

変光星と非線形力学

田 中 靖 夫*

1. 非線形力学と天文学

ポアンカレと天体力学については三体問題を通して非線形力学に関係することはよく知られている。対流のモデルを簡単な非線形力学系として解析することにより、ローレンツは最初に図 2 に似た写像を示している。同じ頃、エノンによる 2 次元写像、上田による強制振動を含む非線形振動によるジャパニーズ・アトラクターなどの研究がある。1970 年代に入って、メイ、リー・ヨークにより、カオスの基本的な仕掛けが数学的に明らかにされた。特にリーとヨークが「周期 3 はカオスを意味する」と述べて以来、「カオス」は不規則の中に潜む規則性を引き出すうえで大事な観点となった。

1985 年に出版された *Chaos in Astrophysics*¹⁾ は天文学の分野の研究会報告の最初であろう。その後も非線形の効果を非線形力学の立場から検討した研究が脈動変光星、X 線星などで発表されている。ここでは天文学の分野で使われている非線形力学の基本的な概念を復習しながら、最近の非線形現象の研究の一端を紹介したい。

2. 非線形力学

2.1 力学系

物理学の力学 (メカニクス) には、運動の法則として、加速度と力の関係を比例関係とする運動の第二法則がある。この関係は加速度を速度の時間変化率と書いて、常微分方程式の組として表現できる。力の性質 (地表の重力、クーロン力、復元力など) により、微分方程式の解は位置と速度からなる空間の中で多様に振舞う。このように系の変動の法則を表す微分方程式の組を力学系 (ダイナミカル・システム) とよんでいる。

この力学系の例は、単に物理学のみではなく、現象の時系列を問題にする多くの分野でみることができる。最近のこの問題に関する解説書²⁾ に列挙してある分野を数えると、大小の分野を取り混ぜて 32 に及ぶ。しかしここでは、力学系という名前は天体力学の発展の中で作られたことを付け加えておきたい。

2.2 振動の問題

力学系の例として、変光星などの基本的振舞いに関係する振動現象について考える。振子の振動を表す運動方程式は、

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad mL \frac{du}{dt} = -mg \sin x, \quad (1)$$

と書かれる。ここでおもりの質量、振子の糸の長さ、地表の重力、糸の傾きをそれぞれ m, L, g, x としている。右辺の $\sin(x)$ を $x - x^3/6 + \dots$ と展開して一次の項までを採用すると、力学系は線形であると言われる。この線形な微分方程式の解は、 $x-u$ 平面の中で楕円で表される。

x^3 以上まで考慮する場合の力学系 (1) は非線形力学系である。この場合には、解を解析的に求めることは難しく、特殊な場合を除いて、摂動法、数値解析に頼ることになる。電子計算機の発達とその普及に伴い、数値解析にもとづくシミュレーションによって多くの問題が解決されてきた。しかし、よく経験するように、非線形力学系の数値解析で得られる時系列は、急速に大きな値になったり、一見なんの規則性、周期性も見られない場合も多い。その様なときには計算機が計算をやめたり (やめさせたり)、計算を打ち切るなどの処置をする。

2.3 ロジスティック方程式

生物の増殖の様子を、

$$\frac{dN}{dt} = r \frac{K-N}{K} N, \quad (2)$$

と表して研究することがある。(2) 式はロジスティック方程式と呼ばれている。微分方程式の数値解析に用いられる近似 $dN = N(t+dt) - N(t)$ を用いて変形すると、

$$X_{n+1} = a(1 - X_n)X_n, \quad (3)$$

となる。ここで X_n は $N(n\Delta t)$ に比例し、 a は K, r で表される。つまりロジスティック力学系 (2) は漸化式または写像 (3) で近似される。

この写像から非線形力学のいくつかの概念が導かれている³⁾。写像が線形の場合、例えば $X_{n+1} = aX_n$ と書かれるときには $a > 1$ ($a < 1$) であれば X_{n-1} は X_n に比べて必ず増加 (減少) する。しかし写像 (3) のように非線形項 $-aX_n^2$ が付け加わると、 X_n の増加にともない X_{n+1} の増加を止める場合がある。図 1 は $a = 2.5$ とし $X_n = 0.1$ から出発し、 X_{n+1} の値を縦軸にマークした。増加が鈍り、 X_{n+1} は 0.6 に収束することが分かる。マークした点をつなぐと二次曲線となり、収束点 (0.6, 0.6) は $X_{n+1} = X_n$ の直線と二次曲線の交点である。 $X_{n+1} = X_n$ の直線は縦軸の X_{n+1} の値から横軸の次の値を導くために有用である。図 2 は $a = 3.5$ とした時、この写像が最終的には $n = (4 \text{ の倍数})$ 毎に同じ値を取るこ

