2体問題の解析的解法を264年ぶりに発見して，レファレンスのない論文を書いた！

佐　藤　　勲
〈渡辺技術研究所　〒180-0023 東京都武蔵野市境南町 2-8-17 サンライズアキモトビル 401〉
e-mail : isao@dodgson.nal.go.jp, satoois@cc.nao.ac.jp

射影幾何学を使って，2体問題における2体衝突の特異性を解消することによって，2体問題の新たな解法が発見された．この発見は，オイラーが円錐曲線である2体問題の軌道の形に，真近点角と離心近点角による代数的表現を与えて以来の大発見である．筆者は，この発見によって，引用論文がないという非常に珍しい論文を書いた．

1．解き尽くされた2体問題

ドイツの天文学者ケプラーが，惑星の運動についての3つの法則を発見し，それに基づいてニュートンが万有引力の法則を発見したのは，17世紀のことである．以来，万有引力の法則を使って，天体力学の多くの問題が解かれてきたが，3つの天体が引力を及ぼしている時の運動を論ずる3体問題が，特別な場合を除いて解析的に解けないことが証明された一方で，2つの天体が引力を及ぼしている2体問題は，解析的に解ける数少ない力学問題の一つとして，また天体の運動の基本として，詳しく研究されてきた．その結果，2体問題の軌道は，円，楕円，放物線，双曲線という，円錐曲線になることは，よく知られている．

実は，2体問題には，これ以外に，2天体が衝突する直線軌道がある．この2体衝突の時には，天体の速度が無限大になるので，2体衝突の前後の軌道を数値的に解くことはできなかった．すなわち，2体衝突は，2体問題の特異点である．しかし，この2体衝突の困難も，今世紀になって，レビ・チビタ変換やKS変換によって解決され，もはや2体問題には，あまり重要な問題は残されていないと思われていた．

2．平均近点角，離心近点角，真近点角

2体問題は解析的に解けるので，2体問題の解き方は，確立されている．詳しいことは，「天体の位置計算」（長沢　工）等に譲るが，標準的な解き方の場合，惑星の近日点から測って，時間とともに一様に増加する平均近点角 M と，太陽を中心として惑星まで測った真近点角 f は，ケプラー方程式

$$u - e\sin u = M \tag{1}$$

によって導入される離心近点角 u を仲介して，

$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tan\frac{u}{2} \tag{2}$$

という関係で結ばれており，平面問題の場合，惑星の位置 (x,y) は，真近点角 f を使って，次のように表される．

$$x = \frac{q(1+e)\cos f}{1+e\cos f},\quad y = \frac{q(1+e)\sin f}{1+e\cos f}, \tag{3}$$

