数値相対論

大 原 謙 一
〈新潟大学理学部物理学科　〒950-2181 新潟市五十嵐2の町8050〉
email: oohara@astro.sc.niigata-u.ac.jp

中性子星やブラックホールなどの一般相対論的な天体の形成や進化の研究には，アインシュタイン方程式を初期値問題として解く必要がある．数値相対論と呼ばれる学問分野では，この複雑な偏微分方程式を，スーパーコンピュータを用いて数値的に解く方法を探る．重力波天文学との関連で注目されている数値相対論の現状と展望を述べる．

1．計算物理学，数値天体物理学

今年の3月，Numerical Astrophysics 1998という国際会議が東京で開催され，約20ヶ国からの180人以上の参加者と100以上の研究発表（ポスター発表を含む）があった[1]．分野は，惑星から宇宙の大規模構造までを含み，計算機シミュレーションが天体物理学理論の研究において非常に重要な手法となっていることを示していると言えよう．

数値天体物理学(Numerical Astrophysics)というのは，複雑な方程式をコンピュータを使って数値的に解き，様々な天体や宇宙の構造，進化を解明しようという学問である．このような手法は，天体物理学独特のものではなく，広く物理学や工学の分野で利用されている．一般に，物理学の理論と実験，観測を比較するためには，理論に出てくる方程式を何らかの方法で解かなければならない．あるいは，現実の機械や装置の設計をする際にも，理論的な方程式を解くことを要求される．これらの方程式を解くには，普通何らかの簡単化や近似をする必要がある．例えば，球対称や軸対称のような対称性を仮定して変数の量を少なくするとか，ある物理量は非常に小さいとして，その量に対して巾級数展開をするなどである．しかし，現実的な問題では，このような仮定が適用できなかったり，あるいはこのような簡単化をしても方程式を解くことが容易でないことが少なくない．宇宙物理学では，この種の問題がたくさんある．例えば，二重星の問題では，基本的に球対称や軸対称性は全くないし，磁場や星の内部でのエネルギー輸送など考える必要がある場合には，たとえ軸対称系でも方程式を解析的に解くことはほとんど不可能である．

「計算物理学」という手法がこのような問題の研究に新しい境地を開いた．コンピュータのことをよくご存じない人は，コンピュータを使えば何でも方程式を解くことは簡単にできるように思うかもしれないが，コンピュータを使って数値的に方程式を解くためにもある種の近似がなされる．つまり，現代の高速なコンピュータは，いわゆるデジタル計算機であるので，連続的に分布する量をデジタル化する必要がある．例えば，連続的に存在する時間と空間を有限の間隔の格子に分割したり，連続的に分布する流体を有限な要素の集合としてとらえることが必要になる．これは，方程式を近似するための微小な物理量がない状況に，時間と空間を分割した格子の間隔とか流体を分割した要素の大きさという微小量を人為的に導入することにより，方程式を解けるようにすると見ることができる．

2．重力と一般相対論

太陽のような星や銀河の構造や進化を決めている最も重要な力は重力である．普通の星や銀河の

重力を記述する法則はニュートンの万有引力の法則であるが，重力によって宇宙空間のガスがかたまり，様々な個性を持つ星や銀河がどのようにしてできるのかということを知ることは実は簡単なことではない．さらに，中性子星やブラックホールなどのような非常に強い重力は，ニュートンの万有引力の法則ではなく一般相対論によって取り扱わなければならない．アインシュタインの一般相対論の検証は，水星の近日点移動，太陽の近くを通る光の屈折やその到達時間の遅れなど，いくつかの観測事実によって示されている[2)]．さらに，PSR1913+16という連星パルサーの公転周期の変化から，重力波の発生が間接的にではあるが証明されている．ちなみに，連星の近星点移動（これは水星の近日点移動に対応している）や伴星による電波の伝わる時間の遅れは，太陽系での同様の観測よりけた違いに大きなものが観測されており，その値は一般相対論の予測と非常によく一致している[3)]．重力波とは，重力場の変動が波動となり，エネルギーを伝播させるものである．電場や磁場の変動により電磁波が発生するのと同様のものと考えてよい．ニュートンの万有引力の法則では重力波が発生することはなく，重力波の観測は相対論的な重力理論の決定的な証拠といってもよい．特に，これまでの一般相対論の検証は，太陽などが作る静的な重力場の中での観測であったが，重力波は重力場の変動に起因するもので，その重要性は非常に大きなものである．

