マイクロブラックホール・シンドローム

ー地球内部でのマイクロブラックホールの運動ー　後編

福　江　　純

〈大阪教育大学　〒582 柏原市旭ケ丘 4-698-1〉

e-mail : fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

地球内部に潜り込んだマイクロブラックホールは，地球物質を吸収することによって減速され，螺旋軌道を描きながら次第に地球中心へと沈降していく．マイクロブラックホールが地球の中心に落ち着くまでのタイムスケールは，マイクロブラックホールの有効断面積や質量に依存するが，マイクロブラックホールの質量が 10^{15}g 程度の場合，数百年から千年程度と見積られる．

承前になっていない承前

本論とは直接関係ないのですが，2週間ほど前にショッキングな経験をしました．8月の上旬に西はりま天文台で，同天文台が実施している指導者向け天文講習会の一環として，天文学の最前線の話を小中学校の先生方に話したときのことです．もともと人前で話をするのは大の苦手ですが，それでもこの歳になると，どうしても年に4，5回は講演をしなければなりません．したがって，それなりに相手に合わせた内容を用意していきます．このときも先生向けにブラックホールの話をということだったので，毎年某高校で高校生向けに話している話を少しグレードアップして話しました．場のオーラが確かに沈んでいました，少し．

夜の飲み会の席上です．ぼくと同年輩の先生がおられて，もろ体育会系の先生で，またこれがおもろい先生でその夜はこの先生の独壇場だったんですが，毒舌もすごく，こんな調子でした．

“きょうの話は難しすぎるわ！　ぜんぜんわからんかった．え，あんた，37歳！？　おれと同じくらいの歳であんなむずかしいことやったらあかんわ．式が出たとたん，寝てしもうたわ（注：式ったって，天体からの脱出速度とケプラー運動の式ぐらいなんですが）．”

別の先生が“(ぼくが話の冒頭に) いつでも質問してくださいって言われてたでしょう.”とフォローされたんですが，“何を質問していいのか，それさえわからんかった．おれの生徒の気持ちがようわかったわ.”

いや，まったくこの夜はコテンパンでした．

いままで学校の先生相手に話したことは何度もありますし，天文教育普及研究会などでも現場の先生に接する機会がありますが，いままでぼくが会った先生たちは，基本的には天文学に興味をもっている先生方だったのです．天文学にはとくに興味をもっていない先生もいるーおそらく大多数ーという，この当り前の事実を身に沁みて知りました．このとき講習会に来られていた先生たちも，その多くは，そもそも太陽や月について教えるのが苦手なのでそれを何とかしたい，という必死の気持ちで来られたごくふつうの先生たちだったわけです（いや，多くの先生たちは，そのような努力をする時間さえないのが現状かもしれません）．実際，(だれでも聞いたことぐらいあると思っていた)ブラックホールという言葉さえ，“はじめて聞いた”という方もおられました．理科離れは生徒だけではないかもしれません．おまえが世間知らずだったんだ，と言われるかも知れませんが，ぼくにとってはほんとにいい勉強になりまし

Jun Fukue: Micro Black Hole Syndrome

た.

といいつつ，この歳になると図々しいというか，本論は式ばっかりで反省の色が見えませんが，式を見て頭が痛くなる人はせめて図だけでも眺めて下さい.

4. 抵抗係数βが変化する場合

つぎに，抵抗係数βが，MBHの質量mや速度vに依存する－したがって時間と共に変化する－場合を考えよう(付録1). 抵抗係数βは，付録1で導出しているように，

$$\beta=\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$
$$=\frac{\pi(fr_g)^2\rho(v_r{}^2+v_\varphi{}^2)^{1/2}}{m} \tag{14}$$

と表されるだろう. ただしここで，$r_s=fr_g$はMBHが物質を吸い込む半径－$\pi r_s{}^2$がMBHの有効衝突断面積－で，MBHのシュバルツシルト半径r_gのf倍（因子fの評価は付録2）としてある. またρは地球の物質の平均密度である.

基礎方程式は，(3r)，(3f)，(14)式だが，βの変わりにmを用いれば，

$$\frac{dm}{dt}=\frac{4\pi G^2}{c^4}f^2m^2\rho(v_r{}^2+v_\varphi{}^2)^{1/2} \tag{15m}$$

$$\frac{dv_r}{dt}=\frac{v_\varphi{}^2}{r}-\frac{4\pi G\rho}{3}r-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}v_r \tag{15r}$$

$$\frac{d}{dt}(rv_\varphi)=-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}rv_\varphi \tag{15f}$$

と整理できる. ただし$r_g=2Gm/c^2$を用いた.

