カリストエクスプレス－美しき等時曲線－ その2　カリストエクスプレスの全長

福　江　　純
〈大阪教育大学　〒582-8582 大阪府柏原市旭ケ丘 4-698-1〉
e-mail: fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp
URL: http://quasar.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~fukue

時よ止まれ！　天文現象に限らず，たとえばミルククラウンのように，ある瞬間に自然が描く姿には，意外な美しさがある．そのような美しいスナップショットの中から，カリストエクスプレスの描く美しい曲線に関して考察した．今回は，カリストエクスプレスの計算結果，および軌道全長の計算結果などについて紹介する．

3．カリストエクスプレス

前回に引き続き，いよいよカリストエクスプレスの等時曲線を考えよう．

カリストエクスプレスは最初に述べたように，木星系から水星軌道の内側へ至るタンカー群が，ある瞬間に描く等時曲線だ．一つ一つのタンカー群は，太陽の万有引力の下できれいな楕円軌道を描いているのだが，木星軌道からつぎつぎに投入されるタンカー群全体でみると，各タンカー群の楕円の主軸がずれていくために，エクスプレス全体としてはS字型の曲線になるのだ．

まず基本データとして，

木星の軌道半径 $r_J = 5.2026\,\mathrm{AU}$

水星の軌道半径 $r_M = 0.3871\,\mathrm{AU}$

である．またカリストエクスプレスの軌道は，水星軌道の内側まで入り込むのだが，ここでは便宜上，

軌道の近日点距離 $r_P = 0.380\,\mathrm{AU}$

と仮定しよう．以下で使う記号については，別表（最終頁）にまとめておく．

3．1　楕円の式のおさらい

カリストエクスプレスの各タンカー群は，遠日点距離が木星軌道の半径 r_J，近日点距離が r_P の，太陽を焦点とする楕円軌道を描く．そのような楕円軌道の諸量を整理しておこう（久しぶりに大学１回生のときの力学の教科書を引っぱり出した♪）．

まず，太陽を原点とし近日点の方向を基線とする極座標（r，θ）では，楕円の式は，

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos\theta} \qquad (1)$$

と表せる（図 11）．ここで，l は半直弦，ε は離心率だ（楕円の離心率は１より小さい）．半直弦や離心率は，粒子の単位質量当たりの角運動量Ｌや単位質量当たりのエネルギーＥを用いて，式（２）や式（３）のように表すことができる．また楕円

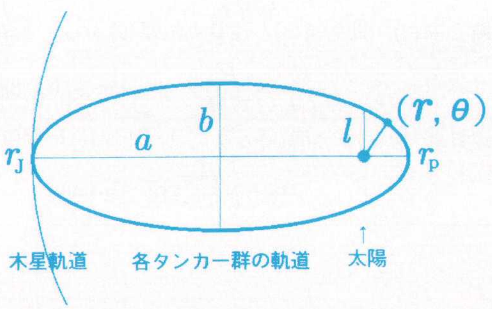

図 11　楕円軌道

■楕円軌道■

各タンカー群の軌道は，遠日点距離 r_J，近日点距離 r_p の楕円

極座標 (r,θ) での楕円の式

$$r=\frac{\ell}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{1}$$

ただし

$$\text{半直弦}\quad \ell = \frac{L^2}{GM} \tag{2}$$

$$\text{離心率}\quad \varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2}}\le 1 \tag{3}$$

$$\text{長半径}\quad a = -\frac{GM}{2E} \tag{4}$$

$$\text{短半径}\quad b = \sqrt{-\frac{L^2}{2E}} \tag{5}$$

$$\text{遠日点距離}\quad r_\mathrm{J} = a(1+\varepsilon) \tag{6}$$

$$\text{近日点距離}\quad r_\mathrm{p} = a(1-\varepsilon) \tag{7}$$

$$\text{遠日点での回転速度}\quad v_\theta = \frac{L}{r_\mathrm{J}} \tag{8}$$

$$\text{同ケプラー速度}\quad v_\mathrm{K} = \sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{J}}} \tag{9}$$

$$\text{軌道周期}\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{10}$$

カリストエクスプレスの諸量

遠日点距離(6)と近日点距離(7)より，

$$\varepsilon=\frac{r_\mathrm{J}/r_\mathrm{p}-1}{r_\mathrm{J}/r_\mathrm{p}+1}\sim 0.864 \tag{11}$$

