地球内部でのホイル＝リットルトン降着体の運動 －ブラックホールシンドローム２０００－

福 江 純
〈大阪教育大学 〒582-8582 大阪府柏原市旭ケ丘 4-698-1〉
e-mail: fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp
URL: http://quasar.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~fukue

地球内部に落下した（マイクロ）ブラックホールは，内部物質を吸い込みながら次第に地球中心へと沈降していくが，その際，降着物質のエネルギーを解放して光り輝くと予想される．その輻射効果を取り入れて，地球内部のマイクロブラックホールの運動を再検討した結果を報告する．光り輝く効果を無視した“黒い”ブラックホールが地球中心に落ち着くタイムスケールは，ブラックホールの初期質量に反比例して短くなるが，光り輝く“白い”ブラックホールがシンドロームするタイムスケールは，ブラックホールの質量に関わらずエディントン時間（放射への変換効率を 0.1 とすると約 4.53×10^7 年）程度になる．地球内部で光り輝く“白い”ブラックホールは，その質量によっては，強力な熱源として作用するだろう．

1．フィードバックループ

いろいろなＳＦで地球の内部にマイクロ（ミニ）ブラックホールが落ち込む話が出てくる（プロイス『破局のシンメトリー』[1]，ホイーラー『ブラックホールを破壊せよ』[2]，ブリン『ガイア』）[3]．またツングースカ事件がマイクロブラックホールの衝突だという“お話”もある．もう何年も前になるが，そのような地球内部に潜り込んだブラックホールが実際にはどうなるのかが気になり，マイクロブラックホールの振る舞いを定量的に調べたことがある（福江 1993，1994）[4)～6)]．この解析は，その後，専門的な論文にスピンオフし，銀河系中心領域に存在する巨大な分子雲とブラックホールが衝突したときのブラックホールの運命を論じることになった（Fukue 1994）[7]．

こうしてフィードバックループが一度回ったのだが，これらの議論では，ブラックホールが光り輝く効果は考えていない．つまり，星間雲にせよ地球内部にせよ，ブラックホールが物質を吸い込むと，一般には，吸い込んだ物質の量に応じて，ブラックホールがエネルギー放射をして光り輝くようになる（ブラックホールが“黒い”のは，むしろ特殊な場合である）．そしてその光の圧力のために，ブラックホールの重力が相殺されて，ブラックホールが吸い込める物質量が減ると予想されるのだ．

ぼく自身は，この数年の研究の過程で，このようなブラックホールが光り輝く効果がかなり重要であると認識するようになってきた（例えば，Nio et al. 1998[8]; Fukue and Ioroi 1999[9]）．そこでごく最近，ブラックホールが光り輝く効果を取り入れて，以前行った星間雲などの天体とブラックホールの衝突の再検討を行った（Fukue 1999）[10]．その結果，降着物質のエネルギー解放によってブラックホールが光り輝いている場合には，ブラックホールがストップするまでの時間は，ブラックホールの質量などによらず，いわゆるエディントン時間（エネルギーの変換効率を 0.1 として大体５千万年ぐらい）になることがわかった．

そこで今回は，このような専門的な結果を，地

球内部のブラックホールの振る舞いに再度フィードバックし，地球物質を吸い込んで光り輝く“白い”ブラックホールの運動を再検討した．結果は，だいたい予想できるように，“白い”ブラックホールは，その質量に関係なく，一般的に地球の中を1000万年ぐらい行ったり来たりしながらシンドロームしていく．こうしてフィードバックループの2回目が閉じた．

以下，次節で，物質を吸い込みながら地球内部を運動していくブラックホールの基礎方程式をまとめておく．また3節で降着物質が輝く効果を無視した“黒い”ブラックホールの振る舞いを調べ，4節で光り輝く“白い”ブラックホールの振る舞いを考える．最後の5節で，いくつかの可能性について少し議論する．

2．ホイル＝リットルトン降着とシンドローム方程式

この節では，運動しながら周辺の物質を吸い込むホイル＝リットルトン降着の基本的な物理量と，降着した物質が光り輝く際の光度に関する量をまとめ，さらに地球内部を運動するブラックホールの基礎方程式－シンドローム方程式－をまとめておく．

2．1．ホイル＝リットルトン降着とエディントン降着

質量Mで光度Lの天体（ここではマイクロブラックホール）が，密度ρの媒質（ここでは地球物質）の中を，速度Vで動いているとしよう．天体の放射による影響を無視したケースは，古典的な「ホイル＝リットルトン降着」として知られており，ホイルとリットルトンが提唱した1939年以来，詳しく調べられてきている．天体の光度が無視できるほど暗いとすると，このような天体は，重力によって周囲の物質を吸い込みながら運動していくので，天体の軌道を取り囲む円筒状の領域の物質が，最終的に天体に吸い込まれてしまう（図1）．この吸い込む領域の半径は，「ホイル＝リットルトン降着半径」と呼ばれている．

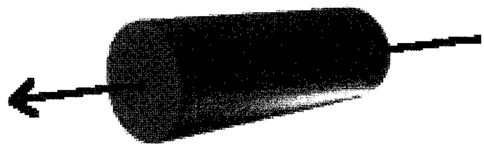

図1　ホイル＝リットルトン降着領域

ホイル＝リットルトン降着天体は，重力をもつ天体であればよく，ブラックホールである必要はない．そこで，以下では，このような（光っていない）古典的なホイル＝リットルトン降着天体のことを，簡単に＜暗いＨＬ降着体＞（または＜“黒い”ブラックホール＞）と呼ぼう．また後述する，光り輝いているホイル＝リットルトン降着天体は，＜明るいＨＬ降着体＞（または＜“白い”ブラックホール＞）と呼ぼう．