* 茨城大学教育学部 Yasuo Tanaka: Irregular Variability of Stars and Nonlinear Dynamics

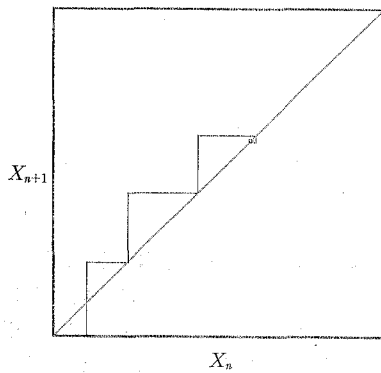


図1 ロジスティック写像の例

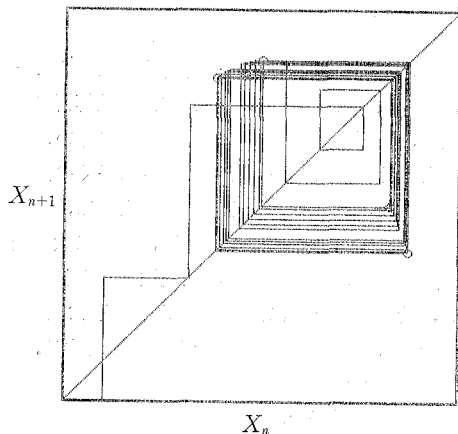


図2 ロジスティック写像の周期4 (○印の間を動く)

とを示している。このような状態を周期4の振動という。 a の値が $3 < a < 3.44$ の範囲にあるときの時系列は周期2となり、マメゾウムシの増殖曲線に対応するものとして有名である。

以上から明らかなように、周期1, 2, 4は a の値によって変化する。そこで $(a - X_n)$ 平面の a のある値に対して、初期の過渡的部分を除き X_n を $n=101$ から200までをマークする。その結果が図3である。この図はファイゲンバウムの樹木または分岐図と呼ばれる⁴⁾。 X_n の値が0.6から大きくなり、 $a=3$ から周期2が始まり出す。 $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ と分岐し、 a_c で n が無限大となる。 $a > a_c$ の領域では X_n の値はあるバンドの範囲にとどまるがその値を取る順序はランダムのように見える。この領域の現象をカオス的と呼ぶ。その領域の中に周期3($a=a_3$)の窓がある。このうち枠内を拡大するとまた同じ様な分岐図(挿入図)が得られる。このような自己相似はフラクタルの概念につながっている。

3. 非線形振動子の微分方程式

上では、常微分方程式で表される非線形の連続力学系

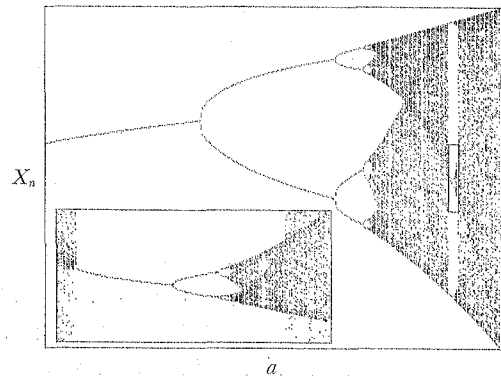


図3 ロジスティック写像の分岐図

を離散系の写像として、写像の複雑な振舞いを観察した。次に簡単な非線形微分方程式とそのカオス的振舞いを調べてみる。

3.1 簡単な微分方程式

次のような力学系⁵⁾を考える。

$$\begin{aligned} dx/dt &= y, & dy/dt &= ax + my + z, \\ dz/dt &= -by - pz + syz. \end{aligned} \quad (4)$$