ここで，e は離心率，q は近日点距離である．

ここに現れた平均近点角 M，離心近点角 u，真近点角 f の関係は，図1に示すようになっている．

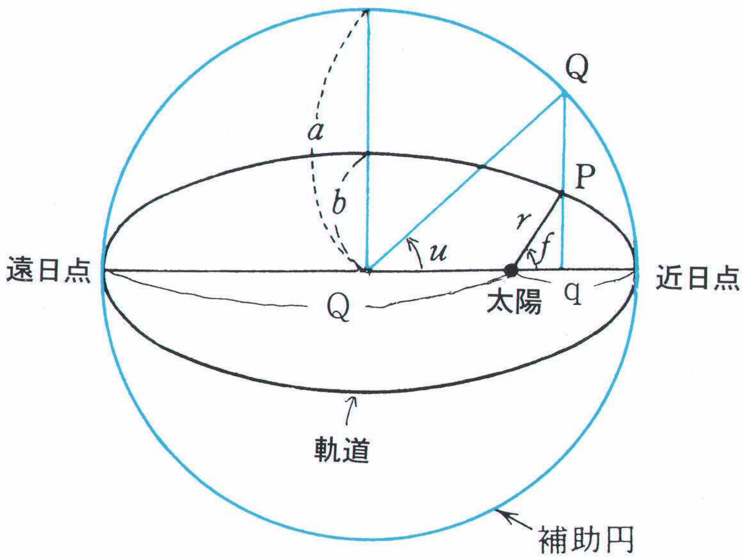

図1　離心近点角 u と真近点角 f

3．射影幾何学と円錐曲線

さて，2体問題の軌道が，直線衝突軌道を含めて全て円錐曲線（2次曲線）であるという事実は，射影幾何学の立場からみると，とても意義深いことである．射影幾何学では，平面上の円錐曲線を3次元空間内の楕円錐と同一視し，この楕円錐とある平面との交点が実際に見える形であると考えて，横切る平面の違いによって，円，楕円，放物線，双曲線などの違いが生まれると考える（図2）．このため，全ての円錐曲線は，1つの楕円錐として統一的に扱うことができるのである．

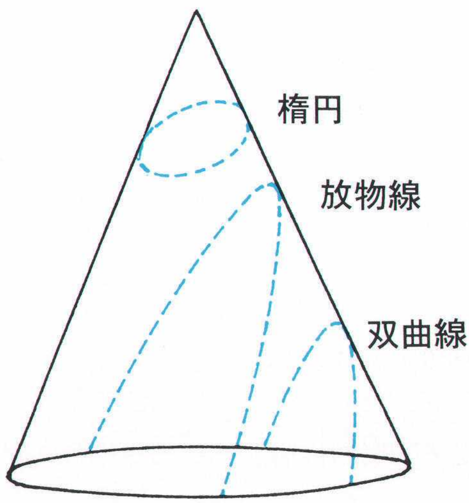

図2　円錐曲線

4．新しい近点角：射影近点角

この射影幾何学の立場から導かれるのが，新しく発見された射影近点角である．従来の方法では，直線衝突軌道をうまく扱うことができなかったが，射影近点角を使うと，直線衝突軌道も困難なく解くことができる．

射影近点角を使う場合，軌道を表すパラメータ

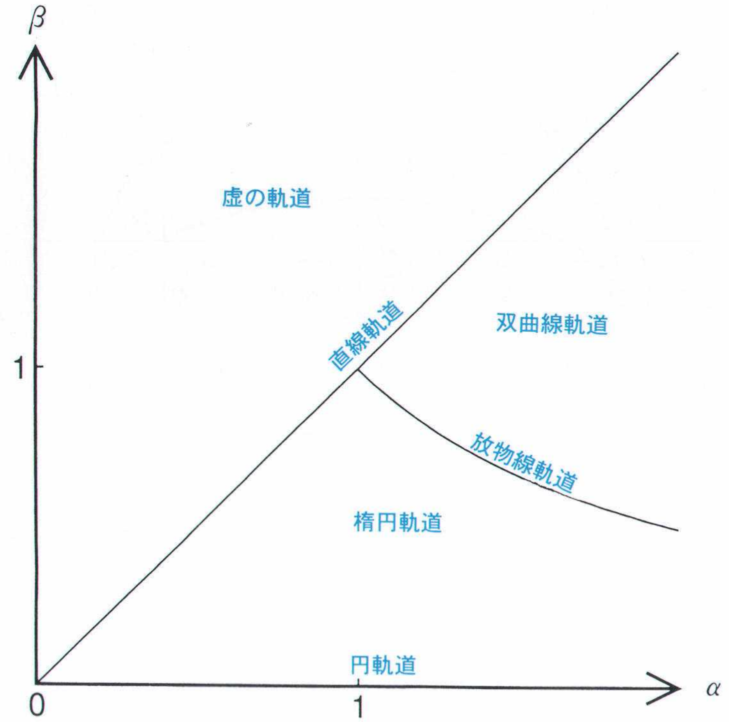

図3　パラメーター α, β と軌道の形

ーとして，近日点距離 q と離心率 e の代わりに，それらから計算される2つの量 α, β を用いる．それは，

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{(1+e)(q-p)+\sqrt{(1+e)^2(q+p)^2+4e^2}}{2}, \\ \beta = \dfrac{2e}{(1+e)(q+p)+\sqrt{(1+e)^2(q+p)^2+4e^2}}, \end{cases} \tag{4}$$