さて，ＨＬ降着半径は，（１）式に示したように，天体の質量に比例し速度の２乗に反比例することがわかっている（Gは万有引力定数）．具体的に，ＨＬ降着体の質量Mがマイクロブラックホールの典型的な質量である10^{15} gで速度Vが地球の脱出速度程度の10 km/sだと，ＨＬ降着半径は1万分の1 cmしかない．

ＨＬ降着半径を半径とする円内に単位面積当たりρVの物質が流入してくるので，単位時間当たりの質量降着率は，断面積にρVをかけて得られる．すなわち質量降着率は，（２）式に示したように，降着体の質量の２乗に比例し速度の３乗に反比例する．具体的に，$M=10^{15}$ g，$V=10$ km/sだと，質量降着率は毎秒0.3 gぐらいになる．

この質量降着率で自分自身の質量を割れば，もともとの質量と同じくらいの質量を吸い込む時間，言い換えれば質量が２倍くらいに成長する時間が得られる．すなわち古典的なＨＬ降着体の成長時間は，（３）式に示したように，速度の３乗に比例

■ホイルリットルトン降着とエディントン降着■

ホイルリットルトン降着半径

$$R_{\rm HL} = \frac{2GM}{V^2} = 1.33\times10^{-4}\frac{M}{10^{15}\ {\rm g}}\left(\frac{V}{10\ {\rm km/s}}\right)^{-2}\ {\rm cm} \quad (1)$$

ホイルリットルトン質量降着率

$$\dot{M}_{\rm HL} = \pi R_{\rm HL}^2\rho V = \frac{4\pi G^2M^2\rho}{V^3}$$
$$= 0.280\left(\frac{M}{10^{15}\ {\rm g}}\right)^2\left(\frac{\rho}{5\ {\rm g/cm^3}}\right)\left(\frac{V}{10\ {\rm km/s}}\right)^{-3}\ {\rm g/s} \quad (2)$$

ホイルリットルトン成長時間

$$t_{\rm HL} = \frac{M}{\dot{M}_{\rm HL}} = \frac{V^3}{4\pi G^2M\rho}$$
$$= 1.13\times10^8\left(\frac{M}{10^{15}\ {\rm g}}\right)^{-1}\left(\frac{\rho}{5\ {\rm g/cm^3}}\right)^{-1}\left(\frac{V}{10\ {\rm km/s}}\right)^3\ {\rm yr} \quad (3)$$

エディントン光度

$$L_{\rm E} = \frac{4\pi cGMm_{\rm p}}{\sigma_{\rm T}} = 6.29\times10^{19}\left(\frac{M}{10^{15}\ {\rm g}}\right)\ {\rm erg/s} \quad (4)$$

エディントン降着率

$$\dot{M}_{\rm E} \equiv \frac{L_{\rm E}}{\eta c^2} = 0.699\left(\frac{\eta}{0.1}\right)^{-1}\left(\frac{M}{10^{15}\ {\rm g}}\right)\ {\rm g/s} \quad (5)$$

エディントン成長時間

$$t_{\rm E} = \frac{M}{\dot{M}_{\rm E}} = \frac{\eta c\sigma_{\rm T}}{4\pi Gm_{\rm p}} = 4.53\times10^7\left(\frac{\eta}{0.1}\right)\ {\rm yr} \quad (6)$$

“白い”ブラックホールの光度

$$L = \eta\dot{M}c^2 \quad (7)$$

エディントン光度で規格化した光度

$$\Gamma \equiv \frac{L}{L_{\rm E}} = \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\rm E}} = \frac{\eta c\sigma_{\rm T}}{4\pi Gm_{\rm p}}\frac{\dot{M}}{M} \quad (8)$$

し質量に反比例する．具体的に，$M=10^{15}$ g，$V=$ 10 km/s だと，2倍に成長するまでに約1億年かかることになる．しかしたとえば質量が地球の1万分の1ぐらいだと，たった0.2年で2倍に成長する．

では，今度は，古典的なＨＬ降着とは逆の極限の場合，すなわち降着体がきわめて明るく光っている場合を考えてみる．天体の明るさには，重力と放射圧のバランスで決まる最大の光度が存在し，それは「エディントン光度」と呼ばれている．そのエディントン光度で輝いている降着天体を，ここでは「エディントン降着体」と呼ぼう．

さてこのボロメトリック光度は，（4）式で示したように，天体の質量Mに比例する（cは光速，$m_{\rm p}$は陽子の質量，$\sigma_{\rm T}$はトムソン散乱の断面積と呼ばれる量）．具体的に，$M=10^{15}$ gだと，（4）式ぐらいの値になるが，これはあまり明るくはない．ボロメトリック光度にすれば8等弱の明るさだ．

もし降着してきた物質によって光り輝いているとすると，エディントン光度を捻出するために必要な質量降着率はエディントン光度を変換効率η（ブラックホールの場合は1割ぐらい）と光速の2乗で割って得られる．すなわちエディントン降着率は，（5）式に示したように，質量に比例する．具体的に，$M=10^{15}$ gだと，毎秒0.7 gぐらいの物質を吸い込めば，（その質量に対する）エディントン光度で輝くことができる．この0.7という値は，先に出したＨＬ質量降着率の0.3に近くなったが，これはたまたまである．

このエディントン降着率で成長する時間，すなわちエディントン成長時間は，（6）式に示したように，（変換効率を0.1として）5千万年弱になる．注意すべき点は，このエディントン降着率は，質量を（質量に比例する）エディントン降着率で割って得られるので，その結果，天体の質量によらずに，一定の値になる！ことだ（これに対して，古典的なＨＬ降着体の成長時間は，質量や速度に依存して変わる）．