遠日点距離(6)より，

$$a=\frac{r_\mathrm{J}}{1+\varepsilon}\sim 0.537r_\mathrm{J} \tag{12}$$

離心率(3)より，

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sim 0.270r_\mathrm{J} \tag{13}$$

長半径(4)より，

$$\frac{E}{GM}=-\frac{a}{2}\sim -0.268r_\mathrm{J} \tag{14}$$

離心率(3)，長半径(4)，遠日点距離(6)から a と E を消去して，

$$\ell=\frac{b^2}{a}=\frac{L^2}{GM}=(1-\varepsilon)r_\mathrm{J}\sim 0.136r_\mathrm{J} \tag{15}$$

遠日点での回転速度(8)とケプラー速度(9)の関係は，

$$v_\theta=\sqrt{1-\varepsilon}v_\mathrm{K}\sim 0.360v_\mathrm{K} \tag{16}$$

の長半径ａ，短半径ｂ，遠日点距離，近日点距離などの量も，式（４）以下のように表せる．

具体的な数値を調べてみると，カリストエクスプレスの場合，遠日点距離と近日点距離から計算して，楕円軌道の離心率は，

$$\varepsilon = 0.864 \tag{11}$$

となることがわかる．また長半径ａ，短半径ｂ，半直弦ｌなども，

$$a = 0.537\, r_\mathrm{J} \tag{12}$$

$$b = 0.270\, r_\mathrm{J} \tag{13}$$

$$l = 0.136\, r_\mathrm{J} \tag{15}$$

のように得られる．

３．２　運動方程式のおさらい

大学初年級の力学で習うことだが，ケプラーの法則からニュートンの万有引力の法則が導けるし，ニュートンの万有引力の法則から楕円の式などが導出できる．上の楕円の式からカリストエクスプレスの軌道を（幾何学的に）求めることもできるが，コンピュータに計算させるには，微分方程式の方が扱いやすい．

太陽を中心とする極座標（ｒ，θ）で表した，各タンカー群の運動方程式は，式（17）と式（18）のように書き下すことができる．式（17）は動径（ｒ）方向の運動方程式で，右辺の第１項は万有引力を，第２項は遠心力を表している．式（18）は，いわゆる面積速度一定の法則で，軌道に沿って角運動量が保存されることを意味している．

さらに，式（17）を時間に関して一階積分したものが，式（19）である．式（19）は，いわゆる中間積分と呼ばれるもので，粒子の運動エネルギーと重力エネルギーの和，すなわち力学

的エネルギーが保存されることを意味しており，エネルギー積分とも呼ばれる．このエネルギー積分（19）を変形すると，dr と dt の間の微分関係式（20）が求まる．式（20）を時間に関して積分すれば，r と t の関係が得られる（後述）．

3．3　カリストエクスプレスの軌道の形

以上の準備のもとで，まずカリストエクスプレスの軌道の形を数値的に求めてみた．すなわち，太陽のまわりを公転運動する木星系から，つぎつぎとタンカー群を投入しながら，それぞれの群に対し運動方程式を解いていき，いろいろな時刻でのタンカー群の描く軌道ー等時曲線ーを描いてみた．その一例を図 12 に示す．タンカー群の数が増えるに連れて，期待通り，見事な逆 S 字カーブが得られていくのがわかる．

本来のカリストエクスプレスは，水星軌道の内側で終点となるのだが，もしずっと軌道を延長するとどうなるのだろうか？　時間を延長して近日点から先まで計算してみたのが，図 13 である．時間が経つと，多重周期の花弁状軌道になるのがわかる．

