

れており、これは  $q=0.03$  に対応している。重力波の放出は当然小さい。

結論として、回転の効果によって爆発がどの様に変化していくか、同時に重力波の放出量、その波形等がどの

様に変化していくか調べる必要がある。爆発に至らない重力崩壊の発見は重力波によるしか方法はない。また (2) や (3) の場合であっても我々の銀河内で起こる場合その検出は可能であり、ニュートリノ検出との同時観測を通じて爆発機構の解明にきわめて重要である。

## ブラックホールの準固有振動と重力波放出

佐々木 節\*

### 1. はじめに

星の重力崩壊によるブラックホールの形成や超新星爆発などの現象では、相当量の重力波が放出されると予想されているが、その波形や放出量についての定量的な評価は、最終的には 3 次元の一般相対論の数値計算に頼らなければならない、むずかしい問題である。しかしながら、ブラックホール時空に小質量の試験粒子を打ち込んだときに発生する重力波については、比較的容易に計算することが可能であり、また、その結果を非摂動的な状況に外挿した答が簡単な場合の数値計算結果とよく一致することが知られている。そのため、ブラックホールの摂動解析を詳しく実行する事は、数値計算と相補的な意味があり重要となる。ここでは、ブラックホールが形成される時にどのような重力波がどの程度発生すると考えられているかについて、摂動論の立場から視てみたいと思う。

### 2. ブラックホールの準固有振動

重力崩壊が進み恒星を形成する物質が空間の非常に小さい領域に閉じこめられると時空が大きく歪みブラックホールができる。ブラックホールは、その中に入ると二度と出てこれない因果的に一方通行の面、事象の地平面 (event horizon) によって囲まれている。事象の地平面が一旦形成されると、元の恒星の構成物質の情報はすべて忘れ去られ、その時空構造は全質量  $M$  と全角運動量  $J$  のみによって特徴付けられる。これをブラックホールの唯一性定理という。通常、角運動量は  $J=Ma$  としてパラメーター  $a$  で表わすが、ブラックホールの角運動量には上限があり、 $a \leq M$  ( $J \leq M^2$ ) である (単位は  $G=c=1$  の重力単位系; 例えば [長さ] $=G$ [質量] $/c^2$ [質量]、[角運動量] $=G$ [質量] $^2/c$ [質量] $^2$  である)。一般の

$a \neq 0$  の場合をカー時空といい、 $a=0$  ( $J=0$ ) の場合をシュバルツシルド時空という。

さて、一般に星に限らずどの様な物体でも、その物体に特徴的な振動モード、固有振動モードが存在する。そして、物体に小さな振動を与えるとその固有振動数での振動が大きく増幅される。この現象を共鳴振動といい、固有振動モードは共鳴振動モードともいう。実は、一見通常の星とは全く異なったブラックホールにもそうした固有振動が存在するのである。但し、一つだけブラックホールの場合が通常の物体の固有振動と異なっているのは、その振動が時空の振動であるため必然的に重力波放出を伴い時間的に減衰して行く点である。そのため、この振動は準固有振動モード (Quasi-Normal Mode; 略して QNM) と呼ばれている。

ここで、ブラックホールの QNM がどの様な式で与えられるか、簡単のためシュバルツシルド時空の場合で考えてみよう。時空の揺らぎは計量  $g_{\mu\nu}$  の揺らぎ  $\delta g_{\mu\nu}$  で表わされるが、その内、重力波を表わす独立な成分は電磁波の場合と同様に 2 つある。そこでその 2 つをある 1 つの複素場  $\psi = \psi_+ + i\psi_\times$  で表わす。ここで、 $\psi_+$ 、 $\psi_\times$  は重力波の 2 つの独立な成分である。

さて、QNM はブラックホールの共鳴振動モードであるから、そのような振動は振幅が無限に小さい入射波によっても励起される。すなわち、QNM は図 1 の様なブラックホールへ入射された波  $\psi_{in}$  を考えたときに、その入射波の振幅  $A$  がゼロになる、という条件で決まる。式で書くと充分後の時刻  $t \rightarrow \infty$  で

$$\psi_{QNM} \sim \begin{cases} e^{-i\omega(t+r^*)}; & r^* \rightarrow -\infty \\ e^{-i\omega(t-r^*)}; & r^* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.1)$$

を満たす。この様な振動数は一般に複素数となる。図 1 の  $\psi_{in}$  でいうと、その複素振動数  $\omega_{QNM}$  は、複素  $\omega$  面での振幅  $A(\omega)$  の零点である。

どの様な QNM が存在するかは、ブラックホールの安定性と大きく関わっている。任意の振動数  $\omega$  の摂動に対してブラックホールが安定であるためには、 $t-r^*$

\* 京大基礎物理学研究所 Misao Sasaki: Quasi-Normal Oscillations of Black Hole and Emission of Gravitational Waves

