は何も TVD を使うことが悪いという積りはなく、盲目的に信じるのは良くないと言っているだけで、中身が分つてものを言っている人はそれでよい。これは研究者の評価にも言えることで、噂で“あの人は優秀な研究者だ”というのを鵜のみにして、その人の研究を全く知らないのいつの間にか噂が噂を呼びその評価が固定してしまう例があることは良くあることである。

ともかくも、我々はこの“ガラパゴス”という言葉をもっと良い意味に解釈したい。世の中に取り残されたようなものの中に新しいものが隠されているかもしれないからである。我々は根っからの天邪鬼で、世の中で話題になっていることはなるべくやりたくない。ここで紹介する数値計算法は、この天邪鬼の発想から生れたもので、従って世の中の流れから取り残されたガラパゴスの存在である。この手法に興味を持って下さるダーウィンのような方がいざれ現れ、広く世界に紹介して下さいを夢見ている。我々の手法は、余りにも簡単であるので、そんな簡単な方法が TVD のようないかにも難しそうなスキームと同程度かそれ以上の結果を出すなどは信じて貰えないかもしれないが、以下の例が多少なりとも説得力のあることを期待したい。

まず、もっとも単純な一次元線形の変曲型方程式によって、CIP の原理を説明しよう。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

の方程式の一般解は $f(x-ct)$ である。(1) 式の右辺がゼロでないときや c が定数でないときは $f(x-ct)$ は使えないが、非常に短いステップ Δt の間だけ、この近似を使うことは可能である。これは

$$f(x, t+\Delta t) \sim f(x-ct, t) \quad (2)$$

と書ける。離散化された数値解法では f はある有限の点 x_j, x_{j+1}, \dots 上でしか与えられていないので、(2) を使うには、この格子点以外での f の値が必要となる。このために、格子点間の $f(x)$ のプロファイルを決める必要がある。このとき、 $f(x)$ を直線で近似すると一次の風上差分を得る。三つの格子点を用いて二次曲線で近似すると、Lax-Wendroff 法⁴⁾を得る。四つの格子点を用いて三次曲線で近似すると QUICK(EST) 法⁵⁾を得る。このように、 $n+1$ 個の格子点で、 n 次関数を決める方法を Lagrange 補間と呼ぶ。

一方、これとは別にスプライン (自在定規) 補間もある。このときは、近似関数はいくつもの格子点に跨がらず、一つの格子区間で一つの関数となる。例えば、三次スプライン関数について、 $[x_{j-1}, x_j]$ の区間を近似関数 $F_j(x)$ で

$$F_j(x) = a_j X^3 + b_j X^2 + f_{j-1} X + f_{j-1} \quad (3)$$

$X = x - x_{j-1}$ と置く。ここで、 f_{j-1}, f_{j-1} は x_{j-1} での f の値、 f の一階微分を表わす。通常のスプライン法^{6), 7)}では、 a_j, b_j, f_{j-1} を x_j での値の連続性 $F_j(x_j) = F_{j+1}(x_j)$ 、一階微分の連続性 $F_j'(x_j) = F_{j+1}'(x_j)$ 、二階微分の連続性 $F_j''(x_j) = F_{j+1}''(x_j)$ を用いて決定する。ところが、これだと a_j, b_j, f_{j-1} を求めるために複雑なマトリックスを解く必要があり、一次元の時でもわかりにくいし、しかも必ずしも安定ではない。また、ベクトル計算にも向いていない。

我々は、近似関数を上記の様な人工的な滑らかさ (高階微分の連続性など) で決めるべきではなく、方程式を満足するように決めるべきだと考えた。このために、二階微分の連続性を犠牲にして、 f_j, f_j' を未知数に取り、自由度を増やした。通常 (1) 式は f に対する式であるが、これを空間的に微分して

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + c \frac{\partial f'}{\partial x} = 0, \quad (1')$$