実際のＨＬ降着体（明るいＨＬ降着体，“白い”

ブラックホール）は，古典的な（暗い）ＨＬ降着体のように輝いていないわけではなく，一方，エディントン降着体のように最大で輝いているわけでもない．すなわち，実際のＨＬ降着体の光度（降着光度）は，（７）式のように，質量降着率と光速の２乗の積に，吸い込んだ質量をエネルギーに変換する効率 η をかけて得られる．そして質量降着率が小さいうちは暗いが，質量降着率がエディントン降着率に近づくにつれて明るくなるのである．

なお，以下では，しばしば，天体の明るさを表すのに，（８）式で示したように，天体の光度をエディントン光度で割ったもの，すなわちエディントン光度で規格化した光度 Γ を使うことがある．この規格化した光度は，（球対称の天体の場合には）必ず０から１の範囲の値になる．

２．２．ホイル＝リットルトン降着体の基礎方程式

以上の，ホイル＝リットルトン降着，エディントン降着，そして上では述べなかったがガスの効果を入れたボンヂ降着などの結果を使って，地球内部で運動するマイクロブラックホールの振る舞いを記述する方程式を再構築してみよう．

２．２．１．シンドローム方程式

座標系として，地球の中心を原点とする極座標（r，ϕ）を用い，変数としては，ＨＬ降着体の質量をＭ，規格化された光度を Γ，動径速度を u（$=dr/dt$），回転速度を v（$=r\,d\phi/dt$）とする（独立変数は時間 t）．地球の重力場のもとで，周囲から物質を吸い込みつつ，（物質を吸い込む結果）速度に“比例する”抵抗を受け，さらに吸い込んだ物質によって光り輝きながら運動しているホイル＝リットルトン降着体の基礎方程式は，一般的に（9）式から（12）式のように書き表すことができる．

まずＨＬ降着体の質量増加を表す式は，ホイル＝リットルトン質量降着率の式などを参考にして，質量変化を dM/dt とあらわに書くと，(9)式のようになる．質量降着率は，速度 V の３乗に反比例するが，速度としては，動径速度 u と回転速度 v を考慮し，さらに速度が小さいときには音速 a も考慮しなければならない．また質量降着率は質量 M の２乗に比例するが，降着体が光り輝く効果によって外向きに放射圧を受けるので，見かけ上，質量は放射圧の分だけ減少して，$M(1-\Gamma)$ のように見なせる．極端な話，天体の光度がエディントン光度に等しくなると（$\Gamma=1$），重力と放射圧が釣り合い，見かけ上，天体の質量は感じられなくなるのだ．

なお，数年前の解析では，ボンヂ降着のみを考慮していたので，ホイル＝リットルトン降着に基づく (9) 式の分母の速度（u や v）の項は落としていた．また降着体の放射圧の影響も考えていなかったので，(9) 式分子の Γ も０にしていた．速度は分母に足し算で入り，放射圧は分子に引き算で入るので，これらの項はどちらも質量増加の割合を減らすセンスであることがわかる．

ＨＬ降着体が降着した物質のエネルギー解放によって光り輝くとすると，ＨＬ降着体の規格化した光度 Γ は，(7) 式の光度を (4) 式のエディントン光度で割って，さらに，質量降着率を dM/dt とあらわに書くと，(10) 式のように書ける．

ＨＬ降着体の運動を表す運動方程式は，(11) 式と (12) 式だが，まず動径方向の運動方程式 (11) 式で，右辺の第１項は遠心力を表し，第２項は重力である（具体的な形は後述）．右辺第３項が，物質を吸い込むためにＨＬ降着体の運動量が減少する効果，すなわち“抵抗”の項を表す．また回転方向の運動方程式 (12) 式は，いわゆる角運動量保存の式で，右辺には，物質を吸い込むためにＨＬ降着体の角運動量が減少する項，すなわち角運動量損失項だけが現れる．なお (12) 式は，簡単に積分できて，Mrv＝一定（初期値），というＨＬ降着体の角運動量保存式が得られる．

質量変化を表す (9) 式の中の音速は，ブラック

■ホイルリットルトン降着体の基礎方程式■

シンドローム方程式

質量 M、規格化光度 Γ、動径速度 u、回転速度 u に対し、

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi\rho G^2 M^2 (1-\Gamma)^2}{(u^2+v^2+a^2)^{3/2}} \tag{9}$$

$$\Gamma = \frac{L}{L_{\mathrm{E}}} = \frac{\eta c \sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi G m_{\mathrm{p}}} \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} \tag{10}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{v^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}u \tag{11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(rv) = -\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}v \tag{12}$$

ただし、ρ は吸い込む物質の密度、a は音速

音速は、気体定数を $\mathcal{R}$、平均分子量を μ (= 100) 、温度を T (=1000 K) として、

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\mu}T} = 0.2883 \text{ km/s} \tag{13}$$

重力は、地球内部と外部でわけて、

$$-\frac{d\Phi}{dr} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi G\rho}{3}r & \text{at } r \leq R_\oplus \\ -\dfrac{GM_\oplus}{r^2} & \text{at } r > R_\oplus \end{cases} \tag{14}$$

ちなみに、“抵抗係数” β は、

$$\beta \equiv \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi\rho G^2 M (1-\Gamma)^2}{(u^2+v^2+a^2)^{3/2}} = \frac{4\pi G m_{\mathrm{p}}}{\eta c \sigma_{\mathrm{T}}}\Gamma \tag{15}$$