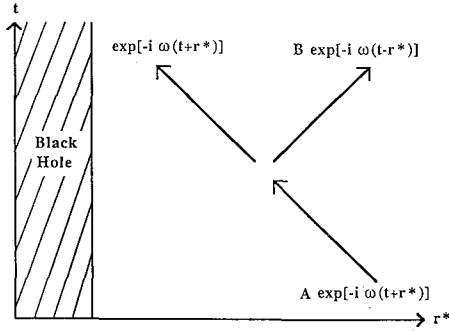


図 1 ブラックホール時空中の内向き波解 ( $\psi_{in}$ )

$\rightarrow +\infty$  で  $e^{-i\omega(t-r^*)} \rightarrow 0$  が成立する必要がある。すなわち、複素振動数  $\omega_{QNM}$  の虚数部は負でなくてはならない。そして実際これが成り立っていることが知られている。また、振幅  $A(\omega)$  には対称性  $\overline{A(-\bar{\omega})} = A(\omega)$  があり、 $\omega = \omega_{QNM}$  に対して  $\omega = -\bar{\omega}_{QNM}$  もまた QNM となる。結局、QNM 振動数は

$$\omega_{QNM} = \pm \sigma - i\gamma; \quad \sigma > 0, \gamma > 0 \quad (2.2)$$

と表わされる。

QNM 振動数の具体的な値は様々な人々によって計算されているが、シュバルツシルド時空の場合には解析的近似式が知られており、

$$\omega_{l,n} \equiv \pm \sigma_{l,n} - i\gamma_{l,n} \approx \frac{1}{3\sqrt{3}M} \left[ \pm l - i \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]; \quad n \geq 0 \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで  $l$  は重力波の角運動量で  $l \geq 2$  である。一般のカー時空では上のような簡単な近似式では与えられないが、計算によると角運動量パラメーター  $a$  が増加するに従って  $\sigma$  は増加し、 $\gamma$  は減少することが分かっている。

### 3. ブラックホールからの重力波放出

始めに述べたように、小質量の試験粒子によるブラックホールの摂動解析は、星の重力崩壊の精密な相対論的数値シミュレーションと相補的であり、具体的な観測や理論の良い指針となり得る。そのため、こうした摂動計算はこれまで様々な人によってなされてきた。

図 2 にその特徴的な結果を示す。この結果からも分かるように発生する重力波は一般に初期のバースト的部分とその後の減衰振動部分とからなるが、この減衰振動の減衰率は正に QNM のものに一致している。また、図 2 で明らかのように、 $a$  が大きいと振動数が大きくなり減衰率が小さくなるために、発生する重力波の量は非常に増大する。

現実の重力崩壊との対応で言うと、初期のバースト成分は恒星のコアが崩壊してブラックホールが中心に形成

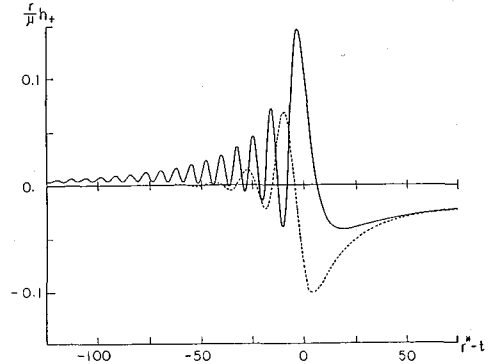


図 2 シュバルツシルド時空 (点線) と  $a/M=0.99$  のカー時空 (実線) からの重力波の波形 (文献 2) より転載).

される過程で発生する重力波に対応し、その後の減衰振動は恒星の残りの物質が形成されたブラックホールに降り積もって行く時に発生する重力波に対応すると考えられる。通常、重力崩壊に於て最も強く励起されるのは  $l=2, n=0$  のモードである。その振動数は太陽質量 ( $M_{\odot}$ ) を単位としてシュバルツシルドの場合、 $\nu_{2,0} = \sigma_{2,0}/2\pi \sim 10(M_{\odot}/M)$  kHz, 減衰時間は  $\gamma_{2,0}^{-1} \sim 0.05(M/M_{\odot})$  msec である。

実際の重力崩壊時に発生する重力波の量をこうした摂動計算の結果を外挿して評価すると、重力崩壊が軸対称的であれば恒星の静止質量の約 0.1% 程度、非軸対称的であれば数 % 程度が重力波として放出されると予想される。特に、もし形成されるブラックホールが極大のカー時空  $a=M$  か、それに非常に近い場合には、10% 以上の静止質量が重力波として放出される可能性もある。

この様に、恒星の進化の最終段階で起こる重力崩壊は宇宙に於ける重力波発生源として最も期待されている。しかし、もちろんここでの予想は摂動論を基礎にしたものであり、最終的には精密な 3 次元の相対論的数値シミュレーションを行う必要がある。また、摂動論的にも課題はいろいろ残っており、それらを一つ一つ解決していく必要がある。今後の重力波研究の発展を期待し、それが 21 世紀のはじめには訪れるであろう重力波天文学の時代の理論的基礎となることを願って、この小文を終える。

### 参 考 文 献

- 1) L. Smarr, in *Sources of Gravitational Waves*, ed. L. Smarr (Cambridge University Press, Cambridge, 1979) p. 245.
- 2) T. Nakamura, K. Oohara and Y. Kojima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **90** (1987) 1.