自己重力多体系の進化に対する粗視化の効果[1,2)]

土　屋　俊　夫

〈国立天文台理論天文学研究系　〒181 三鷹市大沢 2-21-1〉

銀河などの多体系を扱う際に避けては通れない，粗視化という操作について，考察を行なった．粗視化自身は，気体分子運動論において古くから扱われているが，特に天体について応用しようとする際の粗視化がどういうものであるかを議論し，それに寄与する物理過程を明らかにした．また，N体シミュレーションの信頼性も粗視化を用いて議論できる．

球状星団や楕円銀河などは，ガスを少ししか含まず，星だけから構成されている系と考えて良い．このような系は「自己重力多体系」と称されるが，私の研究は，この自己重力多体系の基本的な物理過程を理解することである．

自己重力多体系は，重力のみで相互作用する質点の集まりであるが，同じように多粒子の集まりである気体とは，相互作用の力の法則のみで異なっている．しかしその違いが本質的なのである．例えば，粒子が散乱されるまでに走る距離の平均(平均自由行程)は，気体の場合我々のまわりの空気で 10^{-5}cm，銀河の円盤で 0.01 pc 程度であり，興味あるスケールに比べて十分小さい．このことは，局所平衡を保証するものである．一方自己重力系では，星の数をN個とすると平均自由行程は，系全体の大きさのN倍にもなる．このような系では一般に局所平衡は成り立たない．この事実の1つの現れが，自己重力系では圧力が定義できないことである．気体分子運動論では圧力は気体分子の速度分散に起因し，局所平衡は，分子の速度分布がマクスウェル分布になることを意味している．自己重力系では局所平衡が成り立っていないために，星の空間分布だけでなく，速度分布も同時に解かなくてはならず，そのことが解析を複雑にしている．

粒子の空間及び速度の分布の進化を扱う形式自体は，気体分子運動論の中で確立しており，我々もそれに従うことにする．そこでは，系の状態は分布関数 $f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$ によって表される．$f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$ の定義は微小な体積要素 $d^3x\ d^3v$ に含まれる粒子の数を $f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})d^3\boldsymbol{x}\ d^3\boldsymbol{v}$ とするものであり，位相空間における粒子の密度を表している．$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ の進化は，ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\Gamma[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t] \tag{1}$$

で表される．ここで $\partial\Phi/\partial x$ は加速度場を表し，左辺全体として，位相空間のラグランジュ微分になっている．右辺はその変化を引き起こす項であり，一般に衝突項と呼ばれている[3,4)]．

ここで衝突項の意味についてもう少し説明を加えさせていただきたい．衝突項の大まかなイメージは図1と図2に示した．今は連続分布である $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ を扱っているが，本来は離散的な粒子系であり，上で説明した通り，有限な体積 $d^3x\ d^3v$ で平均をとる操作が行なわれている．この操作を「粗視化」と呼ぶ．粗視化は密度分布だけではなく速度場や加速度場についても行なわれる．式(1)の中で左辺に出てくる物理量は全て粗視化されている．図1の中で粗視化を行なう領域を円で示してあるが，この領域は粗視化された流れによって運ばれる．もしこの領域内の粒子も粗視化された流れに沿って運動していれば，この領域内に留まる

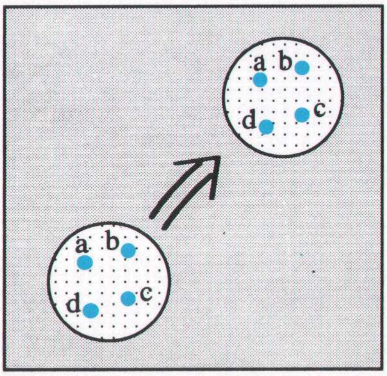

図1　領域内が一様な場合

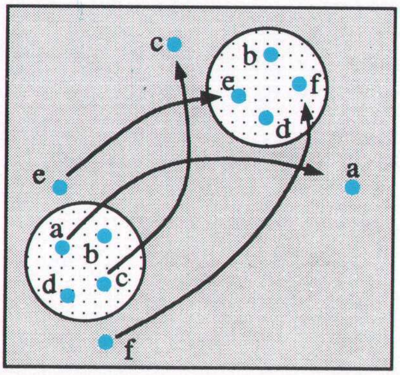

図2　粒子どうしの散乱がある場合

ので，位相密度は変化しない．[(註) free streeming と言えば理解し易い人もいるだろう．] しかし実際の進化は粒子系として行なわれるので，粒子同士の散乱などによってこの領域から飛び出したり，外から飛び込んだりする粒子が存在する．この効果によって位相密度が変化する．つまり衝突項は，粗視化する際に無視されてしまった個々の粒子の運動状態（微視的運動状態）の現れと言うことができる．この微視的運動状態は系によって，または相互作用の力の法則によって異なっており，恒星系においては重力の効果を採り入れて衝突項を評価しなければならない．

