

# 円筒海をわたる波

## —スペースコロニーの物理学⑦—

福江 純

〈大阪教育大学 〒543 大阪市天王寺区南河堀町 4-88〉

### 1. 円筒世界の波動現象

今まで、円筒型スペースコロニーの海や大気の静的な構造とか雨の降り方について、簡単な考察をしてきた。『ラーマに降る雨』の最後にも記したように、スペースコロニーの気象学・海洋学・陸水学・地震学には、大気の静的な構造にはじまり、大気の大循環、風など局地的な空気の流れ、大気中の波動現象、降雨・降雪など降水一般、さらには、海の構造に続いて、海流、海の波、河の流れ、湖などの陸水現象、そして音波や地震波の伝播などなど、調べるべき問題が山積みされている。これらのうちから、今回と次回で、スペースコロニー内の波動現象に関して考えてみよう。

スペースコロニー内における波動現象は、海の波（すなわち非圧縮性流体として近似できる水の波）と大気の水波（圧縮性流体である空気の波）に大きくわけることができるが、今回はまず海の波について述べる。また水面の波には表面張力を復元力とするものなど何種類かあるが、ここでは、浮力（すなわち重力）を復元力とする重力波（とくに表面重力波）を考える。

### 2. 円筒海をわたる波 I

まず簡単のために、コロニーの回転軸の方向に伝わる波を考えよう。この場合、コリオリの力は働かない。また物理量は軸対称とする。地球上での海の波との大きな違いは、その幾何学的な形状である。また重力加速度の表式も異なる。

座標系としては、図1のように、スペースコロ

ニーの回転軸を  $z$  方向とする円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。この座標系で、コロニーの回転に伴う遠心力加速度  $g$  は、コロニーの回転角速度を  $\Omega$  として、

$$g = r\Omega^2 \quad (1)$$

と表される。またコロニーの半径を  $R$ 、円筒海の半径を  $R_0$  とする。したがって円筒海の深さ  $h$  は、

$$h = R - R_0 \quad (2)$$

となる。

#### 2.1. 基礎方程式

流体力学の基礎方程式の一つである連続の式（流体力学の教科書参照）は、非圧縮性流体（密度  $\rho = \text{一定}$ ）の場合、

$$\mathbf{v} = \text{grad}\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (3)$$

で定義される速度ポテンシャル  $\phi$  を導入すると、ラプラス方程式：

$$\Delta\phi = 0 \quad (4)$$

に帰着する。円筒座標では、このラプラス方程式は、

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

となる。ただしとりあえずポテンシャルの値  $\phi$  は  $\theta$  方向にはよらない  $\phi = \phi(r, z, t)$  としたので、 $\theta$  方向の偏微分は落とした。

一方、運動方程式は、渦無し場 ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ) の場合、速度ポテンシャル  $\phi$  と  $\mathbf{K} = -\text{grad}\phi$  で定義される外力のポテンシャル  $\psi$  を導入すると、 $F(t)$  を時間の任意の関数として、一般的なベルヌーイの式：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \psi = F(t) \quad (6)$$

に帰着する。ただし  $v_r, v_z$  を、それぞれ速度の  $r$  方向  $z$  方向の成分として、 $v^2 = v_r^2 + v_z^2$  である。スペースコロニーの場合、上で述べたように、遠心力による疑似重力加速度は  $g = r\Omega^2$  なので、外力のポテンシャル  $\psi$  は、それを積分して、

$$\psi = -\Omega^2 r^2 / 2 + \text{定数} \quad (7)$$

と表されるので、ベルヌーイの式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = F(t) \quad (8)$$

となる。

上の(5)と(8)式が、スペースコロニーの円筒海での表面重力波を記述するための基礎方程式である。

### 2.2. 境界条件

波が伝わることにより、時間的、空間的に変動する海の表面で、(8)式のベルヌーイの式(あるいは運動方程式)は常に成立していなければならない。図1のように、波の伝播によって変位した海の表面を

$$r = R_0 - \xi(z, t) = (R - h) - \xi(z, t) \quad (9)$$

とする。表面では圧力は常に大気圧  $P_0$  に等しく、密度は一定なので、(8)式の  $P/\rho$  は一定である。したがって(9)式を(8)式に代入し、定常部分を取り除くと、結局、海の表面で、