パラメータは，有効衝突断面積の因子f（かなり大きい；付録2)と，(上の方程式ではあらわではないが)MBHの最初の質量m_0である. 初期条件は，βが一定の場合（3節）と同じにしよう.

4.1 初期状態でMBHが静止していた場合

地表で静止していたMBHが，地球内部に向かって落下を始めた場合の，具体的な計算例を図3に示す. 図3の横軸は無次元化した時間tを，縦軸は無次元化した距離rと無次元化したMBHの質量m（1/10倍）を表す.

パラメータの値は，MBHの初期質量$m_0=10^{15}$gで，有効断面積の因子fが，図3の上の図では，$f=0.06\times10^{15}$，下の図では$f=0.24\times10^{15}$である. 図1の減衰振動の場合のように，MBHは地球の内部をいったりきたりしながらだんだん中心に落ち着いていくが，MBHの質量mが時間と共にだんだん増大するので，減衰の仕方も時間と共に急速に減衰する.

4.2 MBHがケプラー運動していた場合

抵抗係数βが変化する場合，水平方向に地表におけるケプラー運動の速度で打ち出されたMBHが，抵抗を受けながら次第に地球内部に向かって落ち込んでいく様子を図4に示す. 図4上は，MBHの軌道を表す. 抵抗係数βが一定の場合と同様に，MBHは螺旋状の軌道を描きながら，地球の中心へ落ち込んでいく. 図4下は，MBHの半径r，比角運動量L，質量m，そして抵抗係数βで，横軸は無次元化した時間tを，縦軸は無次元化した物理量を表す. MBHの半径も比角運動量も，時間と共に減少するが，MBHの質量や抵抗係数βは時間と共に増大する. なおパラメータの値は，MBHの初期質量$m_0=10^{15}$gで，有効断面積の因子fが，$f=0.24\times10^{15}$である.

図4は，基礎方程式(15)を数値的に解いたものだが，βが一定の場合と同様に，角運動量の式(15f)は解析的に積分できる. すなわち，(15f)を変形して，

$$\frac{d}{dt}\ln(rv_\varphi)=-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

とし，時間について積分して，比角運動量Lは，

$$L=rv_\varphi=L_0\frac{m_0}{m} \tag{16}$$

と表せる. ただしここで，m_0はMBHの初期質量，L_0は初期比角運動量である. この(16)式は，MBHの全角運動量が保存されることを表している（$mL=m_0L_0=$一定).