私の仕事は重力系での衝突項を，微視的運動状態を記述する基礎方程式から導いたものである．それをこれから簡単に説明する．

基礎方程式は，各々の粒子に対する運動方程式

$$\boldsymbol{x}^{(i)}=\boldsymbol{v}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(i)}}\sum_{j\neq i}\frac{Gm^2}{|\boldsymbol{x}^{(i)}-\boldsymbol{x}^{(j)}|} \qquad (2)$$

であるが，分布関数の形で扱うために次の“微視的分布関数”

$$f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v},\ t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(i)}(t))\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(i)}(t)) \qquad (3)$$

を考える．この分布関数の従う方程式は

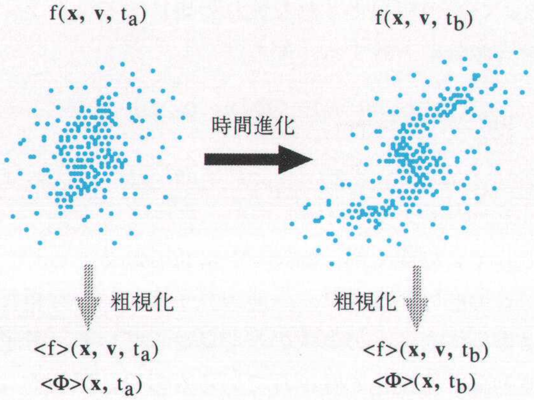

図3

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=0 \qquad (4)$$

$$\Phi(x)=\int d^3\boldsymbol{x}_1\frac{-GNm}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|}f(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{v}_1,\ t) \qquad (5)$$

ここで衝突項がゼロになるのは，f が表すのが粒子自身の内部密度であり，粒子が分裂したり，2つの粒子がくっつくなどしない限りそれは変化しないからである．

実際に我々が扱うのは，粗視化された巨視的な系の進化である．粗視化された物理量を $\langle....\rangle$ で表すことにする．例えば粗視化された分布関数は $\langle f\rangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ である．この粗視化は，有限の分解能で行なった観測に対応している．観測（粗視化）は各時刻毎に行なわれるが，この観測によって系の状態は変化しない．系の進化はあくまで粒

子系として行なわれる.（図3参照）時刻 t_a と t_b に観測を行なって分布を求めたとするとそれらは $\langle f\rangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t_a)$ と $\langle f\rangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t_b)$ になる．この2つを比べる時，観測者は粗視化した流れの場しか知らないので，時刻 t_a に $(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{v}_a)$ に位置していた微小体積要素は粗視化された運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\langle \Phi\rangle(\boldsymbol{x}) \qquad (6)$$

に従って $(\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{v}_b)$ に移動すると観測者は期待する．時刻 t_a と t_b における2つの量 $\langle f\rangle(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{v}_a, t_a)$ と $\langle f\rangle(\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{v}_b, t_b)$ の差は t_b を t_a に近付けていくと，$\langle f\rangle$ の粗視化された流れの場によるラグランジュ微分に一致する．即ち

$$\lim_{t_b \to t_a}\frac{\langle f\rangle(\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{v}_b, t_b)-\langle f\rangle(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{v}_a, t_a)}{t_b - t_a}$$
$$=\left\langle \frac{d}{dt}\right\rangle\langle f\rangle \equiv \frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad (7)$$

そしてこの変化が，衝突項と解釈される．

この形の衝突項は，一般の分子運動論の教科書に書いてあるものと次の点で異なっている．分子運動論で粗視化と呼ばれているものは，巨視的な分布 $\langle f\rangle$ が同じものを与えるような全ての微視的状態を持ってきてそれらで「統計平均」をとるものである．言い換えると多くの異なる状態にある系を重ね合わせることを意味している．一方ここで我々が考えているのは，1つの系だけで，粗視化とは位相空間上での平均を意味している．

分子運動論では確かにこの統計平均の考え方は正しいであろう．なぜなら，分子運動論では，空間についての平均だけでなく，時間についても平均しているからである．我々のまわりの空気の場合，1つの分子あたり1秒間に 10^{10} 回衝突を繰り返しており，興味ある時間スケールで局所平衡が成り立つ．このことは平均をとる時間間隔の間に可能な微視的状態の全てを経験することを意味している．（エルゴード性による．）このような状況では統計平均は適当である．

天体物理学的現象においては，局所平衡は成り立たない場合が多く，また系の進化を考えている時には，時間平均もとることができない．従ってここで説明した方法での粗視化以外に平均のとりようがない．しかしこの粗視化の方法によって導かれる衝突項をきちんと調べたのは私が初めてである．

