マイクロブラックホール・シンドローム

―地球内部でのマイクロブラックホールの運動―　前編

福　江　　　純

〈大阪教育大学　〒582 柏原市旭ケ丘 4-698-1〉

e-mail : fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

地球内部に潜り込んだマイクロブラックホールは，地球物質を吸収することによって減速され，螺旋軌道を描きながら次第に地球中心へと沈降していく．マイクロブラックホールが地球の中心に落ち着くまでのタイムスケールは，マイクロブラックホールの有効断面積や質量に依存するが，マイクロブラックホールの質量が 10^{15}g 程度の場合，数百年から千年程度と見積られる．

1．前置き：原始クェーサーの降着円盤

この半年ばかり，大学の移転や私事その他あれこれと忙しくて，あまり SF できませんでしたが，最近少しだけ復帰し始めました（いやいまでも雑用に追われているのですが，もうそろそろ禁断症状で，内部崩壊を起こしそうで)．『ゴールデン・フリース』（ロバート・J・ソウヤー）のイアソン，個性があって結構よかったですネ.『バーチャライズド・マン』（チャールズ・プラット）も最後の1行では思わずホロリとしてしまいました．サイバーパンクにはどうも乗れなかったですけど，この手の正統的？電脳 SF はわかりやすいです．そうそう『ジュラシック・パーク』もアンドロメダ以来，久しぶりにクライトンしてました．

ところで話は変わりますが，最近，外部からの輻射による抵抗を受けた降着円盤の構造を，国立天文台（現つくば大学）の梅村雅之氏と一緒に研究していたりします．かいつまんで言うと，たとえば宇宙のかなり初期の時代，ダークマターと物質が凝集して，ダークマターの重力場の中で原始クェーサーができたばかりの頃，その原始クェーサーの中心部に形成される降着円盤はどうなっているか，という話です．

Jun Fukue : Micro Black Hole Syndrome

この話のセールスポイントは2つ；①速度に比例する外部の輻射抵抗の働きと，②ダークマターの重力場です．

まず①の輻射抵抗ですが，これは降着円盤中の物質（イオンと結びついた電子）が宇宙背景放射から受ける輻射抵抗のことです．宇宙膨張による断熱冷却によってプラズマの温度が 4000 K ぐらいまで下がると(赤方偏移で z～1000 ぐらい)，陽子と電子が再結合して，物質と輻射の縁が切れます．いわゆる宇宙の晴れ上がりですね．その後，輻射の温度はどんどん下がって，現在では，いわゆる 3 K 宇宙背景放射になっちゃったわけですが，晴れ上がりの直後，z が 400 ぐらいの時代では，宇宙背景放射の温度はまだ 1000 K ぐらいあり，輻射の密度も非常に高いのです．そのような時代に，たとえば原始クェーサーの中心部で原始降着円盤が形成されていれば，そのような降着円盤中のガスは(電離していれば)，周囲に満ちている 1000 K 宇宙背景放射と強く相互作用するでしょう．とくに電子は宇宙背景放射（光子）とコンプトン散乱し，その結果，エネルギーや運動量の授受が行われます．このとき重要な点は，宇宙背景放射は等方的ですが，降着円盤のガス（電子）は（非等方な）回転運動や落下運動をしているために，ネットにはガスの非等方な運動量の成分が失われるということです．すなわち電子（したが

ってガス）は，宇宙背景放射の光子ー輻射ーによる抵抗を受けるわけです．これを〈輻射抵抗〉とか〈コンプトン抵抗〉などと呼んでいます．

もう一つのポイントの②ダークマターの重力場というのは，通常，降着円盤は，中心の天体（たとえばクェーサーの場合は，いわゆる超大質量ブラックホール）の重力場のもとでケプラー回転しているわけですが，原始クェーサー（とくに中心にまだブラックホールが形成される前）では，ダークマターの重力場が支配的で，ブラックホールの重力場とは随分違います．ダークマターの重力場はもちろんダークマターの分布にもよるわけですが，たとえば空間密度が一定になるようにダークマターが分布している場合（したがって半径r内の質量Mがrの3乗に比例して増加するような場合），ダークマターの重力場によって，中心からの距離rに比例する重力が働きます．

ま，上の問題はとりあえず置いといて，中心からの距離に比例する引力が働く重力場といえば，地球の内部（密度が一定）の重力場がまさにそうです(重力列車！)．さらに抵抗が働く運動となると，自然と思い浮かべてしまうのが，地球の内部でのマイクロブラックホール（ミニブラックホール）の運動です．

