

図2 人工衛星として地球を周回しているハッブル望遠鏡と地上望遠鏡からの冥王星とその衛星 Charon の写真。

中で最大の0.249であるから、太陽に一番近い点である近日点が海王星の軌道の内側にある。冥王星が近日点を通じたのが1990年2月で再び海王星より外側にいくのは1999年2月9日である。冥王星が発見されたのは1930年(図1)であって、発見以来63年しかたっていない。冥王星が太陽の周りを一周する周期は247.8年であるから冥王星は発見以来、軌道上をまだ1/4周しかしていない。

惑星の長期の運動を知るには永年摂動論がある。呼び方はいかめしいが、非線形方程式を線形近似から出発して議論する方法のひとつである。まず惑星の公転周期について平均をとり、惑星の離心率と軌道傾斜角は小さいとして方程式の中でこれらの微小量について2次以上を無視するのである。こうすると1次近似の運動方程式は定数係数をもった線形の方程式となって解けるのである。この方法が適用できるには、軌道が互いに交わっていないことが必要であるので冥王星には従

来の摂動論が適用できないのである。この点に関しては堀がこの困難を解消する摂動関数の展開方法を提案した¹⁾。しかし、残念ながらこの新たな展開をもとに冥王星の運動理論にチャレンジしたものは、今のところ誰もいない。冥王星を除いた解析的な最新の惑星運動論はフランスのブレタニオン (Bretagnon) が構築したVSOP (Variations Seculaires des Orbites Planetairesの頭文字) である。なぜ誰も冥王星の運動理論にチャレンジしないのか？ 冥王星の質量が非常に小さいので内側の惑星に観測にかかるほどの摂動を及ぼさないので冥王星の運動は制限問題として取り扱える。すなわち、摂動を与える他の惑星の運動は分かっているとして相互摂動を考慮する必要がないという見方からすると、相互摂動を高次まで考慮する必要がある惑星運動理論よりも簡単である。とはいうものの、理論計算は面倒で時間がかかるので、パブリッシュ or ペリッシュの現在、なかなか若い人に

は勧めにくいテーマではある。

解析的に冥王星の運動を調べることはいまのところできないし、観測的には冥王星は発見以来1/4公転しかしていないので、長期の冥王星の運動を知るには計算機によるシミュレーションしかない。

共鳴関係の発見

冥王星の長期の運動を初めて数値積分で求めたのはコーヘンとハバード (Cohen and Hubbard) (1965)である²⁾。彼らは NORC という計算機で冥王星の運動を過去に向かって12万年にわたって追跡した。計算時間は80時間であった。横道にそれるが、これは東大に全国初の大学共同利用の大型計算機センターが設立された頃である。センターの計算機は HITAC 5020 (cpu メモリーはたったの64kワード=256kバイト)であって、この計算機を全国の研究者がカードにパンチされたプログラムで利用していた時代であった。日本の天体力学の分野でも小惑星の軌道計算が計算機を使って実行されだしていたが、その期間はたったの数百年であった。

この長期計算で明らかになった事は、冥王星と海王星が完全に3:2の共鳴関係(平均運動共鳴)にあることであった。冥王星が2回公転する間に海王星は3回公転するのである。具体的にいうと、冥王星の経度 λ_P 、海王星の経度 λ_N 、冥王星の近日点経度を ω_P とし、 $\delta=3\lambda_P-2\lambda_N-\omega_P$ として定義される δ が180度のまわりを秤動していることを発見したのである。この秤動の周期は2万年で、その振幅は76度である。冥王星と海王星が太陽からみて同じ方向にくる($\lambda_P=\lambda_N$)ときには、 $\lambda_P=\omega_P+180$ 度となる。この式の意味するところは、速く公転する海王星が冥王星を追い越すのは冥王星が太陽から最も遠くに位置する遠日点近傍にいるときである。すなわち海王星と冥王星の軌道が交わっている付近、冥王星が近日点近傍を運動しているときには海王星は冥王星を追い越さないので

ある。臨界引数 δ の振幅は76度であるから冥王星と海王星の距離は18天文単位より小さくなることはない。従って、よほど特殊なメカニズムを考えない限り、かつて冥王星は海王星の衛星であった可能性はない。