* 群馬大工 Takashi Yabe, ** 核融合科学研 Tadamasu Johnouchi, 東工大総理工 Takayuki Aoki

を f' を決定する方程式とした(ただし, c が一定の時).
これは即ち, (2) 式を f' についても用いることを意味
する. こうして, 最終的には次の時間ステップのプロフ
ファイルは

$$f_j^{n+1} = F_j(x_j - c\Delta t) = a_j \xi^3 + b_j \xi^2 + f_j^2 \xi + f_j^1 \quad (4)$$

$$f_j^{n+1} = dF_j(x_j - c\Delta t)/dx = 3a_j \xi^2 + 2b_j \xi + f_j^2 \quad (5)$$

$$\xi = \Delta x - c\Delta t$$

によって決定される ($c > 0$ の場合のみを示す). $n, n+1$
は時刻 $t, t+\Delta t$ を表わす. 但し, a_j, b_j は二つの関数 F_j
と F_{j+1} の x_j 点での値と一階微分の連続性から

$$a_j = \frac{(f_j + f_{j-1})}{\Delta x^2} - \frac{2(f_j - f_{j-1})}{\Delta x^3} \quad (6)$$

$$b_j = \frac{3(f_j - f_{j-1})}{\Delta x^2} - \frac{(f_j + 2f_{j-1})}{\Delta x} \quad (7)$$

で与えられる. a_j, b_j は f^n, f'^n によって決まる. (4),
(5) 式から次の時刻の f^{n+1}, f'^{n+1} が決まれば, これか
ら新しい a_j, b_j が求まり, また (4), (5) を繰り返す.

これを用いて, 矩形波, 三角波の伝播を解いたのが図
1 (a) である. $c\Delta t/\Delta x = 0.2$ として 1000 ステップ後の
プロファイル (黒丸) と解析解 (実線) である. 矩形波に
ついては (4)~(7) に補間をチェックする操作が必要
である. より詳細は文献 3) 8) を参照して欲しい. 図
1 (b), (c) には参考のために, QUICKET, TVD^{9), 10)}
による解も示した. TVD は突起が発生するとこれを消
そうとするので, 三角波も矩形波になって行く.

また KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

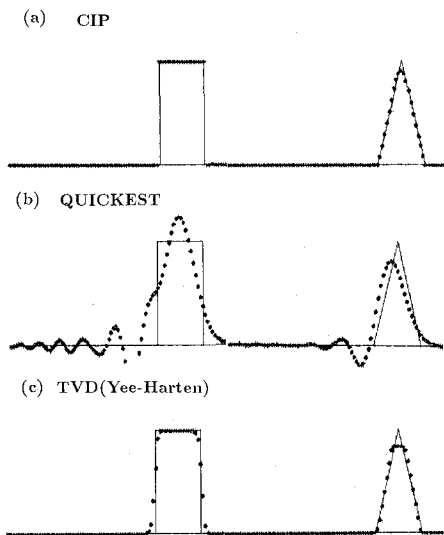


図 1 矩形波, 三角波の伝播. (a) CIP, (b) QUICK-
EST, (c) TVD. 実線は解析解.

に CIP を適用した例を図 2 に示した. 初期プロフア
イルは正弦波で, $U_0 = 0$ として $\delta = 0$ (a) と $\delta = 0.022$
(b) のときの解である. $\delta = 0$ で衝撃波解, $\delta \neq 0$ でソ
リトン波列となる. 図 2 (c), (d) には Yee-Roe-Davis
スキーム¹⁰⁾による TVD の解を示した. TVD は衝撃波
解をよく追従できるがソリトン解ではソリトンが消滅し
てしまう. 実をいうと, この方法は, 解=(Lax-Wendroff
法) $\times Q$ +(人工粘性スキーム) $\times(1-Q)$ というように, プ
ロファイルに依存して違ったスキームを切替えて使っ
ているだけである. 通常は $Q=1$ とし, 突起が現れると Q
 $=0$ にスイッチしこれを消そうとする. これではソリト
ンが発生するのを押えるのは当たり前である. また,
1987 年の時点で最良とされた Yee-Harten のスキーム¹⁰⁾
でも, $U_0 = 3$ で平行移動させると同様の事が起きる. 図
2 (e) は (b), (d) と同じ条件での結果である. 図 2
(f) には CIP の結果も示した. この傾向は, 突起が現
れる現象に共通している. ICF や天体物理で重要となる
円柱や球での収縮衝撃波なども同様の例である.