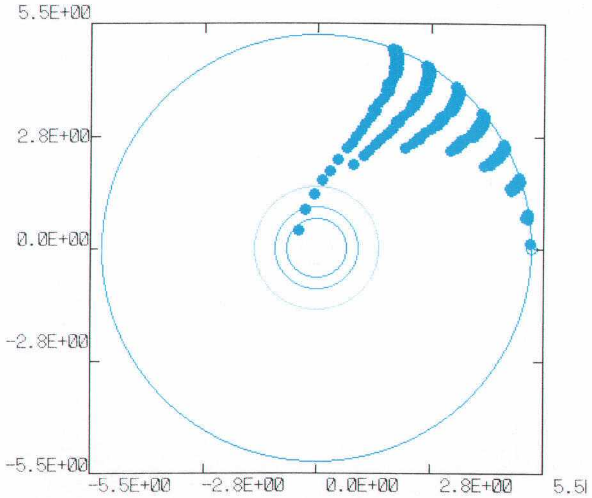

図 12　カリストエクスプレスの軌道

さらに重力が強いブラックホールのまわりでは，エクスプレスの軌道はどうなるだろうか？　そこで相対論的効果を考慮して軌道を計算してみたのが，図 14 である（図 14 a は非相対論的な軌道，図 14 b が相対論的な計算）．相対論的な場合も，近日点までの軌道は非相対論的な場合とほぼ同じである．しかし，近日点の近くで相対論的重力のために軌道が曲げられてしまうので（いわゆる相対論的な近日点移動という現象だ），近日点を超えると軌道が大きく変わることがわかる．

■運動方程式■

太陽を中心とする極座標 (r, θ) での各タンカー群の運動方程式

動径（r）方向の運動方程式

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L^2}{r^3} \tag{17}$$

回転（θ）方向の運動方程式／角運動量保存の式

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = L\ (\text{一定}) \tag{18}$$

中間積分／エネルギー積分

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E\ (\text{一定}) \tag{19}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2\left(E + \frac{GM}{r} - \frac{L^2}{2r^2}\right)} \tag{20}$$

3．4　カリストエクスプレスの全長

ところで，カリストエクスプレスの軌道全長は 10 億キロにもおよぶ，とある．木星軌道の半径は 5.2 天文単位，7.8 億キロほどなので（1 天文単位＝1.5 億キロ），図からもカリストエクスプレスの軌道全長が 10 億キロ程度なのはたしかだ．