コーヘン達はさらに計算期間を100万年(将来・過去50万年ずつ)に延長した³⁾。計算は1971年になされたが、結果が出版されたのは1973年であった。この計算はIBMのSTRETCHという米海軍特注の計算機で実行された。計算時間はほぼ20時間であった。この当時、日本でのIBMの大型計算機の使用料は商業ベースで1時間でほぼ100万円であった。このころIBMは大学での基礎研究のためにIBMの大型計算機を年間80時間まで無料提供していた。この時IBMが提供した大型計算機より更に高速の計算機を20時間も使うなどということは日本では夢のまた夢という時代であった。

彼らの100万年の計算は冥王星の運動を追跡するというよりは外惑星の長期の運動の様子を調べることにあった。この新たな計算で明らかになったことの一つは、惑星の運動が従来の永年摂動論による理論計算の結果と良い一致をしたことである。離心率と軌道傾斜角が小さいとして方程式を線形化するという大胆な簡略化をしても運動の長期の様子を定性的ばかりでなく、かなり定量的にも知ることが出来ることがわかったのである。冥王星の運動については、離心率がこの期間一方的に減少し、軌道傾斜角は反対に一方的に増加していることが観察された。これは軌道の安定性の点からも問題であった。

近日点の秤動

堀とジャカリア (Giacaglia) は冥王星の離心率と軌道傾斜角の変化の問題にチャレンジした⁴⁾。彼らは摂動天体として海王星だけ考え、海王星の軌道は円運動という制限3体問題として冥王星の運動を取り扱った。以前にも述べたように従来の

摂動関数の展開の方法が使えないので、数値的にハミルトニアンを平均するという半ば解析の半ば数値的な摂動論で冥王星の運動の議論をしたのである。彼らの結論は、近日点引数は秤動するのではなく回転し、その周期は3千万年であった。離心率と軌道傾斜角は一方向的に永年変化するのではなく、近点が1周するのと同じ周期で振動するという結論を得た。コーヘン達の計算期間はこの長周期変化を観察するには短すぎたのであった。

ついでウィリアムスとベンソン (Williams and Benson) が同じ問題を別の方法で研究した⁵⁾。コーヘン達は運動方程式を直交座標で数値積分した。ウィリアムス達は従属変数として直交座標の代わりに摂動がない場合には一定である軌道要素についての運動方程式 (ラグランジュの運動方程式) を数値積分した。摂動があると軌道要素はゆるやかに変化するので数値積分するさいのステップ幅を直交座標に比べて長くとれる。さらに彼らは摂動天体の公転周期で運動方程式を平均化し、運動方程式に現れる摂動天体の軌道要素としてブラウワーによる永年摂動論から得られるものを用いた。これらの工夫により積分ステップ幅を500年 (コーヘン達の積分ステップは40日) とすることができ、計算時間を大幅に短縮出来て、ウィリアムス達は冥王星の運動を450万年追跡した。彼らの結果は、堀達の結果と異なり、冥王星の近日点は90度の周りを約400万年の周期で秤動し、その振幅は24度であった。

近日点が90度の周りを秤動することの力学的な意味は、冥王星の遠日点が海王星の軌道面から最も離れている点にあるということである。前に述べたように臨界引数が180度の周りを秤動すると言うことは、海王星が冥王星に近づくと冥王星が遠日点にいる時であるといった。この遠日点が海王星の軌道面から最も離れているということは、冥王星の現在の運動は海王星になるべく近づかないようにという原理で行動しているように見える。

彼らは、この論文の中で冥王星の運動にはさらに次に述べるような安定化機構が存在するのではないかという推測をしている。冥王星の昇交点と海王星の昇交点が一致するとき、冥王星の海王星の軌道面に対する軌道傾斜角が最大となり、冥王星の昇交点と海王星の昇交点の差が180度になると冥王星の海王星に対する軌道傾斜角が最小となる。このことは冥王星は海王星との接近を避けているということを意味している。さらに冥王星と海王星の昇交点が一致する周期が冥王星の近日点が秤動する周期と一致するのではないかと予想している。この予想が正しいかどうかを判断するには、彼らの積分期間450万年は短すぎる。しかしこの予想はあとで述べるウィズダム (Wisdom) 達の数値積分で確認された。

冥王星の近日点の動きについてウィリアムス達は堀達と異なる結果を導いた。この点に関してはナコージとディー (Nacozy and Diehl) の研究がある⁶⁾。堀達は冥王星の運動を乱すものとして海王星しか考えなかった。ナコージ達は冥王星の運動を乱すものとして海王星のほかに木星、土星、天王星を考慮にいった。長期の運動を議論するので、木星、土星、天王星は質点としてではなく、輪として近似している。解析方法は堀達と全く同じ方法を使い冥王星の近日点が秤動する結果を導いた。すなわち冥王星の運動を安定化する機構の第2のメカニズム (冥王星の近日点は秤動する) には木星、土星、天王星が関与していたのである。