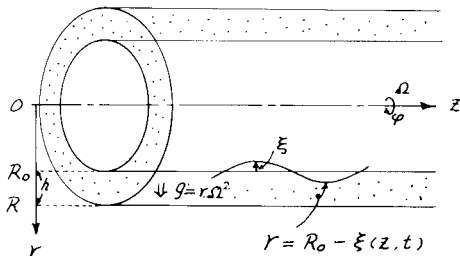


図1 スペースコロニーの表面重力波

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2}(R_0 - \xi) + \frac{\Omega^2}{2}R_0^2 = 0 \quad (10)$$

at  $r = R_0 - \xi$

が常に成り立つ。

さらに表面で半径方向の速度  $v_r$  は、(9)式を時間で微分して、

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}[R_0 - \xi(z, t)] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [R_0 - \xi(z, t)] \\ &= -\frac{\partial \xi}{\partial t} - v_z \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。この(11)式は表面でのラグランジュ的な変化が常に0であることを表している。速度ポテンシャル  $\phi$  の定義から、 $v_r = \partial \phi / \partial r$ 、 $v_z = \partial \phi / \partial z$  なので、(11)式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad \text{at } r = R_0 - \xi \quad (12)$$

となる。

最後に、海の底での境界条件として、

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = R \quad (13)$$

が課せられる。

### 2.3. 微小振幅波

波動現象を解析する際に通常仮定するように、速度の大きさ  $v$  や表面での変位  $\xi$  が十分小さいとする(微小振幅波)。上の式で、それらの2次以上の項を落とすと、基礎方程式および境界条件として、結局、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - R_0 \Omega^2 v_r = 0 \quad \text{at } r = R_0 \quad (15)$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = R \quad (16)$$

が得られる。ただし(15)式は、(10)式と(12)式をまとめた。

### 2.4. 一般解

波の伝播する方向 ( $z$  方向) にたいして三角関

数型の平面波解を仮定する。すなわち、波の角振動数を $\omega$ 、 $z$ 方向の波数を $k$ 、 $f(r)$ を $r$ に関する任意関数として、速度ポテンシャル $\phi$ が、

$$\phi(r, z, t) = f(r) \cos(\omega t - kz) \quad (17)$$

の形に表せると仮定する。

この平面波解(17)式を(14)式に代入すると、 $f(r)$ に対して2階の常微分方程式：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) - k^2 f = 0 \quad (18)$$

が得られる。(18)式はベッセルの微分方程式に帰着できる形をしており、0次の第一種および第二種変形ベッセル関数、 $I_0(kr)$ と $K_0(kr)$ を基本解に持つ。そしてその線形結合

$$AI_0(kr) + BK_0(kr)$$

が、 $f(r)$ の一般解を与える。したがって、(17)式より、速度ポテンシャルの一般解は、 $A$ と $B$ を任意定数として、

$$\phi = [AI_0(kr) + BK_0(kr)] \cos(\omega t - kz) \quad (19)$$

である。

### 2.5. 特解

一般解(19)ではまだ境界条件を考慮していない。そこでまず海の底での境界条件(16)式を考える。(19)式を底での境界条件(16)式に代入すると、任意定数の間に、

$$AI_1(kR) = BK_1(kR)$$

という条件が成り立たなければならないことがわかる。ただしここで $I_1$ および $K_1$ は、それぞれ、1次の第一種および第二種変形ベッセル関数である。すなわち、

$$B = AI_1(kR) / K_1(kR)$$

なので、底での境界条件(16)式を満たす(14)式の特解として、

$$\phi = A \left[ I_0(kr) + \frac{I_1(kR)}{K_1(kR)} K_0(kr) \right] \times \cos(\omega t - kz) \quad (20)$$

が得られる。

### 2.6. 分散関係式

さらに海の表面での境界条件(15)を課すと、角振動数と波数の間の関係式、いわゆる分散関係式が得られる。(15)式に特解(20)式を代入して整理すると、分散関係式は、

$$\omega^2 = R_0 \Omega^2 k \times \frac{-I_1(kR_0) + \frac{I_1(kR)}{K_1(kR)} K_1(kR_0)}{I_0(kR_0) + \frac{I_1(kR)}{K_1(kR)} K_0(kR_0)} \quad (21)$$

となる。

なおここで $R_0 \Omega^2$ は、海の表面での遠心力加速度であることに注意しておく。

(1) 浅水波 ( $kR_0 < kR \ll 1$ )