粗視化による衝突項は式(7)によって表されるが，この式は微視的な状態を決める方程式(4)，(5)を用いると直接書き下すことができる．$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ を用いた衝突項の表現は実際には微視的な状態を知らない観測者にとっては役に立たないが，衝突項に寄与する物理過程が何であるかを調べる時には有用である．

ここで衝突項の具体的な表式を示すことは冗長になるので省略するが，この表式から衝突項には次の2つの効果が寄与していることがわかる．1つは遠くからの粒子によって潮汐力を受け，形が変形していくことによって起こる密度の変化である．（図4参照）変形された場所で粗視化を行なうと平均された密度は減少する．これは，位相空間での体積要素の**混合**の効果である．もう1つは近接した粒子からの強い重力を受けて軌道が大きく曲げられて粗視化の領域から飛び出していくこと

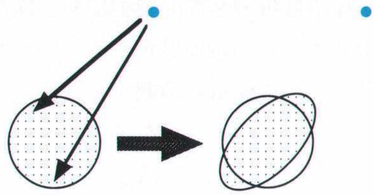

図4　混合

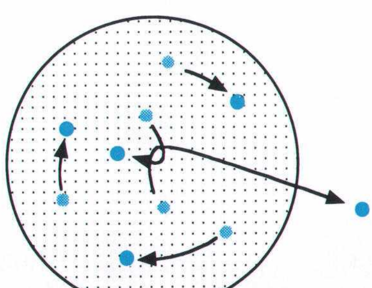

図5　散乱

による密度の変化の効果である．この効果は気体分子などで起こっていることと同じ物理過程で，**散乱**の効果である．気体での衝突項に寄与する効果は，正に散乱の効果しかないが，重力系では，混合の効果が重要になってくる．従ってこの考察は，同じく多体系である，気体と恒星系では，同じ統計的手法を適用していても，全く違った進化をすることを明らかにしている．

ここまでは，気体と恒星系の違いに重点をおいて議論してきたが，次に粗視化による衝突項を調べることで，多体系の数値計算の信頼性について議論できることをお話したい．

多体系の進化を調べる方法の１つにN体シミュレーションがある．これは平均化した分布関数の進化を追うのではなく，N個の粒子系としての進化を追うものである．（流体として計算するのではなく，１つ１つの粒子にかかる力を計算して進化を追う．）しかし通常このNは実際の系の持っている粒子数よりはるかに小さい．例えば銀河中の星の数が10^{11}個に対して，数値計算では10^5個ほどである．これら粒子数の異なる２つの系を比べるには，それぞれを粗視化して，粗視化したもの同士を比べる以外ない．

するとここで湧いてくる疑問は，粗視化された分布は等しいが，粒子数の異なる２つの系をそれぞれ時間発展させた時，粗視化した分布の進化に，いつどのように違いが現れてくるか，ということである．もし十分長い時間その２つに違いが現れないのなら，小さな粒子数の系で大きな粒子数の系の進化を良くシミュレートできているといえる．

この疑問には，粗視化されたボルツマン方程式の衝突項（式(７)）の粒子数依存性を調べてやることで答えることができる．もし粒子数に依らず衝突項の大きさが等しければ，粗視化された分布関数の進化も等しくなるだろう．次元を落して簡単化したモデルで衝突項の大きさを調べてみると，十分多くの粒子を含むような範囲で粗視化している限り，粒子数による違いは現れない．このことは少ない粒子数でのシミュレーションの結果の信頼性を保証するものである．我々にとって興味ある３次元的な分布を持った系についてはまだ調べていないが，近い将来には報告できると思う．

最後にここまで私の拙文を読んで下さった読者には感謝の意を表明したい．

参 考 文 献

1） Tsuchiya T., 1993, Progress of Theoretical Physics 90, 97

2） Tsuchiya T., 1994, Progress of Theoretical Physics 91, 265

3） Binney J., Tremaine S. 1987, Galactic Dynamics (Princeton University Press, Princeton), Section 8

4） リフシッツ，ピタエフスキー（井上建男，石橋喜弘，柳下　崇訳），1981，物理的運動学（東京図書），第１章

Effects of coarse-graining in evolution of self-gravitating many-body systems

Toshio Tsuchiya

Division of Theoretical Astrophysics, National Astronomical Observatory

Abstract : Coarse-graining is necessary in studying many-body systems. Especially in astrophysics, coarse-graining is not statistical averaging, which is usual in molecular dynamics, but averaging over phase space. This averaging gives the collision term in Boltzmann's equation. I discuss the physical process involved in the collision term. The coarse-graining is applicable to determine reliability of N-body simulation.