ホールが潮汐破壊した地球内部物質が気体状にまで砕かれていると仮定して，数年前の解析と同じく，理想気体の状態方程式を当てはめ，(13) 式のように表しておく．また動径方向の運動を表す (11) 式の中の重力は，ブラックホールが地球外部に飛び出る状況も考えて，地球内部では密度一様の球体内の重力場，地球外部では質点の重力場を当てはめ，(14) 式のように表しておく．

ちなみに，以前の解析で β と置いた，ブラックホールにかかる“抵抗”を表す式は，今回のケースに対して具体的に書き下せば，(15) 式のように書ける．

2．2．2．無次元化の単位

数値計算をする際には，長さや速度などの物理量を無次元化した方が扱いやすい．具体的には，地球の問題を考えているので，質量の単位には地球質量 M_+ を，長さの単位には地球の半径 R_+ を，速度の単位には地球表面でのケプラー運動の速度 V_+ を，そして時間の単位には地球半径をケプラー速度で割ったもの t_+ をとるのが便利である．あるいは単位を［］で表せば，(16) 式から (19) 式のように，

［質量M］ $= M_+ = 5.98 \times 10^{27}$ g

［半径 r］ $= R_+ = 6378$ km

［速度 v］ $= V_+ = (GM/R)^{1/2}$

$= 7.91$ km/s

［時間 t］ $= t_+ = (R^3/GM)^{1/2}$

$= 807$ s $= 13.44$ 分

などとなる．また地球内部物質の平均密度として，(20) 式のように，

密度 ρ $= \rho_+ = 5.52$ g/cm^3

という値を使う．

2．2．3．無次元化したシンドローム方程式

ＨＬ降着体の質量 M，規格化光度 Γ，動径速度 u，回転速度 v，そして時間 t などを，上記の物理量で無次元化すると，ＨＬ降着体の振る舞いを表す一般的な方程式［(9) 式から (12) 式］は，(21) 式から (24) 式のように書き表すことができる．

大部分はそのまま無次元化されてほとんどパラメータは残らないのだが，(25) 式の無次元化された音速と (26) 式の無次元の定数パラメータ τ が残る．音速はともかく，後者の定数パラメータ τ が問題である．このパラメータ τ は，エディントン時間と地球重力の力学時間の比率で，この値が想

無次元化の単位

$$[M] = M_\oplus = 5.98 \times 10^{27}\ \mathrm{g} \qquad (16)$$
$$[r] = R_\oplus = 6.38 \times 10^{8}\ \mathrm{cm} \qquad (17)$$
$$[V] = V_\oplus = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} = 7.91 \times 10^{5}\ \mathrm{cm/s} \qquad (18)$$
$$[t] = t_\oplus = \frac{r_\oplus}{V_\oplus} = \sqrt{\frac{R_\oplus^3}{GM_\oplus}} = 8.07 \times 10^{2}\ \mathrm{s} = 13.44\ \mathrm{min} \qquad (19)$$
$$\rho = \rho_\oplus = 5.52\ \mathrm{g/cm^3} \qquad (20)$$

無次元化したシンドローム方程式

$\hat{M}\ \ (= M/M_\oplus)$、$\Gamma\ \ (= L/L_\mathrm{E})$、$\hat{u}\ \ (= u/V_\oplus)$、$\hat{v}\ \ (= v/V_\oplus)$：

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}} = \frac{3\hat{M}^2(1-\Gamma)^2}{(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{a}^2)^{3/2}} \qquad (21)$$
$$\Gamma = \tau\frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}} \qquad (22)$$
$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \begin{cases} \dfrac{\hat{v}^2}{\hat{r}} - \hat{r} - \dfrac{1}{\hat{M}}\dfrac{d\hat{M}}{d\hat{t}}u & \text{at } \hat{r} \le 1 \\ \dfrac{\hat{v}^2}{\hat{r}} - \dfrac{1}{\hat{r}^2} & \text{at } \hat{r} > 1 \end{cases} \qquad (23)$$
$$\frac{d}{d\hat{t}}(\hat{r}\hat{v}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\hat{M}}\dfrac{d\hat{M}}{d\hat{t}}\hat{r}\hat{v} & \text{at } \hat{r} \le 1 \\ 0 & \text{at } \hat{r} > 1 \end{cases} \qquad (24)$$

ただし、無次元化した音速は、$T = 1000$ K、$\mu = 100$ として、

$$\hat{a} = a/V_\oplus = 0.03645 \qquad (25)$$

また τ は定数パラメータで、η を変換効率として、

$$\tau \equiv \frac{t_\mathrm{E}}{t_\oplus} = \frac{\eta c \sigma_\mathrm{T}}{4\pi G m_\mathrm{p}}\sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^3}} = 1.775 \times 10^{12}\left(\frac{\eta}{0.1}\right) \qquad (26)$$

像以上に大きい．つまり，地球重力場での力学的な運動のタイムスケールと，エディントン降着におけるタイムスケールがぜんぜん違うためで，光り輝くＨＬ降着体においては，運動のタイムスケールと質量増加のタイムスケールが大きく異なる直接の原因である．実際，“抵抗係数” β は，後述するように，$\beta = \Gamma / \tau$ となるので，光り輝いて Γ が有意に大きくなると，β は非常に小さくなってしまう．

3．“黒い” ブラックホールの運動

まず，数年前の解析に対応する，ＨＬ降着体の放射を無視したケース，すなわち “黒い” ブラックホールの振る舞いについて調べてみよう．

“黒い” ブラックホールの振る舞いを記述する方程式は，先の基礎方程式で規格化光度 Γ を０と置いて，(27) 式から (29) 式のようになる．無次元化した音速は，(30) 式のように，0.03645 になる．さらに，“抵抗係数” β は，“黒い” ブラックホールの場合，(31) 式のように表される．初期条件としては，地球の質量で無次元化した初期質量と，ケプラー速度で無次元化した初速度を，(32) 式および (33) 式のように与える．初速度については，(i) 初期状態で地表で静止していた場合，(ii) 初期状態で地表に沿ってケプラー運動していた場合，(iii) ツングースカイベントのブラックホール仮説のように，宇宙から突入してきた場合を考えよう．