ウィリアムスとナコージ達は平均化された方程式を基に議論している。平均化された方程式から得られる結果と元の方程式の解との関係はどのようになっているのか。直感的には両者の解の差は平均化する際に短いとした周期項だけであると予想される。しかしこのことは証明されている事ではない。

この後、1984年に木下・中井は外惑星の運動を未来へ向かって500万年間追跡した⁷⁾。冥王星の近日点は秤動していることを最終的に確認した

が、残念ながら新たな発見はなかった。近日点の移動の周期は約 400 万年、振幅は 23 度である。木星、土星、天王星、海王星の長期的変動はブレタニオンによる新たな永年摂動論と非常によい一致を示した。このことから平均化された方程式でかなり長期の運動を定性的にも定量的にも議論できるという感触が得られた。この計算は富士通の汎用計算機 FACOM 380 R で約 4 時間かかった。

コーヘン達の 100 万年の計算は 14 年も最長記録を保持したが、木下・中井の記録はすぐに更新されてしまった。1986 年にはウィズダムが専用計算機 (Digital Orrery) で 2 億年の外惑星の計算を実行し⁸⁾、1989 年にはミラニ (Milani) 達がスーパーコンピュータによる 1 億年の結果を発表した⁹⁾。

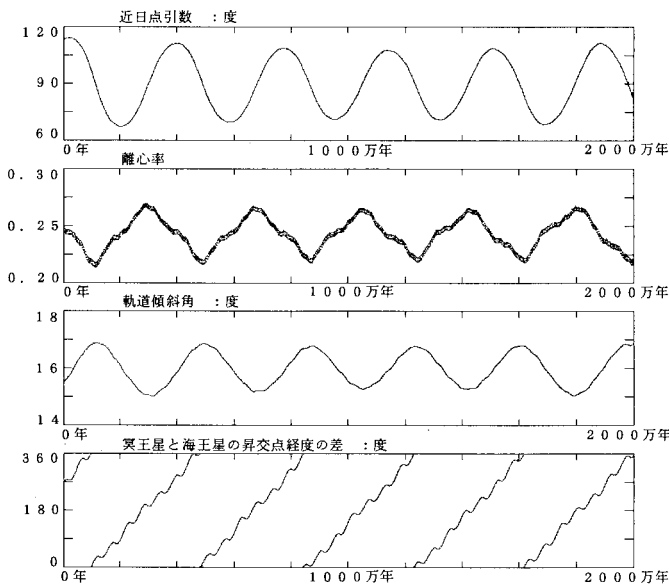


図3 冥王星の近日点引数、離心率、軌道傾斜角、冥王星と海王星の昇交点の変化。冥王星と海王星の昇交点が一致するとき冥王星の軌道傾斜角は最大、離心率は最小、近日点引数は90度となる。冥王星と海王星の昇交点の差が180度となるときには、冥王星の軌道傾斜角は最小、離心率は最大、近日点引数は90度となる。これらの変化の周期は約400万年である。

彼らの計算で明らかになったことは、ウィリアムスが推測していた冥王星の運動の第3の安定化メカニズムが確認されたことである(図3)。これらの計算では、数百万年の計算では精度良く決定できなかった長い周期項の周期と振幅の決定が精度良く出来たほかには、新しい発見はなかった。

冥王星の運動はカオス?

1988年にウィズダム達は専用計算機2号機で外惑星の運動を8.45億年計算した¹⁰⁾。この時、冥王星は質量が小さいので他の惑星の運動には影響しないという近似で計算している。彼らの論文のタイトルは「冥王星の運動はカオスである」というショッキングなものであった。彼の言うリアプノフ時間は僅か2千万年である。(リアプノフ時間

とは後で述べるリアプノフ指数の逆数であって時間の次元を持っている。リアプノフ時間が短いほど、わずか初期条件が異なる隣接軌道が元初軌道から早く離れて行くことをあらわす。)彼の言に依れば、リアプノフ時間の数十倍の後に惑星の離心率とか軌道傾斜角などが大きく変化するという。このあとラスカール (Laskar) は冥王星を除いた8惑星について、離心率と軌道傾斜角の高次まで考慮した永年方程式を数値的に解き、リアプノフ指数が正であるという意味で惑星系はカオスであると発表した¹¹⁾。1993年ウィズダム達は9惑星すべての相互作用を入れた数値積分を行い惑星系は全体としてカオスであり、リアプノフ時間は約400万年であるという結果を得た¹²⁾。最近では惑星系はカオス的であるからリアプノフ時間より長い期間の研究は無駄であるとまで言い出す研究者も出始めている。