地球内部にブラックホールが潜り込む話はSFではよく扱われていて，たとえば，ポール・プロイスが書いた『破局のシンメトリー』and/or 天文学者のJ・C・ホイーラーが書いた『ブラックホールを破壊せよ』で，その手の話が出てきました．粒子加速器の事故か何かで，マイクロブラックホールが発生し，地球の内部に潜り込む，という話だったと思います．ブラックホールは地球内部の物質を吸収しながら運動するので，だんだん運動量を失い(すなわち抵抗を受け)，次第に地球の中心に沈降していくわけです．石原藤夫氏によると，ラリイ・ニーヴンの『ホール・マン』が，その手の話のハシリだそうです．まだ読んでいないのですが，最近では，ディヴィッド・ブリンの『ガイア』にも出てくるようです．

宇宙を漂っていたミニブラックホールと地球が衝突するなんていう状況を想定すれば，天文学的にも興味があります．最近ではミニブラックホールの研究は下火ですが，ツングースカ事件はミニブラックホールの衝突によるものだ，なんていう話もありましたよね．

というわけで，前置きが少し長くなりましたが，マイクロブラックホールが地球の内部に突入したときに，その運動／軌道はどうなるか，という問題を考えてみました．

以下，次節で，基礎方程式を示します．また3節で（速度に比例する）抵抗の係数が一定という特別の場合を，4節で抵抗の係数が変化する場合を考えます．5節では少し議論を行います．また付録で，抵抗の係数の値の評価と，マイクロブラックホールが物質を吸い込む範囲の評価をします．また以下では，マイクロブラックホール（ミニブラックホール）をMBHと略記します．

2. 基礎方程式

まず最初にすべきことは，地球内部の重力場のもとで，（速度に“比例する”）抵抗を受ける粒子の運動方程式を立てることだ．座標系として，地球の中心を原点とする極座標(r，φ)を用い，動径速度をv_r（$=dr/dt$)，回転速度をv_φ（$=rd\varphi/dt$）としよう（tは時間)．

さて，まず地球内部の重力場だが，半径r内の質量をM_rとすると，重力加速度の大きさgは，

$$g=-GM_r/r^2 \qquad (1a)$$

と表される．地球内部の物質の密度ρが一定とすると，$M_r=(4\pi r^3/3)\rho$なので，

$$g=-(4\pi G\rho/3)r \qquad (1b)$$

となる．すなわち，よく知られているように，地球の内部では，重力加速度は中心からの距離rに比例する．

つぎに，粒子―MBH―に働く抵抗だが，形式的に，速度に比例すると仮定しよう．すなわち，i

方向の抵抗を

$$-\beta v_i \tag{2}$$

とする．この抵抗“係数”β は，定数であるとは限らず，一般には，MBH の質量 m や速度 v に依存する量である（付録 1 参照）．

上の(1)式と(2)式を力学の教科書にほおりこめば，まず動径方向の運動方程式として，

$$\frac{dv_r}{dt}=\frac{v_\varphi{}^2}{r}-\frac{4\pi G\rho}{3}r-\beta v_r \tag{3r}$$

が得られる．ここで，右辺第 1 項は遠心力，第 2 項は地球内部の重力場，そして第 3 項は粒子に働く抵抗である（抵抗は運動量の損失を招くので，マイナス符号がつく）．一方，回転方向の運動方程式－角運動量の保存の式－は，

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(rv_\varphi)=-\beta v_\varphi \tag{3f}$$

となる．右辺がやはり粒子に働く抵抗である．抵抗がない場合（$\beta=0$），(3f)式から，（単位質量当りの）比角運動量 $L\,(=rv_\varphi)$ が保存される．逆に，抵抗が働くと，比角運動量 L は時間と共に減少する．

これらの(3)式が基礎方程式である．前置きで述べた外部抵抗の働いた降着円盤の場合は，ガスなので移流項や圧力勾配力が入ってもっと複雑だが，粒子の場合は意外なほど簡単な式である．ちょっとクセのある力学の教科書には出てそうな式なので，もし似たような式を見られた方があれば，ご教示願いたい．