3．数値相対論

現在，欧米や日本で，レーザー干渉計を用いた重力波観測装置の建設が進められている[4)]．これらの装置の主なターゲットは，PSR1913+16のような中性子星あるいはブラックホールの二重星，つまり連星中性子星や連星ブラックホールから放射される重力波である．PSR1913+16が現在放射している重力波は非常に微弱で，計画されているレーザー干渉計でそれを捕らえることは不可能である．しかし，PSR1913+16を構成する2つの中性子星は，約3億年後に衝突して合体し，このとき強い重力波が放射される．もちろん，われわれは3億年後の重力波を捕らえることを期待しているわけではない．広い宇宙全体では，このような連星中性子星は多数存在するはずである．どれぐらいあるのかを推定するのは簡単なことではないが，ある計算によると，1年に少なくとも1つの連星中性子星の合体による重力波が観測できるといわれている[5)]．

後述するように，連星中性子星が合体しブラックホールになる過程を追って，その際に放射される重力波を計算するためには，アインシュタイン方程式を初期値問題として解く必要がある．これを解析的な計算ですることは不可能なので，数値シミュレーションが必要である．これが，数値相対論と呼ばれているものである．

数値相対論の計算は，基本的に（ニュートン力学での）流体力学のシミュレーションと同様の形式で行うことができるが，大きなちがいは，時空（時間と空間）にどのような座標系を設定するかということである．アインシュタイン方程式は，一般共変性という，座標変換に対して不変な性質を持っている．これは，一般相対論では，どのような時間と空間の座標系を用いてもよいということであるが，数値計算で方程式を解く立場から見ると，どのような座標系を用いるのが適当かあらかじめ分らないということである．例えば，ある2つの出来事が，ある座標系では同時（時刻 t が同じ）に起ったことになるが，別の座標系では別々の時刻に起ったように見えるということがある．つまり，$t=$一定の空間をどのように設定するかは（ある条件のもとで）自由なのである．アインシュタイン方程式を初期値問題として解くということは，ある時刻 t での物質の分布とそれによる重力場を与えて，次の時刻 $t+\Delta t$ での物質や重力場を解くことを繰り返して時間発展を追うということであるので，$t=$一定の空間を定めなければならない．数学的には，図1のように，4次元時空を3次元の時間的超曲面