我々は冥王星の運動がカオス的であ

ることが信じられず、リアプノフ指数が正となるのは計算による誤差(積分法による打ち切り誤差、計算桁が有限であることに依る丸目誤差)ではないかと疑った。従来のほとんどの積分法は、打ち切り誤差のためにエネルギー積分、角運動量積分に永年誤差が生じる。このことは軌道長半径、離心率、軌道傾斜角に永年誤差が生じ、位置につい

ては時間の自乗に比例する誤差が生じるのである。従って計算期間が長くなるにつれて誤差の累積が無視できなくなるのである。中井は力学系の保存量である積分に、永年誤差が生じないタイプの積分法である対称型線形多段法で冥王星のリアプノフ指数の計算を行い、丸目誤差がリアプノフ指数の計算に及ぼす影響を徹底的に調べた。その

結果、我々の予想に反して、冥王星のリアプノフ指数が正であるということは計算誤差ではないことを確かめた¹³⁾。

図4-1に冥王星の1億年間の軌道要素の変化を示す。図4-2は9億年後から1億年間の軌道要素の変化を示す。2つの期間の軌道の変化は規則正しく、両者の間には何ら目だった差は認められない。あと何十億年もこの規則正しい変化が持続されるであろう事が予想される。それでは力学系がカオスであることの一つの目安であるリアプノフ指数が正であることは冥王星の運動では何を意味するのであろうか。

リアプノフ指数は僅かに異なる初期値をもった軌道の元軌道からの離れ具合を示すものである。隣接軌道の離れ方が指数関数的である時リアプノフ指数が正となるのである。図5は初期値が冥王星と僅かに異なる初期値をもった天体の軌道要素と冥王星の軌道要素の差を示している。横軸が時間で縦軸は軌道要素の差であって対数で目盛っている。図5から明らかなように、僅かに異なる軌道の差の変化は3つの段階に分けられる：

- 第1段階) 差が時間に比例して増加する。
- 第2段階) 差が指数関数的に増加していく。
- 第3段階) 差が飽和して、ある値以上

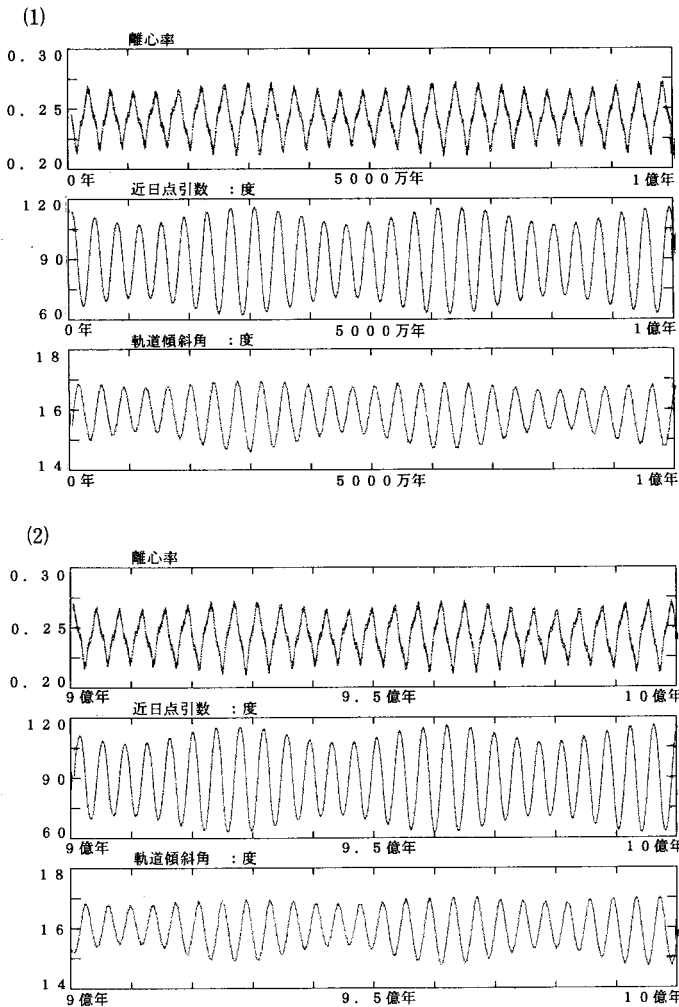


図4 (1) 現在から1億年間の冥王星の軌道要素
(2) 9億年後から1億年間の冥王星の軌道要素リアプノフ時間の40倍以上たっても軌道要素の変化には何等の不規則もみられず、非常に規則正しい。