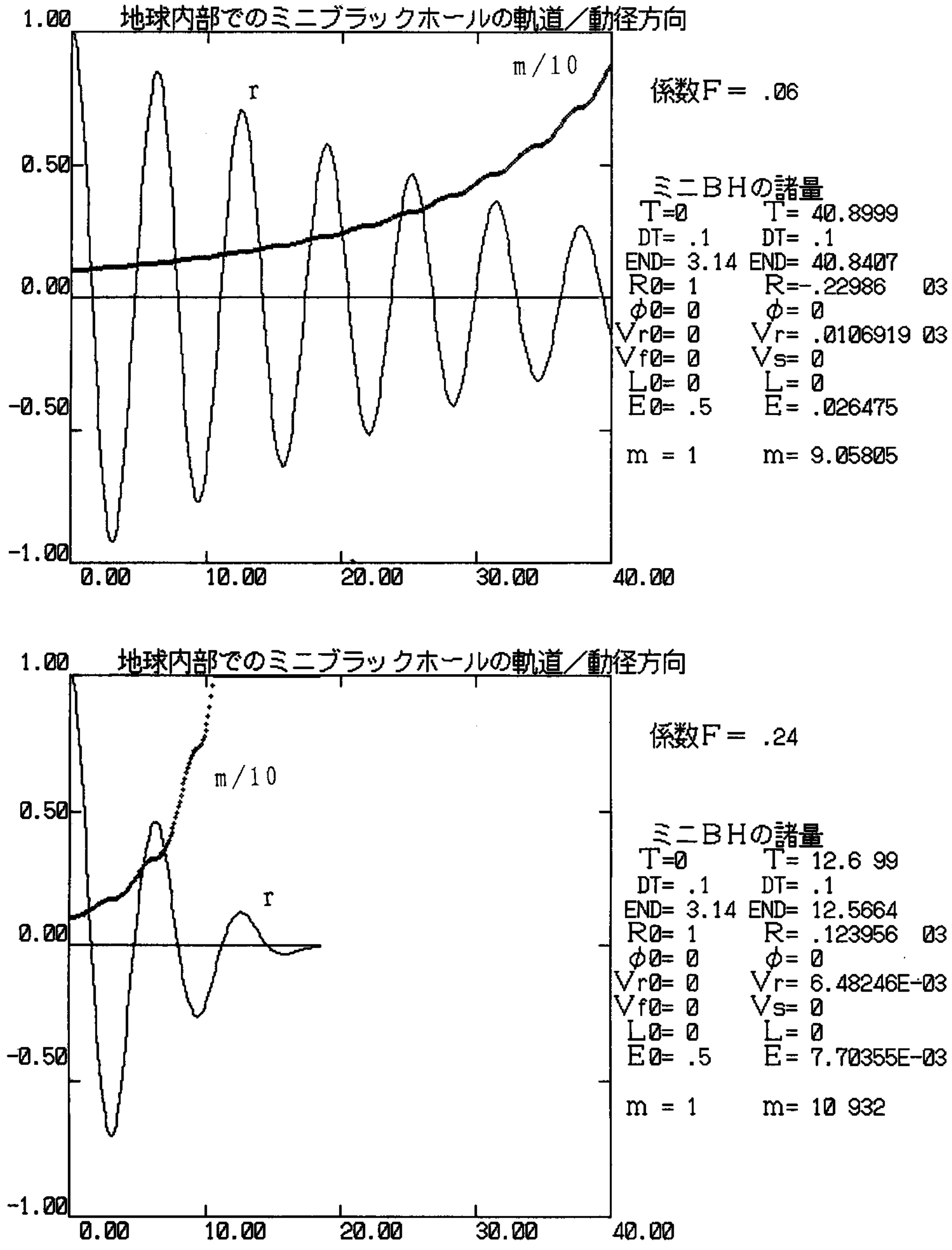


図3

5. 議　　論

最後に，地球内部に潜り込んだMBHが地球中心に落ち着くまでのタイムスケールと，中心に落ち着いた後，地球を喰い尽くすまでのタイムスケールを簡単に議論してみよう．

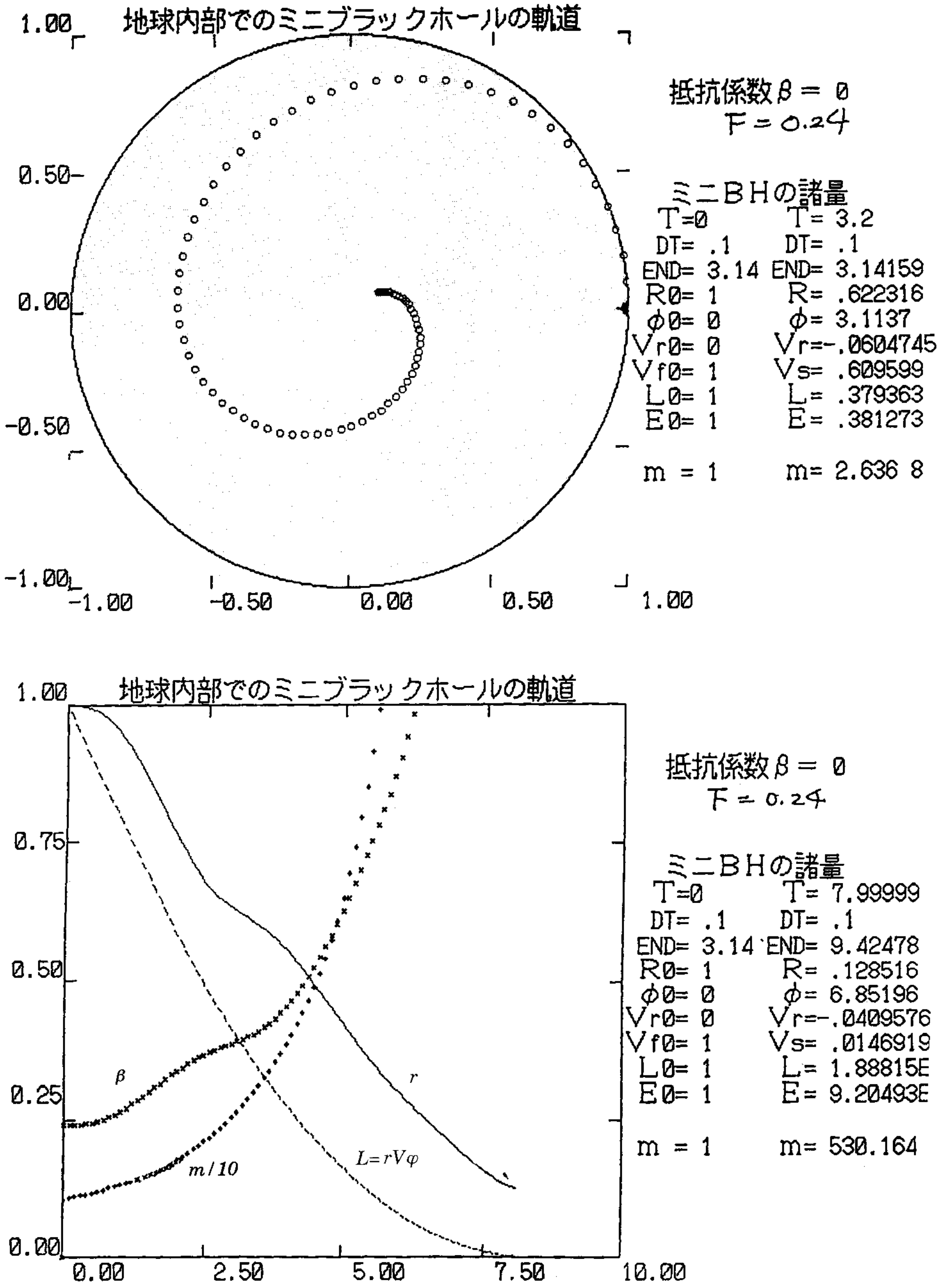


図4

5.1 MBH が地球の中心に落ち着くタイムスケール

さて，まず，抵抗を受けながら地球の内部を運動する MBH は，どれくらいのタイムスケールで地球の中心へ落ち着くのだろうか？ これは実は，先に出てきた，MBH の軌道半径が減衰するタイムスケール，あるいは MBH の比角運動量が減少するタイムスケールに外ならない．すなわち，

MBHが地球の中心に落ち着くまでのタイムスケールτは，

$$\tau=1/\beta \tag{17}$$

である．付録1の評価から，

$$\beta=0.24\times\left(\frac{f}{10^{15}}\right)^2\left(\frac{m}{10^{15}\mathrm{g}}\right)\Omega \tag{18}$$

なので（典型的な速度として地表でのケプラー回転の速度を取った），タイムスケールは，

$$\tau=4.2\times\left(\frac{f}{10^{15}}\right)^{-2}\left(\frac{m}{10^{15}\mathrm{g}}\right)^{-1}\Omega^{-1}$$