もう一つ非常に計算の難しい例は, 二次元の鍵型図形
の回転である. 図 3 は CIP 法による計算結果である.
CIP 法は一次元の CIP を時間分割法によりそのまま使
用できるが²⁾, 上で述べた方法を直接多次元のプロフア
イルに適用することもできる¹¹⁾. この結果は PPM¹²⁾
(Piece-wise Parabolic Method) や, その修正版¹³⁾より

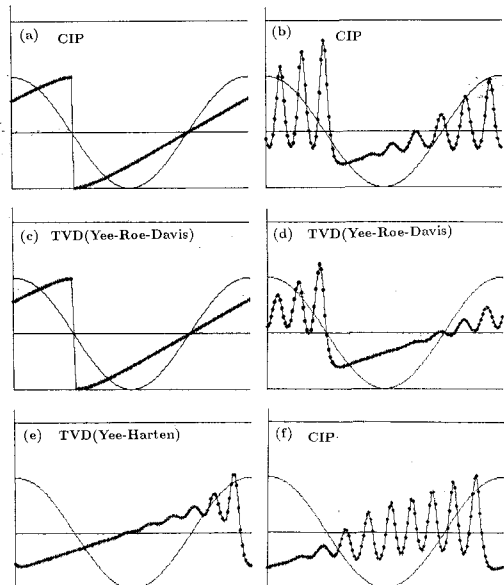


図 2 KdV 方程式の解. 実線は初期プロファイル. (a),
(c) は $\delta = 0$ で計算結果は $t = 1.6/\pi$ のもの. (b),
(d)~(f) は $\delta = 0.022, t = 3.6/\pi$. (a)~(d) で
は $U_0 = 0$, (e), (f) では $U_0 = 3$. (a), (b), (f)
は CIP. (c), (d) は Yee-Roe-Davis の TVD.
(e) は Yee-Harten の TVD (modified flux ap-
proach).

も、はるかに良い結果である。PPM などが複雑な flux-limiter を用いているのに対して、何ら人工的な操作を含まず素直に解いた CIP の方¹¹⁾が良い結果を与えるのは不思議な気がする。

3. レーリー-テラー不安定性

上記の方法の応用例として、ガラバゴスの如く、基本的であるが意外に勘違いされている例であるレーリー-テラー (R-T) 不安定性をとりあげよう。R-T 不安定性は軽い油の上に重い水を乗せたときに発生するもので、密度勾配のある領域が加速度運動しているときも同じ事が起こる。超新星爆発の際にも同様の不安定性が発生しているらしい。ICF でも同様である。

何はともあれ、この現象を上述の CIP 法でシミュレートした結果を見て貰いたい (表紙左図参照)。これは、 $\rho_1=1, \rho_2=0.3$ の二つの物質の境界に速度摂動を与え、

ρ_1 (左) \rightarrow ρ_2 (右) の方向に重力をかけた場合である。 ρ_2 の流れが ρ_1 の表面を波立たせ、図のようなマッシュルーム構造を形成する。これは、水面に風が吹くときに波が立つ現象と同じで Kelvin-Helmholtz (K-H) 不安定性という。このマッシュルーム構造だけで R-T 不安定性と思う人がよくあるが、そのような人のために右上図を提供しよう。左と何か違いがあるだろうか。実は、これは左の例で重力をゼロとした場合である。重力がゼロでも R-T がおこる？ 実は、右図の状態となったときの時刻は左下図の倍の時間がかかっているのである。すなわち、右図は最初の摂動が慣性運動していったとき K-H 不安定性が発生しただけなのである。