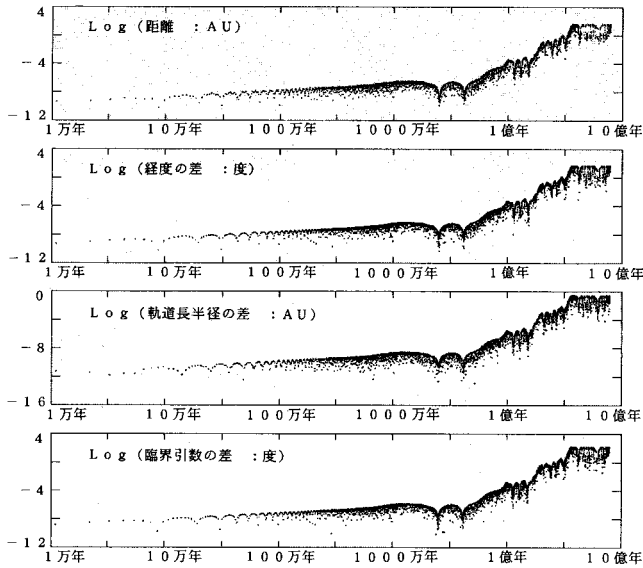


図5 冥王星と僅か異なる初期値を持った天体と冥王星の位置と軌道要素の差の時間変化。差の時間変化は、まず時間に比例して増加し、ついで指数関数的に増加した後飽和する。

にはならない。

ここで不思議なことは第1段階のフェーズが非常に長いと言うことである。この例では、ほぼ200万年も第1段階にいる。冥王星はこの間に8万回転している。カオスの例として有名なヘノン・ハイレスの系では、カオス的な軌道の隣接軌道は、すぐに指数関数的に離れていく。第1段階にいる期間がこのような長いという現象について、いまだ満足のいく説明はなされていない。第3段階での飽和値は臨界引数の周期内での変動幅の中に納まっている。

いままで述べた事を纏めると、冥王星の運動には、次のような安定化機構が働いている：

- 1) 臨界引数 δ は180度のまわりを周期2万年、振幅76度で秤動している。
- 2) 近日点引数が90度の周りを周期約400万年、振幅23度で秤動している。

離心率と軌道傾斜角の変動の周期は近日点引数の

秤動の周期と等しい。

- 3) 冥王星の昇交点と海王星の昇交点が一致するとき、冥王星の海王星の軌道面に対する軌道傾斜角が最大となり、冥王星の昇交点と海王星の昇交点の差が180度になるとき冥王星の海王星に対する軌道傾斜角が最小となる。また冥王星の昇交点経度と海王星の昇交点経度の差が一周する周期は、近点引数の秤動の周期と同じである。(2)と(3)については図3を参照)

この3つの関係は以前に述べたように、冥王星と海王星との接近距離がなるべく大きくなるよう作用している。ここで注意しなければならないことは、軌道

が安定であるためには接近がなるべく起こらないということは証明された事実ではない。このような3つの安定化機構が保たれているのは軌道要素空間でどの様な場所を占めているのかを知りたいが、軌道要素空間は6次元なので調べるのが大変である。そこで、手始めとして臨界引数の初期値を少しずつ変化させて上記の3つの関係がどのようになるかを調べているところである。まだはっきりと断言は出来ないが、臨界引数が大きくなると、まず安定化のメカニズムの第3の関係がやぶれ、ついで第2の関係が破れていくようである。そうして第1のメカニズムが壊されないかぎり、たとえリアプノフ指数が正であっても、冥王星の運動は大局的には規則正しいのではないかと思われる。第1の平均運動レゾナンスの関係が壊されると、冥王星と海王星の大接近が起こり、軌道長半径、離心率、軌道傾斜角が大きく変動する。その例のひとつを図6に示す。