$$=3360\mathrm{s}\left(\frac{f}{10^{15}}\right)^{-2}\left(\frac{m}{10^{15}\mathrm{g}}\right)^{-1} \tag{17b}$$

となる（$\Omega=0.00124\mathrm{s}^{-1}$）

MBHが地球の中心に落ち着くまでのタイムスケールτは，MBHの有効断面積の因子f（付録2）やMBHの質量mに依存する．このうち，MBHの質量mは大体10^{15}gとしよう．そうすると，因子fが10^{15}のときはτ～1時間程度であり，因子fが5×10^{11}だとτ～1千年ぐらいになる．

5.2 MBHが地球を喰い尽くすタイムスケール

では，地球の中心に落ち着いたMBHは，どれぐらいで地球を喰い尽くしてしまうのだろうか？これは地球の中心に落ち着いたMBHの質量がどれくらいで増加していくか，という問題と捉えることができる．

すなわち，地球の中心に落ち着いたMBHへは，周囲から地球物質が落下していく（図5）．落下速度はブラックホールの表面で光速である．またブラックホールの表面積は，シュバルツシルト半径をr_g（$=2Gm/c^2$）とすると，$4\pi r_g{}^2$である．したがって，地球物質の平均密度をρとすると，ブラックホールの質量mの時間変化は，