波数 $k$ が小さい(波の波長が長い)場合、すなわち浅水波を考えよう。ベッセル関数の漸近形より、円筒海が深い場合( $R_0 \ll R$ )および浅い場合( $R_0 \sim R$ )について、それぞれ、分散関係式(21)は、

$$\omega = R \Omega k \quad kR_0 \ll kR \ll 1 \quad (22a)$$

$$\omega = \Omega k \sqrt{R_0 h} \quad kR_0 \sim kR \ll 1 \quad (22b)$$

(2) 深水波 ( $kR > kR_0 \gg 1$ )

次に、波数 $k$ が大きい(波の波長が短い)場合、すなわち深水波を考えよう。同じく、円筒海が深い場合と浅い場合のそれぞれで、分散関係式(21)は、

$$\omega = \Omega \sqrt{R_0 k} \quad kR \gg kR_0 \gg 1 \quad (23a)$$

$$\omega = \Omega k \sqrt{R_0 h} \quad kR \sim kR_0 \gg 1 \quad (23b)$$

となる。

### 2.7. 波の速度

進行方向の波の速度(群速度) $u$ は角振動数 $\omega$ を波数 $k$ で微分して得られる。

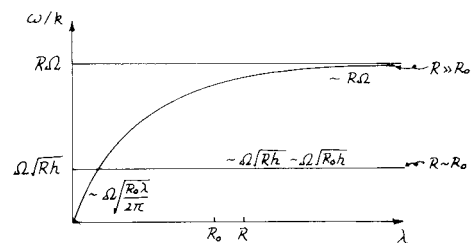


図2 分散関係式

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \text{これはちょっと……} \quad (24)$$

(1) 浅水波 ( $kR_0 < kR \ll 1$ )

波数  $k$  が小さい浅水波の場合、円筒海が深い場合と浅い場合のそれぞれで、

$$u = R\Omega \quad kR_0 \ll kR \ll 1 \quad (25 a)$$

$$\omega = \Omega\sqrt{Rh} \quad kR_0 \sim kR \ll 1 \quad (25 b)$$

となる。

言い替えれば、波の波数が小さいとき、すなわち波の波長が海の底の半径  $R$  よりも十分長いときには、海の深さが深いと、波の速度は一定で、海の底の回転速度  $R\Omega$  程度になる [(25 a)式]。一方、海の深さが浅いと、波は浅水波的になって、波の速度は海の深さの平方根に比例する [(25 b)式]。

(2) 深水波 ( $kR > kR_0 \gg 1$ )

波数  $k$  が大きい深水波の場合、やはり円筒海が深い場合と浅い場合のそれぞれで、

$$u = 0.5\Omega\sqrt{R_0/k} \quad kR \gg kR_0 \gg 1 \quad (26 a)$$

$$u = \Omega\sqrt{R_0h} \quad kR \sim kR_0 \gg 1 \quad (26 b)$$

となる。

言い替えれば、波の波数が大きいとき、すなわち波の波長が海の表面の半径  $R_0$  よりも十分短いときには、海の深さが深いと、波は深水波的になって、波数が大きい (波長が短い) ほど、波の速度は小さくなる [(26 a)式]。一方、海の深さが浅いと、波は浅水波的になって、波の速度は波数に依存せず、海の深さの平方根に比例する [(26 b)式]。

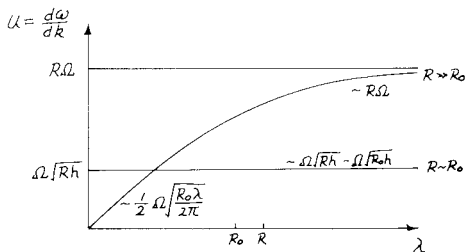


図3 波の速度

### 3. 円筒海をわたる波 II

2節では円筒海の軸方向に伝わる波を考えた。ここでは、円周方向に伝わる波を考えよう。すなわち軸対称性の仮定をはずす。方法は2節とまったく同じなので、対応する結果のみ記していくことにする。