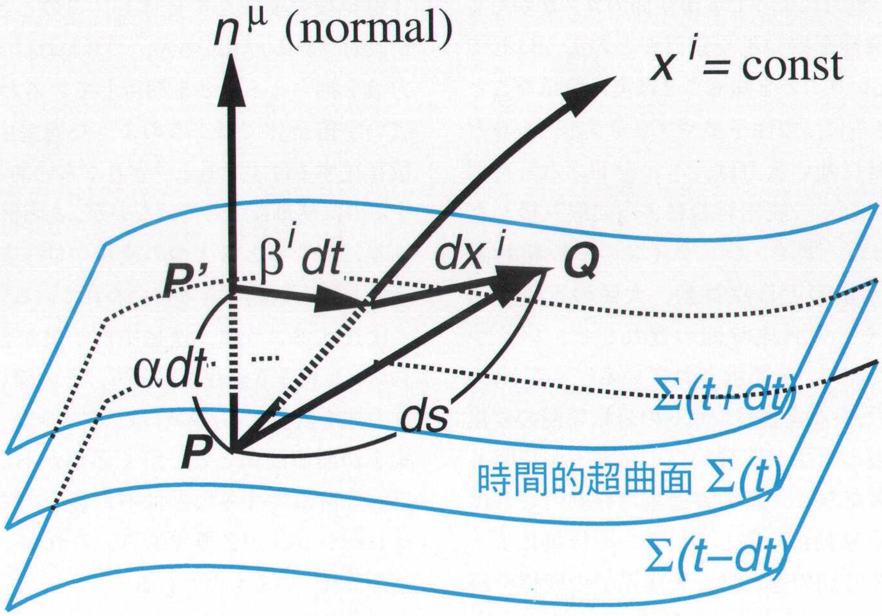

図1　4次元時空の (3+1) 次元形式による分割

で分割していくことで，時間スライスと呼ばれている．時間スライスの取り方は，場所ごとでどのように時間を進めるかを決めるラプス関数 α によって決定される．どのようにこれを決めるかは問題によって，また何を知りたいのかによって異なる．注意しないといけないのは，下手な座標系を選ぶと，タイムステップをいくら進めてもある領域の実際の時間が全然進まなくなることである．逆に，ブラックホールが形成される場合，その中心では時空の曲率が無限大になる事象の特異点が発生するが，特異点が発生すると数値計算が進められなくなるので，図2のように，特異点ができそうな領域の時間が進まなくなるように時間スライスを選ばなければならない．

連星中性子星の合体の問題では，時間座標の取り方だけでなく空間座標の取り方にも注意が必要である．というのは，システムが角運動量を持っていると「時空の引きずり効果」で見かけ上の特異点が発生することがある．はじめまっすぐな座標系を張っていても，空間が巻き込まれるため，座標系の歪が大きくなってしまうことがあり，それを避けるような座標系を取らなければならない．これは，ひとつの時間的超曲面と次の超曲面の間の空間座標のずれをあらわすシフトベクトル β^{i} を決めることによってなされる．また，時間と空間の座標の取り方（合わせて座標条件と呼ぶ）は，放射される重力波が正しく計算できるかどうかとも密接に関わる重要な問題である．

具体的な計算手順は次のようになる[6]．まず，アインシュタイン方程式を，時間的超曲面上に射影した成分とそれに垂直な成分に分ける．超曲面上に射影した成分は，時間による微分を含まないので，束縛方程式と呼ばれる．一方垂直な成分は時間微分を含み，重力場の時間発展を記述する方程式となる．これによって，4次元時空の方程式を時間（1次元）と空間（3次元）に分解したことになり，（3＋1）次元形式と呼ばれる．物質の運動については，エネルギー・運動量テンソルの保存