なお，以下の議論とくに数値計算の結果などでは，しばしば長さや速度などの物理量を無次元化してある．具体的には，地球の問題を考えているので，長さの単位には地球の半径 R を，時間の単位には地表でのケプラー運動の回転角速度 Ω（$=\sqrt{GM/R^3}$）の逆数 $1/\Omega$ をとるのが便利である（M は地球の質量）．あるいは単位を［］で表せば，

$$[時間]=1/\Omega=(R^3/GM)^{1/2}=(3/4\pi G\rho)^{1/2}=807\,\mathrm{s} \tag{4a}$$

$$[半径]=R=6378\,\mathrm{km} \tag{4b}$$

$$[速度]=(GM/R)^{1/2}=7.91\,\mathrm{km/s} \tag{4c}$$

$$[角速度]=\Omega=(GM/R^3)^{1/2}=0.00124/\mathrm{s} \tag{4d}$$

$$[比角運動量]=(GMR)^{1/2}=5.04\times10^4\,\mathrm{km^2/s} \tag{4e}$$

などとなる．また抵抗係数 β は，時間の逆数の次元を持っているので，無次元化したときの β の単位は Ω である．

3. 抵抗係数 β が一定の場合

上でも述べたように，また付録 1 でも評価しているように，抵抗“係数”β は，一般には，一定ではない．すなわち β は MBH の質量 m と速度 v の関数であり，しかも（ブラックホールが周囲の物質を吸収して）質量 m が時間と共に増加したり，速度 v も時間と共に変化するので，β も時間と共に変化するだろう．ただし MBH の質量が十分小さいとき（あるいは考えている時間が十分短いとき）には，β は近似的に一定と考えてよい．そこでこの節では，一つの極限として，まず抵抗係数

$$\beta=一定 \tag{4}$$

の場合を考えてみよう．

さてこのとき地球の内部での MBH の運動の仕方は，抵抗係数 β をパラメータとし，適当な初期条件を与えて，上の方程式を（数値的に）解けば求められる．

初期条件としては，以下の極端な 2 つの場合を設定してみよう．すなわち，①最初，MBH は（電荷を帯びていて）電磁場に支えられ地表で静止していた．それが事故か何かで支えがとれ，突然，地球内部に向かって落下を始めた―**シンドローム**．この場合，初期条件は，

$$時刻\ t=0\ で\ r=R,\ v_r=0,\ v_\varphi=0 \tag{5}$$

となる．また，当然，動径方向だけの運動になる．

もう一つは，② MBH は，最初，地表面に沿ってケプラー運動していた．たとえば，MBH が加速

器で生成され，地表に沿って 7.9 km/s で打ち出された場合がこれに相当する．この場合，初期条件は，

時刻 $t=0$ で $r=R$，$v_r=0$，

$$v_\varphi=(GM/R)^{1/2}=7.91\ \mathrm{km/s} \qquad (6)$$

である．

ここでは考えないが，初期条件を変えれば，MBH が宇宙から飛び込んでくる（あるいは宇宙に漂っていたミニブラックホールと地球が衝突する）ような場合も計算できる（初速を地球の軌道運動の速度程度にすればいいだろう）．