$$\frac{dm}{dt}=4\pi r_g{}^2\rho c=\frac{16\pi G^2\rho m^2}{c^3} \tag{19}$$

で表されるだろう．

この(19)式は，変数分離型なので，質量mは時間tに関して簡単に積分できて，

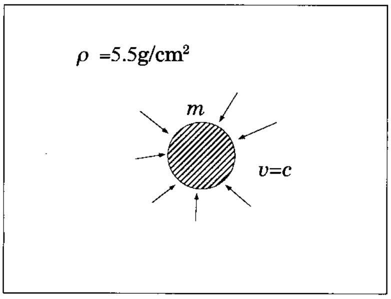


図5

$$\frac{1}{m_0}-\frac{1}{m}=\frac{16\pi G^2\rho}{c^3}t$$

あるいは，整理して，

$$t=\frac{c^3}{16\pi G^2\rho m_0}\left(1-\frac{m_0}{m}\right) \tag{20}$$

となる．ただし，時刻$t=0$で$m=m_0$とした．具体的数値を入れると，(20)式から，

$$t=7.0\times10^{20}\text{年}\left(\frac{m_0}{10^{15}\mathrm{g}}\right)^{-1}\left(1-\frac{m_0}{m}\right) \tag{20b}$$

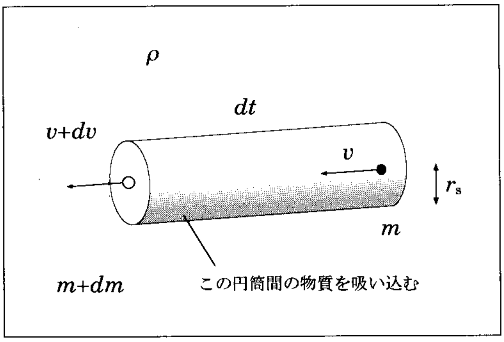
が得られる．これはかなり長い（どこかでおかしなことをしたかな？）．

その他の議論として，今回の解析では，地球の自転は考慮していない．タイムスケール$(1/\beta)$が短い（βが大きい）ときは大丈夫だろうが，タイムスケールが長くなると，地球の自転によるコリオリの力などを考慮しなければならないだろう．

本稿は，ハードSF研究所の公報（非公開）に掲載された報告を書き直したものです．

付録1　抵抗係数βの評価

ここでは，地球内部を運動するMBHが受ける抵抗の大きさを見積ってみよう．抵抗の大きさが知りたいだけなので，地球の重力場や遠心力は無視する．すなわち，付図のように，密度ρ（一定）の媒質中を質量mのMBHが運動しているとする．MBHは，周辺から物質を吸い込みながら運動



付図

するので，ブラックホールの通過した後には，円筒状の虫喰い穴が空くだろう（まわりの物質によってすぐ埋め尽くされるかも知れないが）．その穴の半径を r_s とする（付図）．物質を吸い込んだ結果，MBH の速度は，（運動量保存のため）減速される．以上のことを式で表してみよう．

MBH の最初の質量を m，速度を v とする．さらに微小時間 dt 後の質量を $m+dm(dm>0)$，速度を $v+dv(dv<0)$ とする．

まず質量の増加分 dm は，円筒の体積（dt 間に進んだ距離 vdt×円筒の断面積 πr_s^2）に物質の密度をかけて，

$$dm=\pi r_s^2\rho v dt \quad \text{(A1)}$$

である．あるいは，MBH の質量は，

$$\frac{dm}{dt}=\pi r_s^2\rho v \quad \text{(A1b)}$$

にしたがって増加する．

一方，速度の増加分は，最初の運動量と dt 後の運動量が等しいことから，

$$mv=(m+dm)(v+dv)$$

が成り立ち，両辺を展開して 2 次以上の微小量を落とすと，

$$\begin{aligned} mdv&=-vdm \\ &=-v\pi r_s^2\rho v dt \end{aligned} \quad \text{(A2)}$$

となる．あるいは，整理して，運動方程式として，

$$m\frac{dv}{dt}=-v\pi r_s^2\rho v \quad \text{(A2b)}$$

が得られる．

この運動方程式（A2b）を形式的に，

$$\frac{dv}{dt}=-\beta v \quad \text{(A3)}$$

と表したとすると，抵抗係数 β として，

$$\beta=\frac{\pi r_s^2\rho v}{m} \quad \text{(A4)}$$

だと定義すればよい．この β を用いれば，質量 m の増加式（A1b）は，

$$\frac{dm}{dt}=\beta m \quad \text{(A5)}$$

と表すこともできる．

具体的に β がどれくらいの値になるかとなると，これは結構難しい．まず，吸い込む半径 r_s だがこれはよくわからないので（一応，次節で評価），シュバルツシルト半径 $r_g(=2Gm/c^2)$ の f 倍としよう．周囲の物質の密度 ρ は，地球の平均密度でいいだろう．速度 v は正しくは，動径速度 v_r と回転速度 v_φ の平方和の平方根：$v=(v_r^2+v_\varphi^2)^{1/2}$ だが，大体のオーダーは，地球の表面でのケプラー運動の速度 $v_k[=(GM/R)^{1/2}]$ ぐらいだろう．最後に，MBH の質量 m は，一応，ミニブラックホールの典型的な質量として，10^{15}g くらいとしよう．