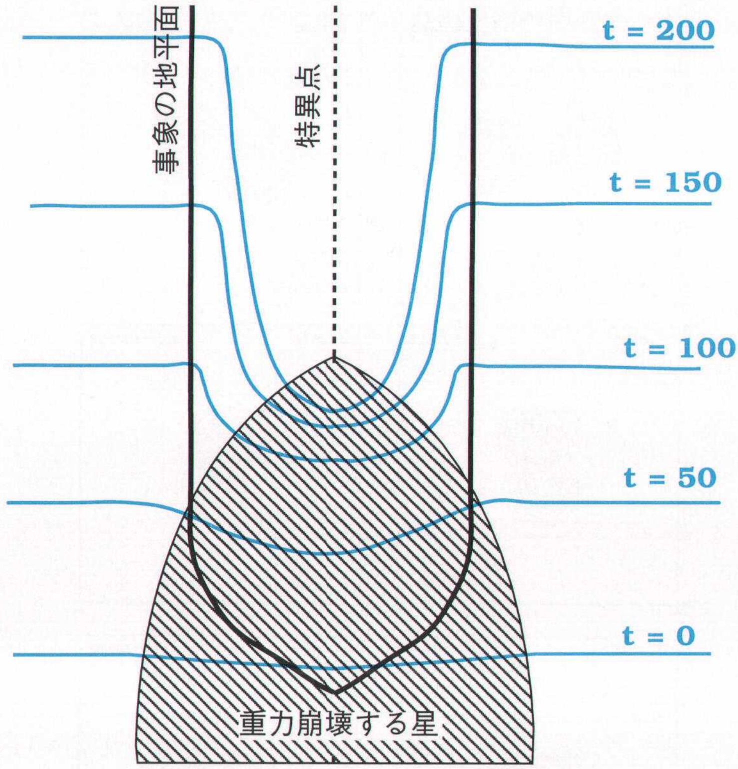

図2　ブラックホールができるときの時間スライス

則から導出される一般相対論的なオイラー方程式によって記述される．これは，ニュートン力学でのオイラー方程式と同様の形式をしているので，非相対論的な流体力学の数値シミュレーションで用いられる手法を応用して解くことができる．

4．連星中性子星の合体の数値シミュレーション

レーザー干渉計を用いた重力波観測装置の建設が計画されはじめたころから，その重要な重力波源である連星中性子星の合体の詳しい研究が始まった．合体の過程は大きく分けて，次の３つのフェーズからなる．（1）２つの星が十分離れている場合で，重力波によりエネルギーを失う時間スケールは公転周期に比べて十分長い，準静的なフェーズ．（2）相対論的な効果と星に大きさがあるために連星の軌道が不安定になって，２つの星が急速に接近しはじめるフェーズ．（3）２つの星が合体して，ブラックホールになるフェーズ．数値相対論で，（1）のフェーズからはじめて最後まですべて計算することができればいいのだが，これは非常に困難である．その最大の理由は，非常に計算時間がかかるということである．（1）から（2）までに，何周期も連星系が公転するのを追わなければならないので，これを計算しようとすると，現在最も高速のスーパーコンピュータを使っても，何千時間もの計算時間が必要になる．また，たとえそれだけの間スーパーコンピュータを独占できたとしても，数値計算には必ず誤差が入ってくるので，長い時間