#### 3.1. 基礎方程式

基礎方程式は、ラプラス方程式で  $\theta$  微分を残すことを除いて2節のものとおなじである。

#### 3.2. 境界条件

境界条件も  $\theta$  を残す以外、2節と同じである。

#### 3.3. 微小振幅波

微小振幅の方程式も、 $\theta$  微分を残す以外2節と同じ。

#### 3.4. 一般解

$\theta$  方向の微分を残したラプラス方程式(5)に対し、波の角振動数を  $\omega$ 、方位角方向の波数を  $m$ 、 $z$  方向の波数を  $k$ 、 $f(r)$  を  $r$  に関する任意関数として、速度ポテンシャル  $\phi$  が、

$$\phi(r, \theta, z, t) = f(r)\exp(i\omega t - im\theta - ikz) \quad (27)$$

の形に表せると仮定する。

この解をラプラス方程式に代入すると、 $f(r)$  に対して2階の常微分方程式：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} f - k^2 f = 0 \quad (28)$$

が得られる。(28)式は、 $m$  次の第一種および第二種変形ベッセル関数、 $I_m(kr)$  と  $K_m(kr)$  を基本解に持つので、その線形結合

$$AI_m(kr) + BK_m(kr)$$

が、 $f(r)$  の一般解を与える。したがって、速度ポテンシャルの一般解は、 $A$  と  $B$  を任意定数として、

$$\phi = [AI_m(kr) + BK_m(kr)] \times \exp(i\omega t - im\theta - ikz) \quad (29)$$

となる。

#### 3.5. 特解

海の底での境界条件を課すと、底での境界条件

を満たす特解として、

$$\phi = A \left[ I_m(kr) + \frac{I_{m+1}(kR) + \frac{m}{kR} I_m(kR)}{K_{m+1}(kR) - \frac{m}{kR} K_m(kR)} K_m(kr) \right] \times \exp(i\omega t - im\theta - ikz) \quad (30)$$

が得られる。

### 3.6. 分散関係式

さらに海の表面での境界条件を課すと、分散関係式

$$\omega^2 = R_0 \Omega^2 k \frac{-\mathcal{I}_{m+1}(kR_0) + \frac{\mathcal{I}_{m+1}(kR)}{\mathcal{K}_{m+1}(kR)} \mathcal{K}_{m+1}(kR_0)}{I_m(kR_0) + \frac{\mathcal{I}_{m+1}(kR)}{\mathcal{K}_{m+1}(kR)} K_m(kR_0)} \quad (31)$$

が得られる。ただしここで簡略化の記号として、

$$\mathcal{I}_{m+1}(\chi) = I_{m+1}(\chi) + \frac{m}{\chi} I_m(\chi) \quad (32)$$

$$\mathcal{K}_{m+1}(\chi) = K_{m+1}(\chi) - \frac{m}{\chi} K_m(\chi) \quad (33)$$

を使用した。

円周方向に伝わる波に注目しよう。方位角方向の波数  $m$  の効果をみるために、軸方向の波数  $k$  は 0 の極限を考える。すなわち、先の 3 節で言えば、波数  $k$  が小さい ( $kR_0 < kR \ll 1$ ) 浅水波の場合を考える。このときベッセル関数の極限をとると、上の分散関係式は、

$$\omega^2 = m \Omega^2 \frac{(R/R_0)^{2m} - 1}{(R/R_0)^{2m} + 1} \quad (34)$$

となる。

円筒海が深い場合 ( $R_0 \ll R$ ) および浅い場合 ( $R_0 \sim R$ )、それぞれについて、

$$\omega = \Omega \sqrt{|m|} \quad R_0 \ll R \quad (35)$$

$$\omega = \Omega |m| \sqrt{h/R} \quad R_0 \sim R \quad (36)$$

となる。

### 3.7. 波の速度

方位角方向の波の速度  $u$  は角振動数  $\omega$  を波数  $m$  で微分し、回転半径  $R_0$  をかけて得られる。上の場合は、

$$u = (m \text{ の符号}) \times R_0 \Omega / (2\sqrt{|m|}) \quad R_0 \ll R \quad (37)$$

$$u = (m \text{ の符号}) \times R \Omega \times \sqrt{h/R} \quad R_0 \sim R \quad (38)$$

となる。 $m$  の符号が正の場合は回転方向に伝わる波を、負の場合は回転と反対方向に伝わる波を表す。

基本的には 2 節の結果に一致する。すなわち、ラーマの海が深い場合は、波数が大きいほど波の速度は小さくなる。一方、ラーマの海が (ラーマの半径に比して) 浅い場合は、浅水波的になって、波の速度は波数に依存せず、海の深さの平方根に比例する。