同様の現象を三次元で行なったものが右中央図である。マッシュルーム構造が殆んど目立たなくなった。これは一見すぐに説明が出来そうである。三次元だから R-T 不安定性の成長が早いから K-H が追い付かない？ これは、R-T の成長率を同じにすれば良いので、すぐに確かめられる。答えは否である。では三次元では K-H の成長率が遅い？ これも否である。これは、平板に風が吹く (二次元)、円柱に風が吹く (三次元) 場合の K-H の成長率を計算してみれば良い。確かに、この例では三次元の方が 30% ほど成長率が低い、これで説明できるほどの違いではない (30% 成長率を低くして行なった二次元の計算は右下図のようになる)。では三次元の方がどうしてマッシュルーム構造が出来にくいのだろうか。マッシュルームは K-H のせいではないのか。私はこれに対する解答を用意してはいるがここでご披露する程の自信は今無い。

4. 自己磁場生成

この問題も古くから天体と密接な関係がある。ICF で最も良く知られている熱電気効果 $V_N \times VT$ (N, T は密度、温度で、 \times は外積である) によるものである¹⁴⁾。しかし、これは天体物理ではこの論文よりも 20 年も前からバッテリー効果と呼ばれているものである。しかし、文献 14) ではこれが参照されていない。そのお返し、ICF で Tidman, Shanny¹⁵⁾ の不安定性として知られているものが、天体の Blandford の論文では¹⁶⁾ 参照なしに議論されている。

このバッテリー効果の物理的イメージはどこにも書かれていないようであるが、ここで私のオリジナルの物理モデルを紹介しよう。図 4 はこの模式図である。今、下部が高温、上部が低温であるときの A 点での電子の流れを考えよう。下からは高温の電子が流れてくるが、この電流は上からの低温で速度の遅い電子では中和できず、より密度の高い B 点での上からの電流と閉回路を作る (電流は密度 \times 速度である)。この微細な渦電流が空間全

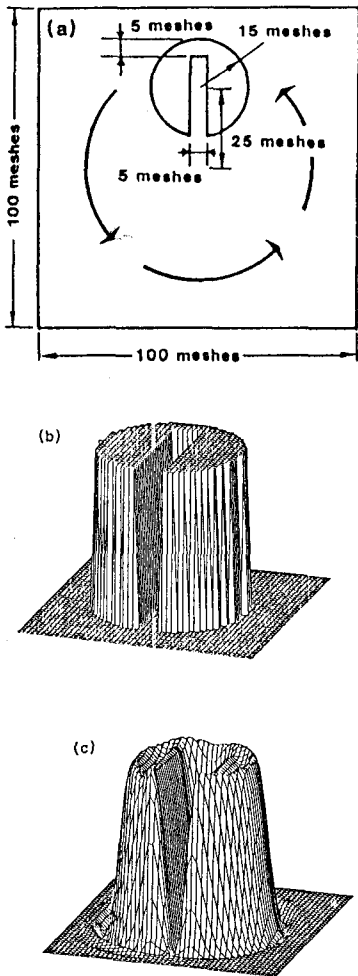


図 3 二次元鍵型図形の回転。(a) メッシュ配置, (b) 初期プロファイル, (c) CIP による一回転後の結果。

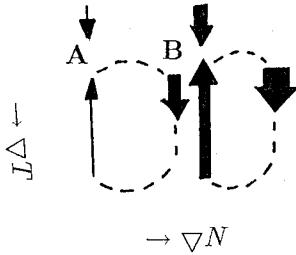


図 4 バッテリー効果の模式図.