具体的な数値計算例を図２に示す．

図２ａは (i) の初期条件で，“黒い” ブラックホールを地表からポトリと落としたケースである．図２ａの横軸は無次元化した時間（１メモリが 13.44 分）で，縦軸は初期質量を単位にした質量 M，地球質量で無次元化した半径 r，“抵抗係数” β である．ブラックホールの初期質量は地球質量の１万分の１で，初速度は動径速度も回転速度も共に０である．

図２ａでブラックホールの位置 r の正弦曲線を見ると，“黒い” ブラックホールは，r に比例する

■“黒い”ブラックホールの場合■

“黒い”ブラックホールのシンドローム方程式 ($\Gamma = 0$)

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}} = \frac{3\hat{M}^2}{(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{a}^2)^{3/2}} \tag{27}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \begin{cases} \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} - \hat{r} - \frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}}u & \text{at } \hat{r} \le 1 \\ \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}^2} & \text{at } \hat{r} > 1 \end{cases} \tag{28}$$

$$\frac{d}{d\hat{t}}(\hat{r}\hat{v}) = \begin{cases} -\frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{dt}\hat{r}\hat{v} & \text{at } \hat{r} \le 1 \\ 0 & \text{at } \hat{r} > 1 \end{cases} \tag{29}$$

ただし、

$$\hat{a} = 0.03645 \tag{30}$$

抵抗係数

$$\beta = \frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}} = \frac{3\hat{M}}{(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{a}^2)^{3/2}} \tag{31}$$

初期条件

$$\hat{M}_0 = \frac{M_0}{M_\oplus} = 1.67 \times 10^{-13}\left(\frac{M_0}{10^{15}\text{ g}}\right) \tag{32}$$

$$(\hat{u}_0, \hat{v}_0) = \begin{cases} (0,0) & \text{radial infall} \\ (0,1) & \text{Kepler motion} \\ (\hat{u}_0, \hat{v}_0) & \text{general case (Tsunguska event)} \end{cases} \tag{33}$$

地球重力のもとでほぼ単振動していることがわかる．すなわち初期質量が地球質量の１万分の１ぐらいだと，運動はほとんど減衰しない．実際，基礎方程式で $v = 0$ と置いて動径方向の運動に制限し，動径方向の運動方程式 (28) 式を“抵抗係数” β が小さいという条件で近似的に解くと，地球半径で無次元化した位置 r が無次元化した時間 t の関数として得られる（簡単のために無次元量を表す＾は落としてある）：

$$r = \exp(-\beta t/2)\cos(t)$$

すなわち，動径方向に落とした“黒い”ブラックホールは，振幅が少しずつ減衰する単振動的な運動をする．

このような振る舞いは数年前の解析結果と同じだが，面白いのは，質量の増加の仕方である．図２ａを見ると，（初期質量で無次元化した）質量 M が階段状に増加していることがわかる．増加の位置をよくみると，$r = \pm 1$ の地点（地表）に一致し，同じ場所で“抵抗係数” β も急増している．これはこういうことだ．地球内部で単振動的な運動をしている“黒い”ブラックホールは，大部分の領域で速度が 10 km/s 程度と高速なため，ホイル＝リットルトン質量降着率が非常に小さく（したがって質量は一定），したがって“抵抗”も小さい．しかし地表近傍では速度が０になるため，質量降着率が一時的に増加して，そこで質量が階段状に増えているのである．また“抵抗係数” β も地表近傍で一時的に増加する．このことから，ブラックホールの運動の減衰も，地表近傍でのみ生じることになる．

動径方向の運動が減衰するタイムスケールを地表近傍の値を使って見積もると，

$$\text{無次元化した減衰時間} \sim 2/\beta \sim 2a^3/(3M_\odot) \sim 0.000032/M_\odot$$

ぐらいになる（$M_\odot$ は無次元化した初期質量）．

図２ｂは (ii) の初期条件で，“黒い”ブラックホールを地表に沿ってケプラー速度で打ち出したケースである．ブラックホールの初期質量は地球質量の千分の１で，動径速度は０，回転速度はケプラー速度である．

図２ｂを見ての通り，ブラックホールは回転運動をしながら，徐々に地球内部に沈降していく（シンドローム）．なお，初期質量を地球質量の１万分の１にすると，ほとんど変化が見て取れない．