## 4. ラーマの場合

以上の解析をラーマの場合に応用してみよう。

ラーマは、円筒型のスペースコロニーの一種で、円筒の半径 (内径)  $R$  は 8 km、長さは 50 km である。円筒海の (軸方向の) 幅は 10 km である。また自転周期 ( $= 2\pi/\Omega$ ) は 4 分なので、自転角速度  $\Omega$  は  $0.02618 \text{ s}^{-1}$  である。さらにこれらの諸量から、内殻での回転速度  $R\Omega$  は 209 m/秒となり、同じく内殻での遠心力加速度  $R\Omega^2$  は  $5.48 \text{ m/s}^2 = 0.56 \text{ G}$  となる。

回転軸から海の表面までの距離  $R_0$  や海の深さ  $h$  は確か書いてなかったと思う。ここでは常識的に考えて、海の深さは 1 km を超えないとしよう。すなわち、上の近似範囲でいえば、

$$R_0 \sim R \gg h$$

となる。

### 4.1. 波の速度

以上の条件で、円筒海の対称軸に平行な方向に伝わる波の速度は (25 b) 式と (25 b) 式で表されるが、どちらの場合も結局は、

$$u \sim \Omega \sqrt{R h} \sim \Omega \sqrt{R_0 h} \sim R \Omega \sqrt{h/R} \quad (39)$$

すなわち、数値を入れて、

$$\sim 209 \text{ m/秒} \sqrt{h/R} \quad (40)$$

となる。

したがって、もし海の深さが 500 m ほどなら、

波の速度は、

$$\text{約 } 52 \text{ m/秒} \quad (h = \text{約 } 500 \text{ m})$$

であり、海の深さが 100 m なら、波の速度は、

$$\text{約 } 23 \text{ m/秒} \quad (h = 100 \text{ m})$$

である。

また円周方向に伝わる波の速度は(38)式で表されるが、この場合も波数  $m$  小きければ上の結果に帰着する。

#### 4.2. 波の周期

次に軸に平行に伝わる波の角振動数は(22 b)式と(23 b)式で表されるので、やはりどちらの場合も、

$$\omega \sim \Omega k \sqrt{Rh} \sim \Omega k \sqrt{R_0 h}$$

となる。

さて波の周期  $P$  は、 $P = 2\pi/\omega$  だが、波の波長  $\lambda$  が波数  $k$  を用いて、 $\lambda = 2\pi/k$  と表されるので、結局、

$$\begin{aligned} P &= 2\pi/\omega \\ &\sim 2\pi/[\Omega k \sqrt{Rh}] \\ &\sim \lambda/(\Omega \sqrt{Rh}) \\ &\sim \lambda/(\Omega R) \times \sqrt{R/h} \end{aligned} \quad (41)$$

となる。

とくにラーマの場合、円筒海の軸に沿った幅が 10 km であり、円筒海の縁を腹とし中央を節とする半波長の波(すなわち  $\lambda = 20$  km の波)がもっとも波長の長い波だということを考え併せると、波の周期は、数値を入れて、

$$P \sim 96 \text{ 秒} \sqrt{R/h} \quad (42)$$

となる。

したがって、もし海の深さが 500 m なら、波の周期は、

$$\text{約 } 6.4 \text{ 分} \quad (h = \text{約 } 500 \text{ m})$$

であり、海の深さが 100 m なら、

$$\text{約 } 14.1 \text{ 分} \quad (h = \text{約 } 100 \text{ m})$$

である。これらがラーマの円筒海を伝わる波(定常波)のもっとも長い振動周期である。

また円周方向に伝わる波の角振動数は(36)式で表されるが、数値を代入した結果は大体似たよう

なものになる。

ラーマの円筒海のように幾何学的に対称な形状を持った海では、上でも触れたように、定常波が容易に存在しうるだろう。そのような観点から海や大気の固有振動を調べてみるのも面白い。とくに隕石の衝突や核爆発など、外殻を揺るがすような衝撃的な事件が起こったときには、ちょうど鐘を叩いた場合のように、さまざまな固有振動で外殻が震え、それにしたがって、内部の流体にいろいろな振動が生じると思われる。そのような状況における基本振動の周期は、上で述べたように、概ね数分である。

#### 参 考 文 献

- 福江 純 1991, ハード SF 研究所公報, 41, 44.  
 アーサー・C・クラーク 1985, 『宇宙のランデブー』(南山宏訳) 早川書房.



岡野恵子 (兵庫県)