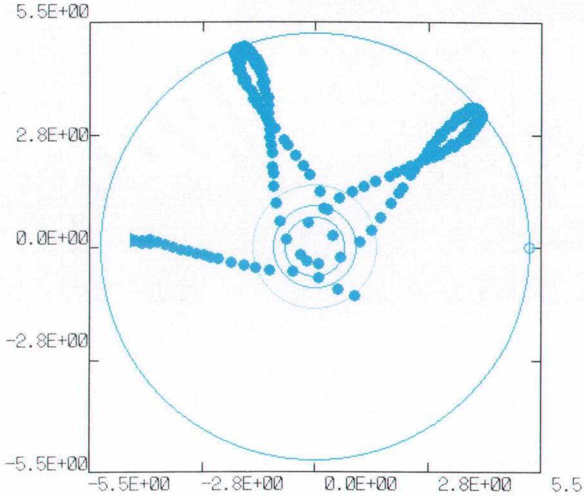

図 13　軌道の延長

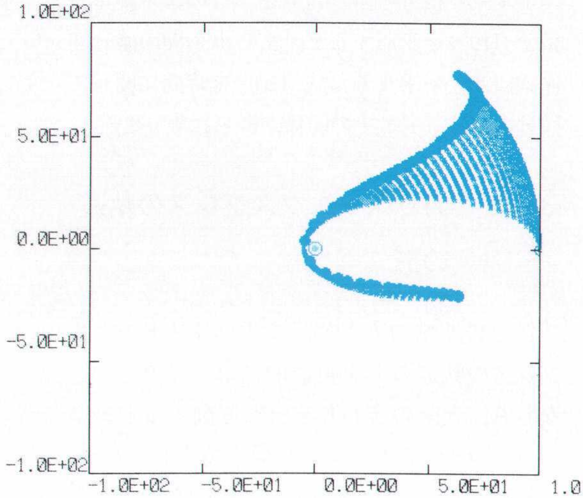

図 14 a　非相対論的な軌道

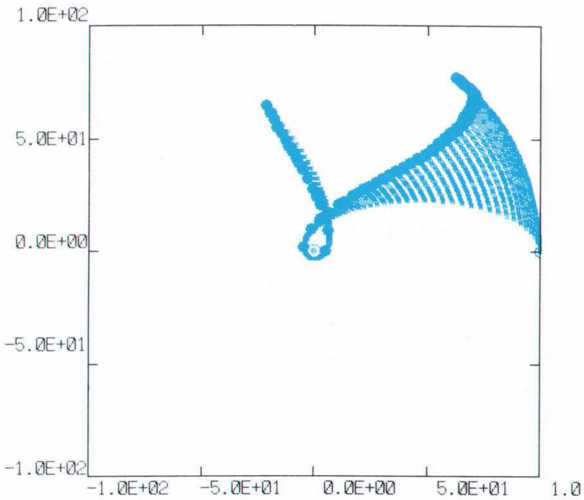

図 14 b　相対論的な軌道

では，実際にはどれくらいなのだろう？　少しこだわってみよう．…思ったよりは煩わしくて，力学の教科書と首っ引きになってしまった．

キーポイントは，木星軌道から投入される各タンカー群は楕円軌道上を運行し，その運動は運動方程式で記述されるという点と，つぎつぎと送り出されるタンカー群の軌道の基線方向（あるいは遠日点）が，木星の公転運動に伴って木星の公転軌道前方にシフトしていくという点である．

まず前者に関して言えば，運動方程式の中間積分の式（19）から，動径速度（dr / dt）は式（20）のようの表せた．しかしここで，近日点と遠日点では動径速度が０（dr / dt ＝０）になる，という事実を使うと，角運動量やエネルギーの代わりに近日点や遠日点の値を用いて，動径速度の式を式（21）のように変形することができる．したがって，dt と dr の関係として，式（22）が得られる．以下では使わないが，ちなみに，この式（22）を変数変換して積分すると，ｔとｒの関係として式（23）が解析的に得られる（近日点でｔ＝０とした）．

一方，後者に関しては，木星の公転運動の角速度をΩ_kとすると，時間 t の経過と共に，楕円軌道の角度θが$\theta+\Omega_k t$のように変化することに相当する（式（21）の時間の向きから，$\theta-\Omega_k t$ではダメ）．すなわち，楕円の式を，式（24）のようにすればよい（角速度は式（25））．この式（24）を微分して，dr, dθ，dt の間の関係を作ると，式（26）が得られる．

さて以上のようにして，dr と dt の間に成り立つ関係式（22）と，dr と dθ と dt の間に成り立つ関

■カリストエクスプレスの軌道全長■

動径 r の時間 t の間の微分関係

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{-2E}}{r}\sqrt{-[r-a(1-\varepsilon)][r+a(1+\varepsilon)]}$$
$$= \frac{\sqrt{-2E}}{r}\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2} \tag{21}$$

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-2E}\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}} \tag{22}$$

動径 r と時間 t の関係

$$t = \frac{a}{\sqrt{-2E}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right) - \varepsilon\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2}\right] \tag{23}$$

基線の移動を考慮した楕円の式

$$r = \frac{\ell}{1+\varepsilon\cos(\theta+\Omega_{\mathrm{K}}t)} \tag{24}$$

$$\Omega_{\mathrm{K}} = \frac{v_{\mathrm{K}}}{r_{\mathrm{J}}} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\mathrm{J}}^3}} \tag{25}$$

動径 r と角度 θ と時間 t の間の微分関係

$$\frac{\ell}{r}dr = \varepsilon r(d\theta+\Omega_{\mathrm{K}}dt)\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\ell}{r}-1\right)^2} \tag{26}$$

動径 r と角度 θ の間の微分関係

$$r\,d\theta = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\frac{r^2}{r_{\mathrm{J}}^2}\right)\frac{dr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}} \tag{27}$$

全長 = 軌道に沿った微小長さ ds の積分

$$\int ds = \int\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}$$
$$= \int dr\sqrt{\frac{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2+a^2(1-\varepsilon^2)\left(1-\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{r^2}{r_{\mathrm{J}}^2}\right)^2}{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}} \tag{28}$$

$$a-r = a\varepsilon\cos\alpha \tag{29}$$

$$\int ds = \frac{r_{\mathrm{J}}}{1+\varepsilon}\int_0^\pi d\alpha\sqrt{\varepsilon^2\sin^2\alpha+(1-\varepsilon^2)\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\frac{(1-\varepsilon\cos\alpha)^2}{(1+\varepsilon)^2}\right]^2} \tag{30}$$

係式（26）が得られた．カリストエクスプレスの全長を求めるためには，dr と dθ の関係が欲しいので，式（22）と式（26）から dt を消去しよう．あれこれ整理して得られた dr と dθ の関係が，式（27）である．