第1式は、 x 方向の速さ、第2は運動方程式に対応する。 z がなければ、変位 x と y に比例する力を受けていることになる。その上に第3式の解である z の力を受けることになる。 $p=s=0$ で $a-b < 0$ の時には抵抗を受けて振動する。係数が零でない場合には3本の連立微分方程式を数値計算により解くことになる。図4に p の値を変化させたときの $(x-y-z)$ 空間内の解の様子を示した。係数は $a=-1, b=0.6, m=0.5, s=+1$ とし、 p の値は上段左から 2, 4.8, 5.0, 5.05, 下段 5.1, 5.25, 5.8, 5.95である。但し、分岐図の場合と同じように、初期の過渡的部分は除いてある。図から明らかなように、 p の値に応じて周期がのびていく。この様子を分岐図と対応させるために、例えば時系列中の y の極大値をとりだして数列 $\{Y_n\}$ をつくり、図1と同様に $Y_n - Y_{n+1}$ 面にマークすると図3とよく似た分岐図をうる。つまり極大値を取り出すことにより、連続系が離散化されている。このような離散化の方法としては、 y の極小値、極大値間の時間間隔をとる事などが考えられる。写像の場合と同じく、 p の値によりカオス的振舞いをする範囲もある。

3.2 微分方程式と写像

3本の連立微分方程式でかかれるローレンツの方程式は、粘性項を入れた流体力学の偏微分方程式から導かれている。つまり、解をフーリエ級数に展開してその係数の時間変化に対する方程式を導いている。この力学系は対流、乱流の研究に大きな役割を果たしている。事実、実験結果との照合が成果を上げつつある。

この系のモデルとしてエノン写像とよばれる 2 次元の写像は有名である。それは、

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad (5)$$

とかかれる。 $b=0$ とすると、ロジスティック写像によく似た 1 次元写像が得られる。

円写像とよばれる 1 次元写像も、より広い応用範囲をもつ次の 2 次元写像の特別な場合である。それは

$$r_{n+1} = (1-A)r_n + (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_n + A\Omega, \\ \theta_{n+1} = r_{n+1} + \theta_n \quad (6)$$

である。 $A=1$ として (6) の第 2 式が円写像である。この写像は、振動数が 2π と Ω の二つの非線形振動子の結合系モデルである。円写像は $K=1$ をはさんでカオスとフェーズロッキングにわかれ、後者はアーノルドの舌、準周期、悪魔の階段、フェレイ系列などで特徴づけられている。第 1 種の間欠分岐のモデルにもなっている。

4. 変光星とカオス

4.1 非線形力学と変光星観測

ここでは脈動変光星についての最近の研究をいくつか紹介する。脈動変光星の研究でえられる時系列（観測結果にしる、数値シミュレーションにしる）を非線形力学的な観点で検討する方法として比較的考えやすいものに、うえでのべた写像（帰帰図）がある。理論的には変光星の流体力学的シミュレーションの際に現れる不規則振動に対して写像の概念を導入して検討した例⁹が上げられる。