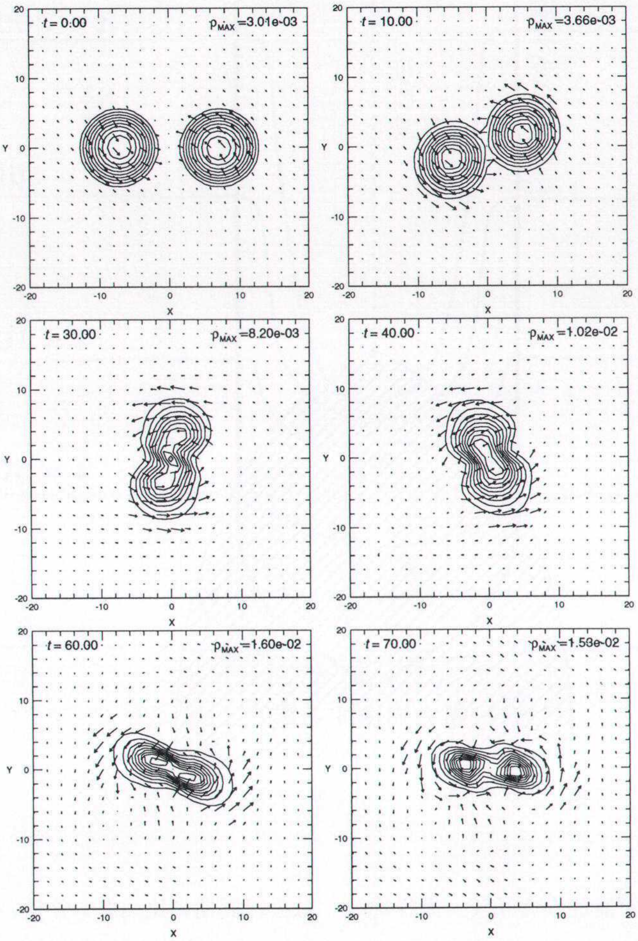

図3　連星中性子星の合体．曲線は x-y 面での断面を，矢印は速度を示す．

ステップにわたって計算精度を維持することはきわめて困難である．そのため，３つのフェーズを別々に取り扱うことになる．（１）のフェーズでは，２つの星をほとんど質点と考えられ，また，一般相対論の効果もそれほど大きくなく，星の速度 v は光速度 c の 10 分の 1 程度なので，アインシュタイン方程式を（v/c）の巾乗で展開するという近似（ポスト・ニュートン近似）により，解析的あるいは半解析的にかなり精密に重力波を計算することができる[7]．（２）についても，２つの星がどこまで近づけば不安定になるのかということが，ポスト・ニュートン近似などを用いた数値計算で調べられている[8]．（１），（２）の計算で明らかになったことをもとに，（３）のフェーズに対して完全に相対論的な数値シミュレーションを行うことになる．数値シミュレーションによる研究の先鞭を付けたのは，われわれ日本のグループである．ただし，当時最大のスーパーコンピュータを用いても，アインシュタイン方程式をまともに解く，空間的に３次の数値相対論の計算を行うことはとうてい不