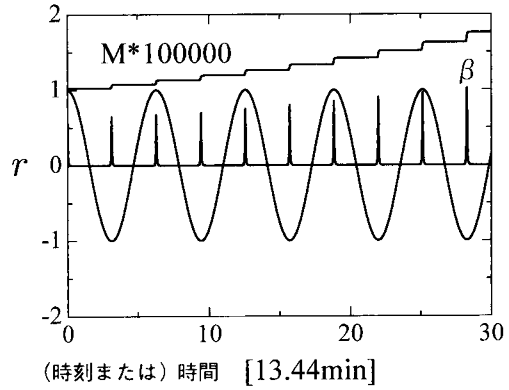

図2a “黒い” ブラックホールの動径運動

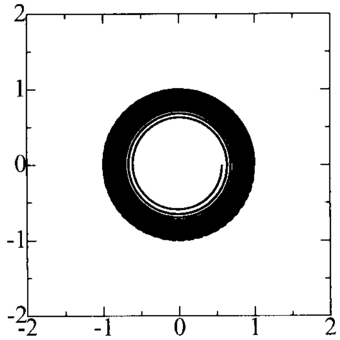

図2b “黒い” ブラックホールの回転沈降

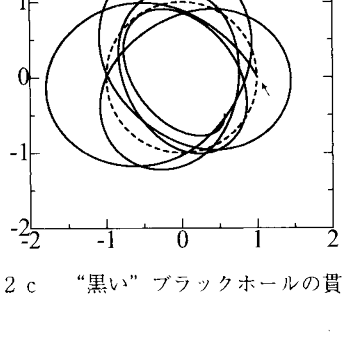

図2c “黒い” ブラックホールの貫入

逆に，初期質量をもっと大きくすると変化も大きくなる（図2c参照）．

図2cは（iii）の初期条件で，“黒い” ブラックホールが地表（破線で表した円）から斜めの方向に飛び込んできたケースである．ブラックホールの初期質量は地球質量の百分の1で，動径速度はケプラー速度の半分，回転速度はケプラー速度である．地球質量の百分の1というのはかなり大きな値だが，振る舞いを強調するために，この値を取ってある．

矢印の位置から地球内部に突入してきた “黒い” ブラックホールは，地球内部では r に比例する地球重力のもとで “抵抗” を受けながら減衰運動を行い，地球外部に突き抜けたら，地球外部では抵抗のない通常のニュートン重力のもとでの楕円軌道を描き，そしてふたたび地球内部に飛び込むという運動を繰り返しながら，次第にその軌道を減衰させていく．初速度や初期質量によっては，宇宙の彼方から飛び込んできた “黒い” ブラックホールが，地球を突き抜けた後，速度を少し減じて宇宙の彼方に飛び去っていく場合もある．初期条件（初期質量と初速度の値）によって，さまざまな振る舞いをするだろう．

ここまでが，前回の解析に対して，より “リアル” な質量降着率（より “リアル” な “抵抗係数”）を当てはめた場合の，改訂版である．

4．“白い” ブラックホールの運動

では今度は，HL降着体に降着した物質による放射（いわゆる降着光度）を考慮したケース，すなわち “白い” ブラックホールの振る舞いについて調べてみる．

“白い” ブラックホールの振る舞いを記述する方程式は，先に示した基礎方程式［(21) 式－(24) 式］だが，(21) 式と (22) 式から dM/dt を消去して，Γについてあらわに解いておくと，(34) 式から (37) 式のように整理できる．無次元化した音速aと無次元化した定数パラメータτは，

■“白い”ブラックホールの場合■

“白い”ブラックホールのシンドローム方程式 ($\Gamma \neq 0$)

$$\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}} = \frac{1}{\tau}\Gamma\hat{M} \tag{34}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = \begin{cases} \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} - \hat{r} - \frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}}u & \text{at } \hat{r} \leq 1 \\ \frac{\hat{v}^2}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}^2} & \text{at } \hat{r} > 1 \end{cases} \tag{35}$$

$$\frac{d}{d\hat{t}}(\hat{r}\hat{v}) = \begin{cases} -\frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}}\hat{r}\hat{v} & \text{at } \hat{r} \leq 1 \\ 0 & \text{at } \hat{r} > 1 \end{cases} \tag{36}$$

$$\Gamma = 1 + \frac{(\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{a}^2)^{3/2}}{6\tau\hat{M}} - \sqrt{\left[1 + \frac{(\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{a}^2)^{3/2}}{6\tau\hat{M}}\right]^2 - 1} \tag{37}$$

ただし、

$$\hat{a} = 0.03645 \tag{38}$$

$$\tau = 1.775 \times 10^{12}\left(\frac{\eta}{0.1}\right) \tag{39}$$

抵抗係数

$$\beta = \frac{1}{\hat{M}}\frac{d\hat{M}}{d\hat{t}} = \frac{\Gamma}{\tau} \tag{40}$$

初期条件

$$\hat{M}_0 = \frac{M_0}{M_\oplus} = 1.67 \times 10^{-13}\left(\frac{M_0}{10^{15}\ \mathrm{g}}\right) \tag{41}$$

$$(\hat{u}_0, \hat{v}_0) = \begin{cases} (0,0) & \text{radial infall} \\ (0,1) & \text{orbital ejection} \\ (\hat{u}_0, \hat{v}_0) & \text{general case (Tsunguska event)} \end{cases} \tag{42}$$

(38) 式と (39) 式のようになる．さらに，“抵抗係数” β は，“白い” ブラックホールの場合，(40) 式のように表される．初期条件は，“黒い” ブラックホールと同じで，たとえば初速度については，(i) 初期状態で地表で静止していた場合，(ii) 初期状態で地表に沿ってケプラー運動していた場合，(iii) ツングースカイベントのブラックホール仮説のように，宇宙から突入してきた場合を考えよう．

具体的な数値計算例を図３に示す．図３ａは (i) の初期条件で，“白い” ブラックホールを地表からポトリと落としたケースである．図３ａの横軸は無次元化した時間（１メモリが 13.44 分）で，縦軸は地球質量で無次元化した半径ｒと規格化光度 Γ である．ブラックホールの初期質量は，地球質量で無次元化した値が，10^{-10}（破線），1.672×10^{-13}（実線；具体的には，マイクロブラックホールの 10^{15}g に相当する），10^{-15}（点線）で，初速度は動径速度も回転速度も共に０である．