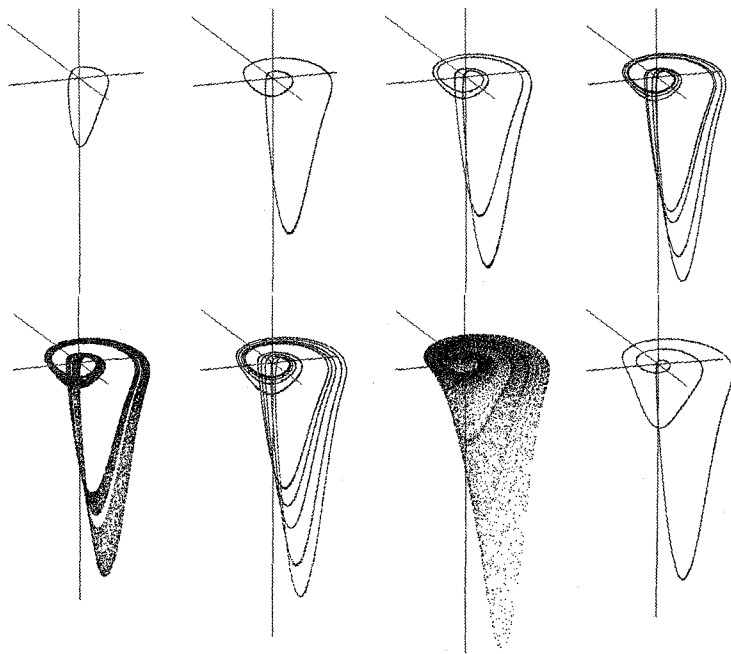


図 4 力学系 (4) の解

この観点に着目して、西城らはミラ型変光星の観測データから写像を用いて周期変動をいくつかのタイプに分類している⁷⁾。彼らは 60 個ほどのミラ型変光星の極大光度の時間間隔をいろいろな文献から収集した。作られた写像は 1) 対角線に沿って広がる分布、2) 対角線に直交する分布、3) 対角線をはさんで円形の分布に分類された。これは 2 周期以上の極値を使うことができれば比較的容易に変光星の性質を知ることができることを示している。そのほか光度の極大値をもちいて、おうし座 RV 型や不規則変光星の写像も研究されている⁸⁾。

変光星などの観測で得られる時系列の中に、低次元力学系のカオス的変動を検出する試みも行われている。その方法の基本は「埋め込み法」とよばれている。例えば佐野による解説⁹⁾などが参考になる。変光星ではコラート¹⁰⁾により R Scuti の光度変化が解析されている。彼はこの星の光度変化から再構成した相空間内の軌道と簡単な非線形微分方程式系の間の類似が著しいことを明らかにした。また、白色わい星の変動に対しても適用され、非線形力学的な効果が確認された¹¹⁾。このような埋め込み、軌道の再構成の方法は X 線星についても適用が試みられている¹²⁾。フーリエ解析は不規則な変動をする時系列について有力な方法であり、白色わい星で周期倍化などを確認することにも使われている¹³⁾。

一方、流体力学的シミュレーションの結果を非線形力学的な視点で解析することにより、これまで一括して不規則振動と考えられていた振動の中に、カオスを含む構造を見ることができるようになった。1960 年代にクリスティが流体力学的シミュレーションで変光星の非線形的振舞いを明らかにして以来、計算機と、計算技術の発達の中で多くの研究がなされてきた。最近ブシュレ¹⁴⁾、相川¹⁵⁾らは、間欠的分岐を表面重力の小さい恒星の動径方向の振動でシミュレートしている。また、おとめ座 W 型星などの低質量星で周期倍化分岐が生じていることが示されている¹⁶⁾。これらの分岐は表面温度、表面重力、または光度の変化に対して生じており、不規則に見える変光がカオス状態にあるかも知れないことを暗示している。

このような理論的接近と対応して、光度変化と周期変動を示す半規則変光星を見つけ出す研究も試みられている¹⁷⁾。山川らは VZ Cam という半規則変光星の線形非断熱模型を計算した。そのえられた計算周期と、観測周期と

が一致するためには、この変光星の質量は太陽質量より小さく、プシュレらの模型の質量と矛盾しないことが判明した。

4.2 変光星の簡単な模型

1960年代にもそうであったように、流体力学的シミュレーションの簡単なモデルの研究も有用であると思われる。シュピーゲルら(1966)は恒星の一層模型を非線形性を導入して解析しているが、そこでえられる非線形振動は平衡状態が力学的に不安定な場合であるという欠点をもっていた。齊藤ら⁹⁾は恒星からの熱の流出の非線形性を考慮した一層模型を検討している。そこでは脈動に対して不安定な平衡状態で非線形な熱伝達が、周期倍化分岐を経てカオスをつくりだす様子がえられている。最近変光星の一層模型では、熱伝達の非線形性以外にも星の構造の非線形性が適当な散逸または励起によりカオス状態をつくりだす事が示されている¹⁹⁾

恒星の動径方向の脈動方程式を線形化し、固有関数を使って展開し、振動を基本振動とその陪振動であらわす方法がある。恒星の平衡模型が容易にえられるにつれて、詳しい研究結果がえられてきた。例えば、二つの固有振動は互いに影響しあって複雑な振動を形成する。その様な系は一種の強制振動をもつ力学系である。減衰と自己励起を表す複雑な非断熱項をファンデルポル型の非線形項で近似した模型の研究は、セファイド型変光星について行われてきた。最近この系について行われた数値解析により、二つのモードの複雑な振動は準周期、フェーズロッキングの振動を示すことが示されている¹⁹⁾。