おわりに

現在の冥王星は前節に述べた3つの安定化メカニズムによって、海王星との接近をさげ、たとえリアプノフ指数が正であっても大局的には安定で

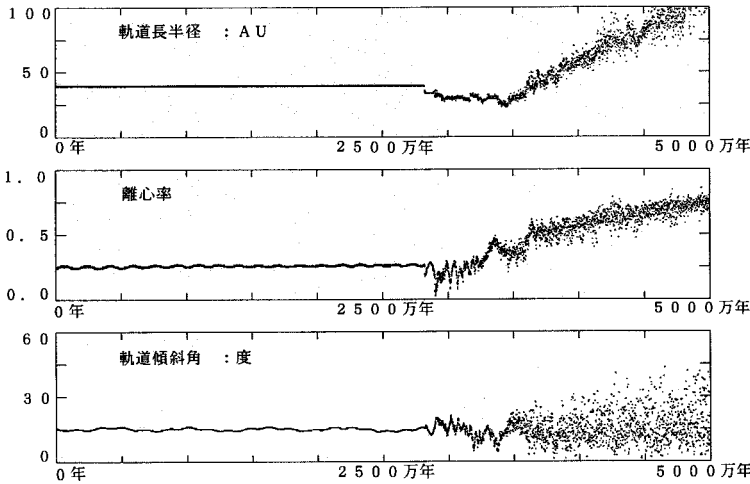


図6 冥王星と海王星の3:2の平均運動共鳴が壊される軌道の変化。軌道要素の変化は非常に不規則である。

はないかと我々は予想している。もしそうだとすると、現在存在する冥王星がこのような3つの関係をいかにして獲得していったのかが大きな問題である。逆のいいかたをすればこのような関係を満たした冥王星だけが生き残ったともいえるかもしれない。しかしこのことを確定的にいうには、海王星より外側で冥王星がいる領域で、現在の冥王星以外の軌道要素を持った天体の軌道安定性を調べなければならない。このことに関しては、最近ウィズダムとホーマンの専用計算機を用いた大がかりなシミュレーションがなされている¹⁴⁾。3:2の共鳴関係については、惑星形成期の最終段階で海王星の軌道長半径がゆるやかに増加している時代に、もともと円軌道に近かった冥王星が海王星との共鳴関係に捕獲され、離心率が現在のように大きくなったという説が最近発表されている¹⁵⁾。冥王星軌道領域に小天体が続々発見された事とも関連して、にわかに太陽系の僻地が観測的にも理論的にもにぎやかになってきている。

参 考 文 献

- 1) Yuasa, M., and Hori, G. 1979, in *Proceedings of IAU Symposium "Dynamics of the Solar System"*, ed. R. C. Duncombe (Reidel, Dordrecht), 69.
- 2) Cohen, C. J., and Hubbard, E. C. 1965, *Astron. J.* **70**, 10.
- 3) Cohen, C. J., Hubbard, E. C., and Oesterwinter, C. 1973, *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, **22**, part 1.
- 4) Hori, G., and Giacaglia, G. E. O. 1968, in *Research in Celestial Mechanics and Differential Equations*, ed. G. E. Y. Giacaglia (University of Sao Paulo, Sao Paulo), 4.
- 5) Williams, J. G., and Benson, G. S. 1971, *Astron. J.*, **76**, 167.
- 6) Nacozy, P. E., and Diehl, R. E. 1974, *Celest. Mech.*, **8**, 445.
Nacozy, R. E., and Diehl, R. E. 1978, *Celest. Mech.*, **17**, 405.
- 7) Kinoshita, H., and Nakai, H. 1984, *Celest. Mech.*, **34**, 203.
- 8) Applegate, J. H., Douglas, M. R., Gursel, Y., Sussman, G. J., and Wisdom, J. 1986, *Astron. J.*, **92**, 176.
- 9) Milani, A., Nobili, A. M., and Carpino, M. 1989, *Icarus*, **82**, 200.
- 10) Sussman, G. J., and Wisdom, J. 1988, *Science*, **241**, 433.
- 11) Laskar, J. 1989, *Nature*, **338**, 237.
- 12) Sussman, G. J., and Wisdom, J. 1992, *Science*, **257**, 56.
- 13) 中井 宏, 木下 宙, 吉田春夫 1993, 第25回天体力学研究会集録, 1.
- 14) Holman, M. J., and Wisdom, J. 1993, *Astron. J.*, **105**, 1989.
- 15) Malhorta, R. 1993, *Nature*, **365**, 819.