というものである．ここで，

$$p = 1/Q = \frac{(1-e)}{(1+e)\,q} \tag{5}$$

は，遠日点距離の逆数である．直線衝突軌道では，近日点距離 q が0となるが，遠日点距離の逆数 p は定義できるので，α, β は有限の値をとる．

5．パラメーターと軌道の形

このパラメーター α, β は，0以上のいろいろな値をとるが，その値によって，軌道の形は次のようになる．

- $\beta = 0$ ならば，円軌道．
- $\alpha\beta < 1$ ならば，楕円軌道．
- $\alpha\beta = 1$ ならば，放物線軌道．
- $\alpha\beta > 1$ ならば，双曲線軌道．
- $\alpha = \beta$ ならば，直線軌道．

これを図解すると，図3のようになる．

6．射影近点角による軌道の表現

この α, β を使うと，平均近点角 M は，

$$M = \left(\frac{1-\alpha^2\beta^2}{\alpha(1+\beta^2)}\right)^{3/2} k\,(t-T_0) \tag{6}$$

と表され，楕円軌道ならば，ケプラー方程式 (1) を解くことによって得られる離心近点角 u から

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}\tan\frac{u}{2} \tag{7}$$

の関係で，射影近点角 θ が求められる．また，放物線軌道の場合は，ケプラー方程式は，$\tan(\theta/2)$ についての３次方程式となり，双曲線軌道の場合は，従来の双曲線軌道の場合のケプラー方程式に一致する．

そして，惑星の座標 (x,y)と日心距離 r は，射影近点角 θ を使って，

$$\begin{cases} x=\dfrac{-\beta+\alpha\cos\theta}{1+\alpha\beta\cos\theta}, \\[2ex] y=\dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\sin\theta}{1+\alpha\beta\cos\theta}, \\[2ex] r=\dfrac{\alpha-\beta\cos\theta}{1+\alpha\beta\cos\theta}, \end{cases} \tag{8}$$

と表される．

7．一般化された近点角

以上のように，射影近点角による２体問題の解法は与えられたが，それでは，どうして離心近点角や真近点角の他に射影近点角が存在するのだろうか？　他にも新しい近点角はないのだろうか？

これには，明確な答がある．すなわち，一般化された近点角というものが定義できて，離心近点角，真近点角，射影近点角は，それの特別な場合にすぎないのである．

8．プレプリをくれ！

私は，この論文が出版されるまで，この発見を誰にも話さないつもりにしていた．ところが，この論文を投稿した後，まだレフェリーコメントも来ないうちから，プレプリントを請求する電子メールが，アメリカから何通も届いた．レフェリーから情報が漏れたのであろう．これは，この論文がウケた証拠だと考えたが，誰にもプレプリは送らず，AJ の出版まで平等に待ってもらうことにした．そして２カ月後，レフェリーコメントなしの “accepted” だけが返ってきた．

２体衝突の特異性を解消する射影近点角の発見は，1734 年にオイラーが　真近点角と離心近点角による２体問題の代数的表現を与えて以来，天文学上の最も古い問題のひとつに新しい答を与えるものとして，天体力学史上に残る大発見であると自負している．まさに，エウレカ（発見した）！である．詳しくは，下記の論文を参照されたい．

参考文献

Sato I. 1998, AJ 116 (12), 3038

A New Anomaly of Keplerian Motion

Isao Sato
Watanabe Reserch and Development
Sunrize Akimoto Bldg. 401, Kyonancho, Musashino, Tokyo 180-0023

Abstract: A new anomaly of Keplerian motion, projective anomaly, is derived. The anomaly is derived from a resolution of singularity of Keplerian motion from the view point of projective geometry. Using the projective anomaly, every kind of Keplerian orbit, circular, elliptic, parabolic, hyperbolic, and two-body collisional linear orbit, can be treated in a unified way as a quadratic curve in the projective space in two-dimensions. The projective anomaly is further shown to be an instance of a generalized anomaly.