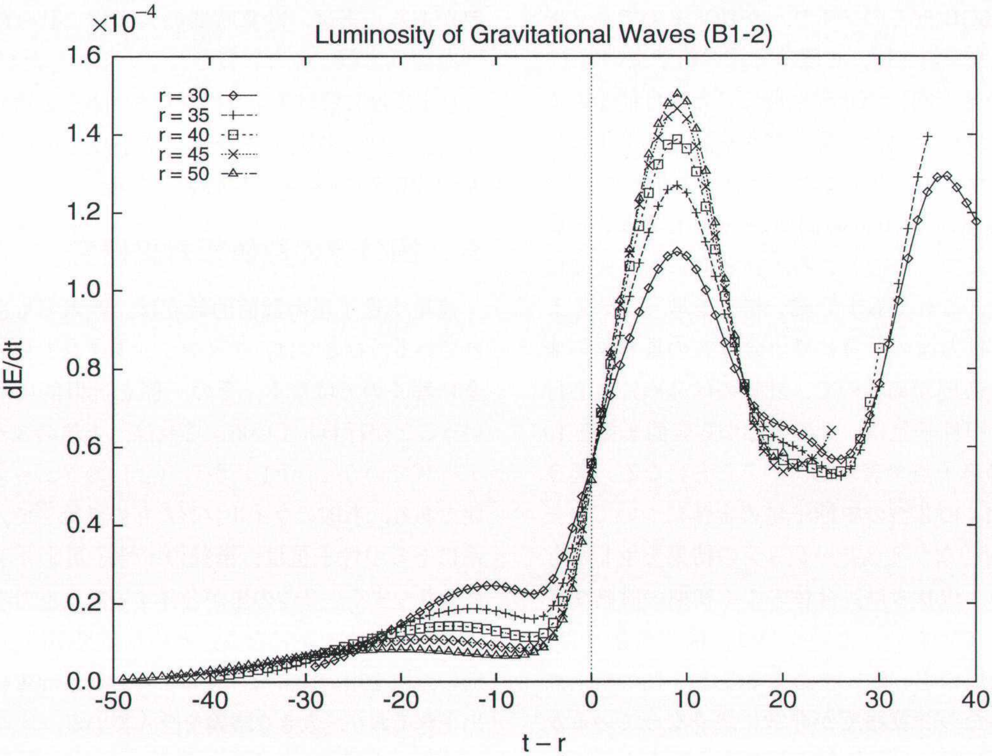

図4　放射される重力波のエネルギー．いくつかの半径の球面上で積分したエネルギーを遅延時間 t–r として示している．

可能であった．そこで，われわれは1980年代後半から90年代前半にかけて，重力場はニュートン重力で，それに重力波放射の反作用などの一般相対論の効果による補正を加えたものを用いた，ポストニュートン近似による数値シミュレーションを精力的に進めた．ここでは，基本的計算法として有限差分法を用いている．必要なメモリーを少なくするということを考えれば，SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を用いた方がいいかもしれないが，将来の一般相対論的コードへの移行を考慮して，SPH 法は用いなかった．また，座標系は，これもメモリーのことを考えると，極座標を用いたいところであるが，極座標の原点や軸上での座標特異点の取り扱いが，一般相対論的コードではきわめて困難であるため，デカルト座標を用いた．計算規模は，約1 GB (ギガバイト) のメモリーを使い，最高演算性能約2 GFLOPS のスーパーコンピュータで，１つ当り100～200時間程度かかるものであった．ポストニュートン近似による数値シミュレーションの結果については，以前に報告したことがあるので[9]，ここでは繰り返さないことにする．

1990年代半ばに，高エネルギー物理学研究所 (KEK,現高エネルギー物理学研究機構）や国立天文台などに，ベクトル-並列型のスーパーコンピュータが導入され，それを用いると一般相対論的な３次元数値相対論の計算を行うことが可能となってきた．現在，一般相対論的コードを作成中であるが，上で述べたように，基本的には，有限差分

法とデカルト座標系を用いている．国立天文台のスーパーコンピュータ VPP300 では，１つの計算で最大 30GB 近くのメモリーが使えるので，メモリーの点から言えば，有限差分法の格子点の数を，x, y, z の各方向に 400 程度取ることが可能であるが，この規模で中性子星が合体をはじめて１つのブラックホールになるまでを計算しようとすると，約 500 時間から 1000 時間かかってしまうことになる．そこで，今のところ，各方向に 200 程度にしている．これでも十分細い格子を取っているようだが，重力波の計算には十分遠方の重力場の変化を追う必要があるので，計算のはじめに中心付近にある中性子星は，その中心から表面までを 10 個以下の格子点で表現していることになる．図３は，$1.5M_{\odot}$ の２つの中性子星の合体についての一般相対論的なシミュレーションの結果を示したものである．現状では，合体のごく初期の段階までしか追えていない．というのは，図の最後では，合体した星の中心から表面までに 2, 3 個の格子点しかないため計算精度が非常に悪くなっているからである．図４は，放射される重力波を中心からいくつかの半径の球面上 r で計算したものを遅延時間 t - r の関数として示したものであるが，曲線がほぼ重なって表示されているのは，光速度で伝播する重力波をちゃんと捕らえられているということを示している．r が小さなところでずれているのは，その半径が小さすぎるためである（本来，重力波は $r \to \infty$ で求めなければならない）．以上の計算では，時間スライスの条件に「共形座標条件」と空間座標の条件に「疑似最小ディストーション条件」を用いている．これらの座標条件を用いることにより，ブラックホールが形成される際の特異点近傍で時間を進まないようにすることができると同時に，放射される重力波のエネルギーを精度良く計算することが可能となっている[6]．しかし，この座標条件は，長い間時空の時間発展を追っていくと不安定性を発生させる性質を持っていることが知られており，改善の余地が残されている．また，この座標条件では，いくつかの準線形な楕円型の微分方程式を各時間ステップで解く必要がある．実は，計算時間の大半はこれらの楕円型方程式を解くことに費されている．したがって，これを高速に解けるようにプログラムを最適化することが，同じ時間でより細い格子点を用いた高精度の計算をするためには必要である．

５．国外での数値相対論研究

連星中性子星の数値的研究は，欧米でも進められている．ひとつは，アインシュタイン方程式を完全に解くのではなく，その一部を近似的に解くということが行われている．これは，上述の３つのフェーズでいうと，（１）から（２）のフェーズの問題である．米国のウィルソンたちの計算[10]で，連星系にある中性子星は，単独の中性子星より不安定になりやすく，２つの星が合体する前に重力崩壊してブラックホールになる，という結果が出された．別の方法を用いた計算[11]ではこれと異る計算結果が出されており，大きな議論を呼んでいる．

また，上述のわれわれの計算では，簡単のため，初期条件として２つの中性子星は球対称であると仮定したが，本当は正しくない．これに対して，フランスのグループは，この初期条件となるべき，自転している２つの中性子星からなる一般相対論的な連星系の準平衡形状の計算方法を開発している[12]．