図３ａでブラックホールの位置 r を見ると，“白い” ブラックホールもほとんど減衰せずに単振動していることがわかる．実際，基礎方程式で $v = 0$ と置いて動径方向の運動に制限し，動径方向の運動方程式 (35) 式を “抵抗係数” β が小さいという条件で近似的に解くと，“黒い” ブラックホールの場合と同様に，地球半径で無次元化した位置ｒが無次元化した時間ｔの関数として得られる（簡単のために無次元量を表す ^ は落としてある）：

$$r = \exp(-\beta t/2)\cos(t)$$

すなわち，動径方向に落とした “白い” ブラックホールも，“黒い” ブラックホールと同様に，振幅がほんの少しずつ減衰する単振動的な運動をする

一方，この “白い” ブラックホールの明るさ（規格化光度 Γ）の変化の仕方は，ブラックホールの初期質量に依存する．図３ａから見て取れるように，初期質量が大きい（破線）と，Γ はおおむね１程度になる．すなわち，初期質量の大きな “白い” ブラックホールは，ほぼエディントン光度で輝きながら地球内部を往復運動する．逆に，初期質

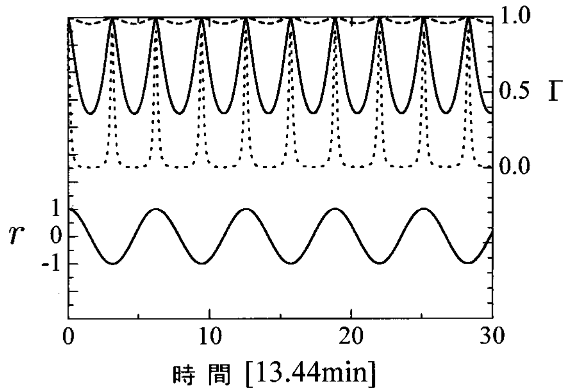

図3 a "白い" ブラックホールの動径運動

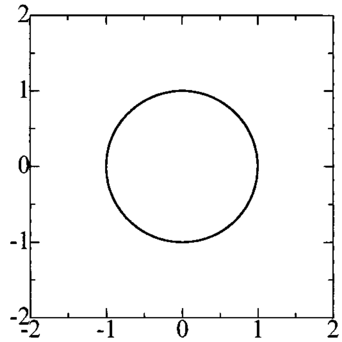

図3 b "白い" ブラックホールの回転沈降

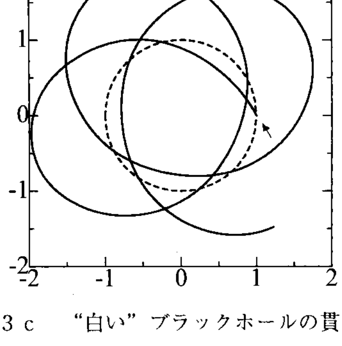

図3 c "白い" ブラックホールの貫入

量が十分小さい（点線）と，Γは0と1の間で大きく変動する．すなわち，初期質量の小さな“白い”ブラックホールは，速度が大きくて物質を十分吸い込めない地球深部では，光らずに“黒く”なるが，速度が小さくなり物質を十分吸い込める地表近傍では急激に増光しエディントン光度程度で輝くのだ．質量降着率が中程度（実線；マイクロブラックホール程度）だと，“白い”ブラックホールは適度に輝く．

図3 bは（ii）の初期条件で，“白い”ブラックホールを地表に沿ってケプラー速度で打ち出したケースである．ブラックホールの初期質量は十分小さく，動径速度は0，回転速度はケプラー速度である．“黒い”ブラックホールと異なって，軌道の減衰はほとんどなく，“白い”ブラックホールは地表に沿って非常に長期間に渡り円運動を続ける．

図3 cは（iii）の初期条件で，“白い”ブラックホールが地表（破線で表した円）から斜めの方向に飛び込んできたケースである．ブラックホールの初期質量は十分小さく，動径速度はケプラー速度の半分，回転速度はケプラー速度である．地球内部では重力がrに比例するために，きれいな楕円軌道ではなくなるが，この場合も，やはり軌道の減衰はほとんどない．

さて，以上の結果からも明らかなように，降着物質の光度（降着光度）を考慮した“白い”ブラックホールの場合，最初にも触れたように，一般的に質量降着率が非常に小さくなる．たとえば“白い”ブラックホールの初期質量がマイクロブラックホールの質量に比べて大きいと，図3 aや（37）式などからわかるように，規格化光度Γはほぼ1になる．すなわちこのとき“白い”ブラックホールはエディントン光度程度で輝くので，その放射圧のために質量降着率は小さくなる．逆に，初期質量が小さいと，規格化光度Γは1より小さくなれるが，（34）式などからもわかるように，初期質量が小さければ質量降着率はそもそも小さい．ということで，初期質量に関わらず，“白い”ブラックホ

ールでは一般的に質量降着率は小さく，そのため“抵抗”も小さく，その結果，軌道の減衰も小さくなるのである．(ここでマイクロブラックホール程度の質量が基準になっているのは，たまたまマイクロブラックホールの質量と地球質量の比が，地球重力の力学時間とエディントン時間の比に近いためである．)

減衰が小さいということは，言い換えれば，“白い”ブラックホールの成長時間（＝軌道の減衰時間）はとても長くなり，典型的には，(6) 式のエディントン時間になる．参考までに，Γが1程度，したがって$\beta = \Gamma / \tau \sim 1 / \tau$とすると，(34) 式は簡単に解けて，“白い”ブラックホールの質量Mは，初期質量を$M_{\odot}$として，

$$M = M_{\odot} \exp (t / \tau)$$

のように表される（簡単のために無次元量を表す ^ は落としてある)．すなわち質量Mは，時間と共に指数的に増加するが，その質量増加あるいは成長のタイムスケールは，

無次元化した成長時間 $t \sim \tau$

であり，両辺に地球重力の力学時間 t_{+}をかけると，

成長時間 $t \sim$ エディントン時間 t_{E}

になる．変換効率を0.1とすると，エディントン時間は約5千万年で，これはかなり長い．

(…以上の性質は，実は，数値計算をしなくても定性的にはわかることだが，そこはそれ，目に見える形にしたいものでして．)