3.1 初期状態で MBH が静止していた場合

地表で静止していた MBH が，地球内部に向かって落下を始めた場合の，具体的な計算例を図 1

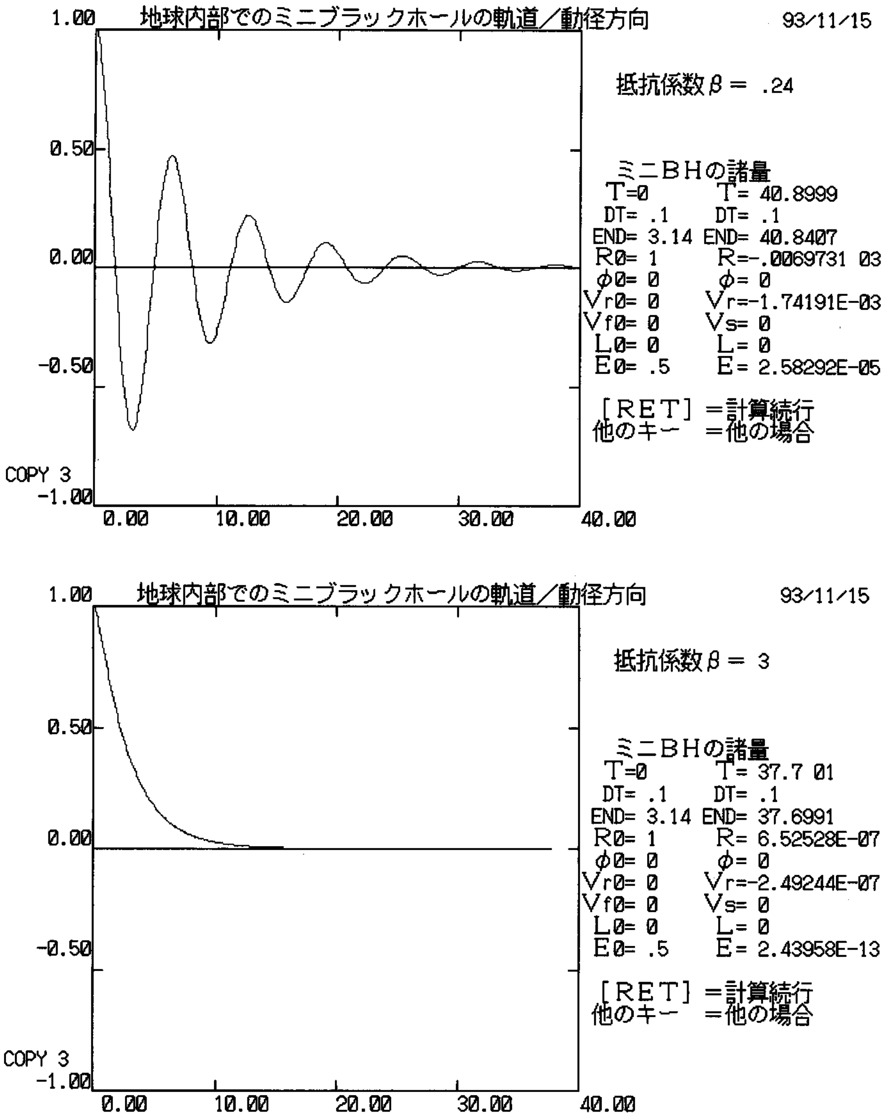


図 1

に示す．図1の横軸は無次元化した時間 t（いまの場合，約13分を単位として測った時間，すなわち40目盛りで約9時間)を，縦軸は無次元化した距離 r（地球の半径 R を単位として測った地球中心からのMBHの距離）を表す．

パラメータ β（無次元化した抵抗係数 β/Ω）の値は，図1の上の図では，$\beta/\Omega=0.24$ で，下の図では $\beta/\Omega=3$ である．抵抗係数 β が小さいと，MBHは地球の内部をいったりきたりしながらだんだん中心に落ち着いていくが，β が大きいと急激に中心に落ち込む．これは抵抗の存在する振動運動の特徴である．

図1の数値計算例は，解析的に示すこともできる．すなわち，初期状態でMBHが静止していれば，回転速度は0なので，(3r)式は，

$$\frac{dv_r}{dt}=-\frac{4\pi G\rho}{3}r-\beta v_r \qquad (7)$$

と書ける．動径速度が $v_r=dr/dt$ であることを使えば，(7)式は，

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\beta\frac{dr}{dt}+\Omega^2 r=0 \qquad (7b)$$

と表せる．ただし，$4\pi G\rho/3=\Omega^2$ を使った．

力学の教科書には必ず出ているが，(抵抗のあるときの)単振動というやつがある．上の(7b)式は，その単振動の方程式(抵抗が β)とまったく同じ形をしている．よく知られているように，抵抗がなければ単純な単振動だし，抵抗があれば減衰振動などになる．

すなわち，(7b)式は，いわゆる定数係数の線形同次方程式なので，指数型の一般解を持つ．

$$r\propto \exp(\lambda t) \qquad (8)$$

と仮定して，(7b)式に代入すると，λ に対する式（2次方程式）として，

$$\lambda^2+\beta\lambda+\Omega^2=0 \qquad (9)$$

が得られる．あるいは，λ について解いて，

$$\lambda=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\Omega^2}}{2} \qquad (10)$$

となる．この結果，

0）$\beta=0$………角振動数 Ω の単振動

i）$\beta/\Omega<2$………減衰振動

ii）$\beta/\Omega>2$………過減衰

となる．図1の上では，β/Ω が2より小さいので減衰振動になっており，図1の下では β/Ω が2より大きいので過減衰になっているわけである．

なお，減衰のタイムスケール τ は，

$$\tau=1/\beta \qquad (11)$$

である．

3.2 MBHがケプラー運動していた場合

水平方向に地表におけるケプラー運動の速度で打ち出されたMBHが，抵抗を受けながら次第に地球内部に向かって落ち込んでいく様子を図2に示す．図2上は，地球の内部でのMBHの軌道を表す．MBHは螺旋状の軌道を描きながら，地球の中心へ落ち込んでいく．図2下は，MBHの半径 r と比角運動量 L で，横軸は無次元化した時間 t を，縦軸は無次元化した物理量を表す．MBHの比角運動量は，時間と共に単調に減少している．一方，MBHの半径も時間と共に減少するが，若干波打っているのは減衰振動の影響である．なお，図2では，無次元化した抵抗係数 $\beta/\Omega=0.24$ である．