一方，ドイツと米国のグループは，連星ブラックホールの合体を中心としたシミュレーション・コードの開発を精力的に行っている[13]．ブラックホールの問題は，中性子星の問題とちがって，真空の時空構造の発展を取り扱うため，流体の方程式を解く必要はないが，はじめから事象の特異点が存在している時空を扱うため，特異点の回避の方法という別のやっかいな問題が含まれている．

６．今後の展望

連星中性子星の合体のシミュレーション・コードの完成までに解決すべき問題がいくつか残ってい

る．ひとつは，先に述べた時間スライスと空間座標の取り方とその数値解法の問題である．さらに，流体や重力場の時間発展方程式（双曲型偏微分方程式）に対しても，安定で高精度な数値解法の開発が必要である．この方程式は，基本的に流体力学のオイラー方程式とよく似た方程式であるが，速度場の定義のちがいなどにより，方程式の性質は異るため，数値流体力学の手法を単純に当てはめられない面がある．

この他にも，計算結果の蓄積の問題もある．非常に大きな計算のため，計算結果を解析して何が起っているのか明らかにするためには，計算結果をディスクに保存して，シミュレーションが終わってから，星の立体構造や重力場の時間変化を動画として表示することを含めた解析が必要になる．そのために必要なデータ量は，100 GB ら 1000 GB 程度にもなり得る．これをどのように蓄積して解析するかというのは非常に大きな問題となってくる．

どこまでの計算が可能かということは，スーパーコンピュータの進歩にも依っているところが少なくない．次期スーパーコンピュータに関して，KEK では導入に向けての具体的な議論が始まっており，国立天文台でもまもなく具体化してくるだろう．期待される性能は，現有のスーパーコンピュータの数十倍である，1TB (テラバイト =1000GB), 1TFLOPS (=1000GFLOPS) 程度である．高性能な計算機が使えるようになると，単に格子点の数を増やすことができて精度良い計算ができるようになるというだけでなく，今まで様々の工夫をこらさなければならなかった点が，かなり単純な方法を用いてクリアできることが少なくない．そういう意味で，次期コンピュータへの期待は大きい．

参考文献

1）詳しくは，Numerical Astrophysics 98 (Kluwer Acad. Pub., Dordrecht. 1998), eds. S. M. Miyama, K. Tomisaka, T. Hanawa をご覧ください
2）Will C.M., 1992, Proceedings of the Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Rel ativity (World Scientific, Singapore), 769
3）Taylor J.H., 1993, Proceedings of GR12 (Inst. of Phys. Pub., Bristol), 287
4）藤本眞克, 1998, 天文月報 91, 8
5）Phinny E.S., 1991, Ap. J. 380, L17
6）Oohara K., Nakamura T., Shibata M., 1997, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 128, 183
7）Asada H., Futamase T., 1997, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 128, 123
8）Shibata M., Oohara K., Nakamura T., 1997, Prog. Theor. Phys. 98, 1081
9）中村卓史，大原 謙，1990, 天文月報 83, 192
10）Wilson J.R., Mathews G.J., Marronetti P., 1996, Phys. Rev. D54, 1317
11）Baumgarte T.W., et al., 1997, Phys. Rev. D57, 7299-7311
12）Bonazzola S., Gourgoulhon E., Marck J.-A., 1997, Phys. Rev. D56, 7740
13）Seidel E., 1998, Gravitation and Relativity; At the turn of the Millennium (IUCAA, Pune), 107

Numerical Relativity

Ken-ichi OOHARA
Department of Physics, Niigata University, Ikarashi Niigata 950-2181

Abstract: Coalescence of binary neutron stars or black holes is a important source of gravitational waves. Numerical relativity, where the Einstein equation is solved as a Cauchy problem using a super-computer, is the unique method for studying the nonlinear phase of the coalescence. I review recent developments in numerical relativity.