体で形成され、磁場を生成する。これで、 ∇N と ∇T が直交すると磁場が発生することが理解できる。

$\nabla N \times \nabla T$ は磁場を発生させると同時に、流体に渦を発生させる。これは、流体の運動方程式に $\nabla \times$ を作用させると導ける。こうして、流体の渦と磁場の総量が保存される。このことの帰結として、前節の R-T 不安定性でも渦が発生すると同時に磁場が発生することが知られている¹⁷⁾。この他にも、種々の不安定性が磁場を作ったり、電子熱流の速度で磁場が運ばれたりすることが知られている。詳細は文献 18) 19) を参照してもらいたい。

5. ま と め

これ以外にもバラエティに富んだ自己磁場生成・増幅の問題と不安定性、原子過程の問題点とその計算手法、1~2万円のできるパソコンによるアニメーションとビデオ出力の方法など紹介したい話題が沢山あり、それを押えるのに苦労した。紙面に限られているにもかかわらず、もう二度とこの続編を書く機会もないかもしれないとのあせりから、色々なことを駆逐で説明してしまった。分りにくかったかもしれないが、ICF と天体物理の“ガラパゴス的”境界領域には、これからも魅力ある話題が沢山眠っているということさえ分って貰えればそれで充分である。

最後に、CIP の二次元、三次元プログラムの作成と計算に協力してくれた星野英昭君（群馬大、修1年）に感謝する。

参 考 文 献

- 1) H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, J. Comput. Phys. **61**, 261 (1985).
- 2) H. Takewaki and T. Yabe, J. Comput. Phys. **70**, 355 (1987).
- 3) T. Yabe and E. Takei, J. Phys. Soc. Japan, **57**, 2598 (1988).
- 4) P. D. Lax and B. Wendroff, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 217 (1960).
- 5) B. P. Leonard, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. **19**, 59 (1979).
- 6) G. Knorr and M. Mond, J. Comput. Phys. **38**, 212 (1980).

- 7) M. M. Shouri, J. Comput. Phys. **49**, 334 (1983).
- 8) T. Yabe, P. Y. Wang and G. Sakaguchi, Proc. Int. Conf. Computational Fluid Dynamics, Nagoya, Japan August, 1989; to be published in Computers & Fluids (1990).
- 9) A. Harten, SIAM J. Number. Anal. **21**, 1 (1984).
- 10) H. C. Yee, NASA Report TM-89464 (1987).
- 11) T. Yabe *et al.*, J. Phys. Soc. Japan (1990).
- 12) P. Colella and P. R. Woodward, J. Comput. Phys. **54**, 174 (1984).
- 13) J. B. Bell, C. N. Dawson and G. R. Shubin, J. Comput. Phys. **74**, 1 (1988).
- 14) J. A. Stamper *et al.*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1012 (1971).
- 15) D. A. Tidman and R. A. Shanny, Phys. Fluids **17**, 1207 (1974).
- 16) R. D. Blandford *et al.*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **204**, 1025 (1983).
- 17) T. Yabe and K. Niu, J. Phys. Soc. Japan **40**, 1221 (1976).
- 18) 矢部, 日本物理学会誌, 第38巻, 第6号, 474頁 (1983).
- 19) T. Yabe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **48**, 242 (1982) and **53**, 262 (1984).

お 知 ら せ

一般相対論に関する第6回マーセルグロスマン会議

主 催 日本物理学会, 日本学術会議
 期 日 1991年6月23日(日)~29日(土)
 場 所 国立京都国際会館
 〒606 京都市左京区宝池。
 内 容
 ◦ 重力を含む統一理論
 ◦ 量子重力理論と初期宇宙
 ◦ ダークマターと銀河形成
 ◦ 古典一般相対論
 ◦ 摂動法並びに輻射の反作用問題
 ◦ X線星, 中性子星, ブラックホール等の相対論的天体
 ◦ 計算機相対論
 ◦ 重力波検出実験
 ◦ 第五の力等の重力実験
 申込締切 1990年11月30日
 連絡先 〒606 京都市左京区北白川追分町
 京都大学理学部物理学教室 MG6 事務局
 電 話 075-753-3844
 F A X 075-711-9379

☆

☆

☆

☆