図2は，基礎方程式(3)を数値的に解いたものだが，角運動量の式(3f)は解析的に積分できる．すなわち，(3f)式を変形すると，

$$\frac{1}{rv_\varphi}\frac{d}{dt}(rv_\varphi)=\frac{d}{dt}\ln(rv_\varphi)=-\beta$$

となるが，β が一定なので時間について簡単に積分できて，最終的に，比角運動量 L は，

$$L=rv_\varphi=L_0\exp(-\beta t) \qquad (12)$$

と表せる．ただしここで，L_0 は最初に持っていた（$t=0$ での）比角運動量である．

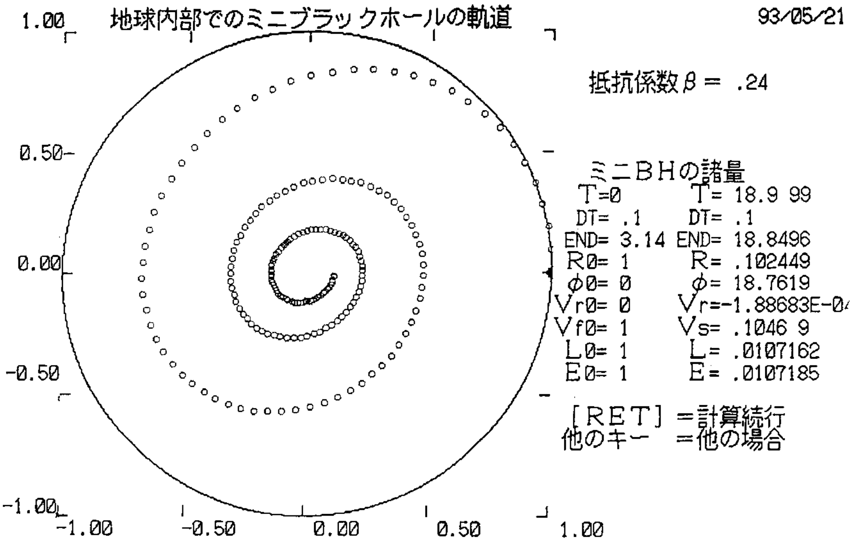
抵抗係数 β が一定の場合には，MBHの比角運動量Lは，時間と共に指数的に減少する（図2下の破線）．角運動量減少のタイムスケール τ は，やはり，

$$\tau=1/\beta \qquad (13)$$

である．すなわち時間 τ が経るごとに，比角運動

量は$1/e$に減少する（図2の例では，時間 1/0.24＝4.17で，比角運動量は1/2.72＝0.368の割合だけ減少する）．

（以下，後編に続く）



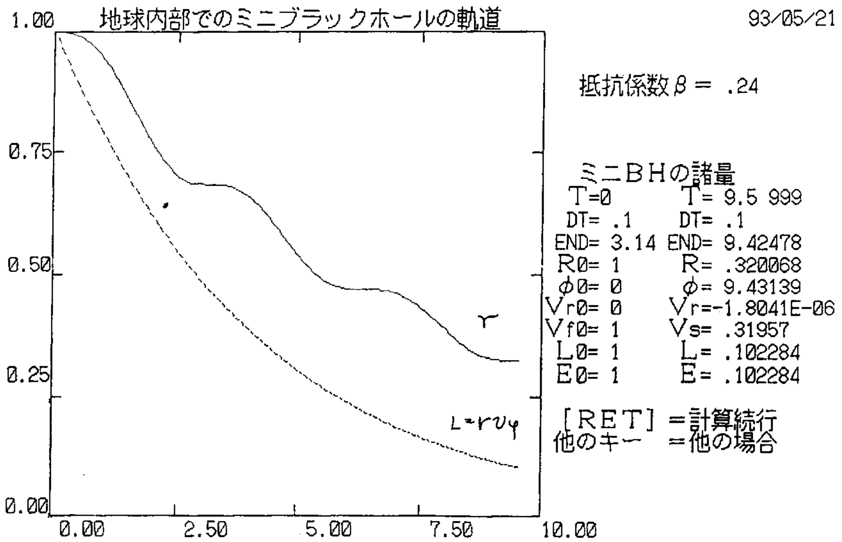


図2