5．議論

さて，本文では，HL降着体とくに“白い”ブラックホールの運動面について考察したが，明るいHL降着体／“白い”ブラックホールの働きについて，エネルギーという別な観点から少し議論しておこう．すなわち明るいHL降着体は，その放射エネルギー自体のせいで，熱源として作用する可能性がある．

たとえば，過去に地球の内部に飛び込んできたHL降着体が，光り輝きながら地球の内部をうろつき回っていたとしよう．簡単のために，その間ずっとエディントン光度で輝いていたとすると（Γ＝1)，先に述べたように質量増加を表す (34) 式は簡単に解けて，質量Mは，$M = M_{\odot} \exp (t / \tau)$ のように増加する（$M_{\odot}$は初期質量)．これは無次元量で表してあるが，(19) 式の地球重力の力学時間 t_{+}などを使って次元をもった式に戻し，さらにτの定義の (26) 式を使うと，結局，エディントン時間 t_Eを使って，

$$M = M_{\odot} \exp[t / (\tau t_{+})] = M_{\odot} \exp (t / t_{E})$$

となる．

ずっとエディントン光度で輝いていると仮定したので，降着体の光度Lは，

$$L = L_{E} = (4 \pi c G m_{p} / \sigma_{T}) M = (4 \pi c G m_{p} / \sigma_{T}) M_{\odot} \exp(t / t_{E}) = 6.29 \times 10^{19} (M_{\odot} / 10^{15}\mathrm{g}) \exp (t / t_{E}) \ \mathrm{erg/s}$$

となり，マイクロブラックホール程度だとあまり大きな値ではない．

この光度である期間輝いていたとすると，その間に放出される全エネルギーEは，光度を時間で積分して得られる．エディントン時間に具体的な数値を代入すると，最終的に，

$$E = \int L dt = 6.29 \times 10^{19} (t_{E}) (M_{\odot} / 10^{15}\mathrm{g}) \exp (t / t_{E}) \ \mathrm{erg} = 9.00 \times 10^{34} (\eta / 0.1) (M_{\odot} / 10^{15}\mathrm{g}) \exp (t / t_{E}) \ \mathrm{erg}$$

が得られる．

さて，地球の内部物質が，比熱が$\mathrm{JK^{-1}g^{-1}}$程度の玄武岩質だとすると，上のエネルギー (9×10^{27} J) で，内部全体の温度を約1.5 K上昇させることができる．この値は一見小さいように見えるが，HL降着体の初期質量を大きくすれば，全エネルギーも初期質量に比例して大きくなるので，あながち無視できるモノでもない．実際，HL降着体の初期質量を10倍にしただけで，約15 K上昇することになる．

いまは全エネルギーで考えたが，もしHL降着体が発生した光度が地球表面から定常的に放射される

とすると（地球内部の物質の熱伝導率とかがよくわからないので，定常的になるまでにどれくらい時間がかかるかわからないが），エディントン光度の分がステファン・ボルツマンの法則で放射されるとして，

$$L = L_E = (4\pi c G m_p / \sigma_T) M$$
$$= 4\pi (R_+)^2 \sigma T^4$$

となり（R_+は地球半径），表面温度Tとして，

$$T = 21.6 \ (M / 10^{15} \mathrm{g})^{1/4} \ \mathrm{K}$$

が得られる．

いずれにせよ，ＨＬ降着体を飲み込んだ地球は，少々暑い惑星になるだろう．

最後に一点だけ．今回の解析では，ＨＬ降着体の放射が球対称だと，ごく当然のように仮定した．しかしながら降着体のまわりに降着円盤が形成されると，放射は非球対称になり，その結果，質量降着率や降着体の進化などは球対称の場合と大きく変わる（Fukue, Ioroi 1998; Fukue 1999）．そのような非球対称放射をするＨＬ降着体のシンドローム問題は，今後の課題として残しておきたい．

本報告をまとめるにあたっては，松田卓也氏と貴志祐介氏とのメール議論が一つの契機となった．この場を借りて感謝したい．また本稿は，もともとは，石原藤夫氏の主宰する〈ハードSF研究所〉の『ハードSF研究所公報』（非公開）に掲載されたものに，若干の加筆修正を行った．

参 考 文 献

1）ポール・プロイス, 1986, 破局のシンメトリー（ハヤカワ文庫 SF）
2）J･C･ホイーラー, 1988, ブラックホールを破壊せよ（光文社文庫）
3）デイヴィッド･ブリン, 1996, ガイア（ハヤカワ文庫 SF）
4）福江　純, 1993, ハード SF 研究所公報, 52, 8
5）福江　純, 1994, 天文月報, 87, 2, 61
6）福江　純, 1994, 天文月報, 87, 3, 108
7）Fukue J., 1994, PASJ 46, 315
8）Nio T., Matsuda T., Fukue J., 1998, PASJ 50, 495
9）Fukue J., Ioroi M., 1999, PASJ 51, 151
10）Fukue J., 1999, PASJ 51, 703

Black Hole Syndrome 2000

Jun Fukue
Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University, Kashiwara, Osaka 582-8582
e-mail:fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

Abstract: A black hole falling into the earth would syndrome toward the center, while it would shine through mass accretion. I have re-examined the dynamics of such a black hole in the earth. In the case of a non-radiating black hole, the timescale of the syndrome is inversely proportional to the initial mass of the black hole. In the case of a radiating black hole, on the other hand, the syndrome time is of the order of the Eddington time. The radiating black hole in the earth would act as a strong heat-source.