ここで，カリストエクスプレスの軌条に沿った微小長さを ds とすると，極座標の微小長さに対して，

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

という関係がある．軌条に沿った微小長さ ds の積分が全長にほかならない．式（27）を使うと，道のりの積分（$\int$ds）は，式（28）のような r に関する積分にまとまる．

最後に，

$$a - r = a\varepsilon\cos\alpha \tag{29}$$

という変数変換で，変数 r を α に変換すると，道のりの積分は最終的に，式（30）のような α に関する積分にまとめ上げることができる．ここで積分範囲は，$\alpha = 0$（近日点）から $\alpha = \pi$（遠日点）までである．

とりあえず，解析的に変形できたのは式（30）までだった．後は，離心率 ε のいろいろな値に対して，式（30）を数値積分するだけである．いろいろな離心率に対して遠日点から近日点までのエクスプレスの全長を求めた結果を図 15 に示す（図 15 の横軸は離心率，縦軸は木星軌道の半径を単位としたエクスプレスの全長）．

またとくに，カリストエクスプレスの場合，離心率 $\varepsilon = 0.86$ なので，

カリストエクスプレスの全長
$= 1.3076\ r_{\mathrm{J}}$
$= 6.803$ AU
$= 10.2$ 億キロ　（31）

となる．おおおお!!!　すごい．ドンピシャリだ！　やっぱ，これもちゃんと計算したんだろうなぁ．

・・・

本稿は，もともとは石原藤夫氏の主催する〈ハードSF研究所〉の『ハードSF研究所公報』(非公開）に掲載されたモノである．今回『天文月報』に投稿するにあたっては，細かい点を書き直した．

最後に後日談を書いておきたい．今年（1999年）の5月末（5月29日）に梅田界隈で，とある会合が行われた（あ，別に隠しているわけじゃなくて，「宇宙作家クラブ」というモノの大阪“例会”があったのである）．その場で，久しぶりに谷　甲州氏と会う機会があったので，前々からの疑問をぶつけてみた．…「やっぱり例のアレ（カリストエクスプレスの軌道）は計算したんですか？」「ええ，計算しましたよ．あの頃は時間があったからネェ.」…やっぱり計算したらしい！　それも、分度器と定規で!!　どぇー!!　ひっくり返った．

参考文献

福江　純，1999，ハードSF研究所公報，74，139

宇宙作家クラブについては，
ホームページ　http://www.starlights.org/sac/index.html

堀　晃氏ホームページ
http://www.jali.or.jp/hr/mad/mad107-j.html

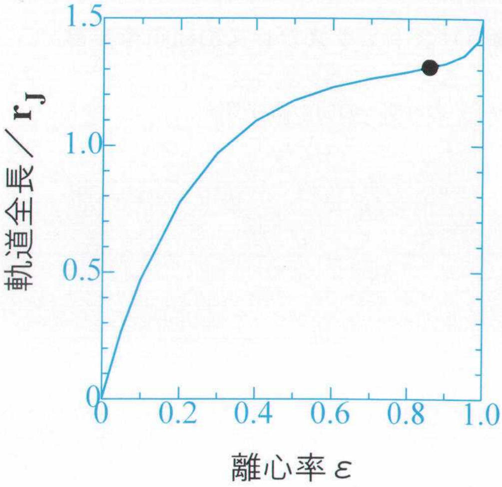

図15　エクスプレスの軌道全長

Callisto Express: Beautiful Isochrone 2

Jun Fukue
Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University, Kashiwara, Osaka 582-8582
e-mail:fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

Abstract:: We examine the callisto express, which is one of isochrones appeared in the solar system.

We obtain the shape and length of the trajectory of the callisto express. The shape of the callisto express is an elegant S-character one. The length of the express is about one billion kilometer.

■記号表■

記号表

記号	意味	数値
G	万有引力定数	
M	太陽の質量	
r_J	木星の公転半径＝軌道の遠日点距離	5.2026AU
r_M	水星の公転半径	0.3871AU
r_p	軌道の近日点距離（仮定）	0.380AU
ℓ	軌道の半直弦	$0.136r_J$
ε	軌道の離心率	0.864
a	軌道の長半径	$0.537r_J$
b	軌道の短半径	$0.270r_J$
L	単位質量当たりの角運動量	
E	単位質量当たりのエネルギー	