以上のことを考慮して（A4）式を変形すると，地球表面での回転角速度 Ω で無次元化した抵抗係数 β の評価として，最終的に，

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\Omega}&=\frac{\pi f^2 r_g^2\rho(v_r^2+v_\varphi^2)^{1/2}}{\Omega m} \\ &=\frac{4\pi G^2 f^2 m\rho(v_r^2+v_\varphi^2)^{1/2}}{c^4\Omega} \end{aligned} \quad \text{(A6)}$$

が得られる．あるいは，具体的な数値を入れて，

$$\frac{\beta}{\Omega}=0.2421\left(\frac{f}{10^{15}}\right)^2\left(\frac{m}{10^{15}\mathrm{g}}\right)\frac{(v_r^2+v_\varphi^2)^{1/2}}{7.91\mathrm{km/s}} \quad \text{(A6b)}$$

が得られる．

付録2　吸い込み半径 r_s の評価

最後に，MBH が物質を吸い込む半径 r_s(すなわち πr_s^2 が MBH の有効衝突断面積）を簡単に評価してみよう．この吸い込み半径 r_s はブラックホールのシュバルツシルト半径 r_g より大きいことは確かである．問題はどれくらい大きいかだ．あるいは，

$$r_s = f r_g \tag{A7}$$

と表したときの，因子 f がどれくらいになるかだ．

ＭＢＨが通過すると，その強い重力—正確には重力勾配—のため，周囲の物質を潮汐破壊しながら進む（冒頭に挙げた作品にも，確か，人体を通り抜けて細胞を破壊する話があったはずだ）．吸い込む半径 r_s は，この潮汐破壊の半径 r_t よりは小さいはずである．すなわち，

$$r_g < r_s < r_t \tag{A8}$$

が成り立つ．問題はどれくらい小さいかだ．潮汐破壊の半径は，ブラックホールの潮汐力と物質の結合力の大小関係で決まる．これも求めてみようと思ったのだが，物性や化学の素養が乏しいために，よくわからなかった．

が，以下のように考えれば，必ずしも，潮汐破壊の半径を求める必要はないようだ．すなわち，潮汐破壊を受けた範囲内では，地球内部の物質は粉々に壊され，原子や分子の段階になってしまうと仮定するのである．その結果，固体としてではなく，気体として扱える．そうすると，物性や化学結合の問題は，ガス中の天体はどれくらいの範囲からガスを吸い込むか，という天文学/流体力学の問題になってしまう．これは天文学の業界ではボンヂ半径としてよく知られている．

すなわち，温度 T（音速 c_s）の星間ガス中に埋まった質量 m の天体が，星間ガスを吸い込む有効半径—ボンヂ半径—は，

$$r_s = \frac{Gm}{{c_s}^2} = \frac{c^2}{2{c_s}^2} r_g \tag{A9}$$

と表される．ただし，$r_g = 2Gm/c^2$ を用いた．音速 c_s は，気体定数 R_g，ガスの平均分子量 μ とガスの温度 T を用いると，$c_s = (R_g T/\mu)^{1/2}$ と表される．地球内部なので，平均分子量を 100 程度，温度を 1000 K ぐらいと置けば，結局，r_s として，

$$r_s = 5.4 \times 10^{11} r_g \left(\frac{T}{10^3 K}\right)^{-1} \tag{A9b}$$

ぐらいになるだろうか．すなわち，

$$f \sim 5 \times 10^{11}$$

ぐらいが妥当な値かと思われる．なお，本文中では，運動の様子を強調するために，

$$f \sim 10^{15}$$

と，少し大きく見積ってある．

ちなみに，MBH の質量が 10^{15}g ならば，$r_s \sim 1$ mm 程度である．

参　考　文　献

福江　純，1993，ハード SF 研究所公報，**52**，８．
プロイス，P.（小隅　黎訳）1986，破局のシンメトリー（早川書房）．
ホイーラー J.C.（野本陽代訳）1988，ブラックホールを破壊せよ（光文社）．

☆

☆　　☆　　☆

☆