セファイド型変光星でみられる二重周期変光星の周期比は線形模型から導かれる比より小さいことは未解決の問題の一つである。二重周期変光星は10個ほど解析されていて、その周期比は0.69-0.72である。二つのモードのフェーズ・ロッキングを詳しく検討した結果、非線形の効果を考慮すれば観測でえられている周期比5/7を出することができるかもしれないことが指摘されている²⁰⁾。

5. 展 望

変光星の研究と非線形力学の関わりを中心に最近の成果を概観した。非線形力学の分野の進展は著しく、専門的なジャーナルが発行され、いろいろな手法の開発も盛んである。それに見合って天文学の分野でも、観測、理論を問わず新しい観点からの研究が進んでいるように見える。1992年1月7日から10日まで変光星の非線形現象を中心テーマにIAUコロキウムが日本で開催されることになった。そこでは変光星のみならず、種々の天体の変光現象を非線形現象として解析する試みが集約される予定である。ここでは触れなかった降着円盤とX線星、銀河中心核の活動などを含むと共に、非線形物理学

の分野の専門家にも参加を呼びかけている。このコロキウムがより広い研究の進展の契機となることが期待されている。

パーソナル・コンピュータによる作図は茨城大学教育学部の学生諸君の協力によっていることを付け加えます。

参 考 文 献

- 1) Buchler, J. R., Perdang, J. M. and Spiegel, E. A., *Chaos in Astrophysics*, 1985, D. Reidel Pub.
- 2) 合原一幸, カオス, 1990, サイエンス社.
- 3) トンプソン J. M. T., スチュアート H. B., *非線形力学とカオス*, 1988, オーム社.
- 4) パーソナル・コンピュータ用のプログラムが掲載されている本としては、川上 博, カオス CGコレクション, 1990, サイエンス社, がある.
- 5) Tanaka, Y. and Takeuti, M., 1988, *Ap. Space Sci.*, 148, 229.
- 6) Takeuti, M., 1987, *Ap. Space Sci.*, 136, 129.
- 7) Saijo, K. and Watanabe, M., 1987, *Bull. Natn. Sci. Mus. Tokyo*, 10, 1.
- 8) Saitou, M., Takeuti, M. and Tanaka, Y., 1989, *Pub. A.S. Japan*, 41, 297.
- 9) 佐野雅己, フラクタル科学 (高安秀樹編), 1987. pp. 58-116, 朝倉書店.
- 10) Kollath, Z., 1990, *Mon. Not. R.A.S.*, 247, 377.
- 11) Auvergne, M., 1988, *A. & Ap.*, 204, 341.
- 12) Voges, W., Atmanspacher, H. and Scheinraber, H., 1987, *Ap. J.*, 320, 794.
- 13) Unno et al., 1990, *Pub. A.S. Japan*, 42, 269.
- 14) Vauclair, G., Goupil, M. J., Baglin, A., Auvergne and Chevreton, M., 1989, *A. & Ap.*, 215, L17.
- 15) Buchler, J. R., Goupil, M. J. and Kovacs, G., 1987, *Phys. Letters A*, 126, 177.
- 16) Aikawa, T., 1988, *Ap. Space Sci.*, 149, 149.
- 17) Aikawa, T., 1990, *Confrontation between stellar pulsation and evolution* (eds. C. Cacciari and G. Clementini), pp. 423-426, *Astron. Soc. Pacific*.
- 18) Kovacs, G. and Buchler, J. R., 1988, *Ap. J.*, 334, 971.
- 19) Yamakawa, F. and Uji-ie, K., 1990, *Pub. A.S. Japan*, 42, L65.
- 20) Takeuti, M. and Tanaka, Y., 1991, *Ap. Space Sci.* in press.
- 21) Ishida, T. and Takeuti, M., 1991, *Ap. Space Sci.* in press.
- 22) Seya, K., Tanaka, Y. and Takeuti, M., 1990, *Pub. A.S. Japan*, 42, 405.
- 23) Tanaka, Y., Seya, K. and Takeuti, M., 1990, *Confrontation between stellar pulsation and evolution* (eds. C. Cacciari and G. Clementini), pp. 145-148, *Astron. Soc. Pacific*.

☆ ☆

☆ ☆ ☆