

# 宇宙のトポロジーの観測的検証 —宇宙の果てを探る—

井上太郎

〈国立天文台理論天文学研究系 〒181-8588 三鷹市大沢 2-21-1〉

e-mail: tinoue@th.nao.ac.jp

標準理論であるビッグバン宇宙論は宇宙の空間成分の局所的な一様等方性を必要とする。しかしながら、一般相対論は、空間の大域的な性質、即ち大域的トポロジーについては何も特定することが出来ない。我々の住む宇宙の空間が、非自明なトポロジーを持ち、局所的には一様等方であるけれども大域的には非一様非等方であれば、観測によってその兆候を捕らえることが原理的に可能である。本稿は、宇宙背景輻射の非等方性を用いた宇宙の空間成分のトポロジーの観測的検証に関する最近の進展について解説するものである。

## 1. はじめに

宇宙は有限か？ 古来から発せられているこの素朴且つ深遠な問いに、現代の宇宙論は如何なる回答を与えるのであろうか？ 多くの教科書には次の様な記述が見い出される。「宇宙の空間幾何は曲率によって3種類に分類される。曲率がゼロ又は負であれば無限の拡がりを持ち、正であれば有限で閉じている。」これらの空間幾何を持つ宇宙モデルは、それぞれ「平坦（フラット）」、「開（オープン）」「閉（クローズド）」Friedmann-Robertson-Walker (FRW) モデルと呼ばれており、宇宙背景輻射、軽元素合成、宇宙膨張の3つの観測的事実を首尾よく説明するものであることは周知の通りである。

確かに空間が局所的にも大域的にも一様等方であるという「強い宇宙論的原理」が成立していれば、これらの3種類のFRWモデルにおける空間幾何以外のものを考えることは出来ない。しかし、時空と物質の局所的な性質を記述するアインシュ

タイン理論は、時空の大域的な性質については何も特定することが出来ない。従って、上記の3つの観測的事実を説明する為には、実は空間の局所的な一様等方性のみを考えれば十分なのである。

ここでは、空間が局所的には一様等方であるべし、という要請を「弱い宇宙論的原理」と呼ぶことにしよう。この原理を満たす空間は定曲率でなければならないが、大域的には必ずしも一様等方でなくても良い。曲率だけでは空間は一意に定まらず、我々は可能なトポロジー<sup>脚注1</sup>、いわば「空間の形」を何らかの方法で決定しなくてはならない。連続変形によって1点につぶすことの出来ないループが存在するような非自明なトポロジーを持つ空間を許せば、実は平坦や負の曲率の場合でも空間を閉じさせることが出来る。例えば、自明なトポロジーを持つ平坦な無限に拡がる空間（ユークリッド的空間）中に箱を考え、箱の向かい合う境界面を同一視してみよう。すると空間の体積は有限になり、観測者を出発した光はいつかは再び観測者の元に帰ってくることになる。この光の空

(脚注1) 連続変形で移り合うことが可能であれば、空間は同じトポロジーを持つ。例えば「ひ」と「く」は同じトポロジーを持つが、「す」と「よ」は異なるトポロジーを持つ。



間上の経路は閉じたループを成し、連続変形によって1点につぶすことは出来ない。得られた空間は平坦であるが閉じた有限な空間である。このように「弱い宇宙論的原理」の仮定の下では、曲率だけでは空間が有限なのか無限なのか決定できない<sup>脚注2</sup>。では、我々の宇宙のトポロジーは一体如何なるものであろうか？

宇宙のトポロジーに対する理論的な予言は、一般相対論と量子論の融合によって初めて可能となるだろう。統一理論の有力候補である超弦理論やM理論は、我々の住む4次元時空の他に「余次元」空間を必要とするが、その余分な空間は一般には非常に小さな領域に「丸まって」いなければならない。さもなくば、我々は容易に、他の次元の存在を知ることとなる。余次元がコンパクトで閉じていけば、多くの場合、非自明なトポロジーを持つ。若し、時間を除く全ての次元が「同等」であれば、我々の住んでいる空間も非自明なトポロジーを持ち、有限で閉じていると考えることは不自然ではないだろう。

もちろん、我々の住む空間が有限で閉じていても、実際の宇宙の大きさが、観測可能な見掛けの領域の大きさに比べて十分大きい場合、自明なトポロジーと非自明なトポロジーの違いを測定することは困難である。しかし、現在の地平長より小さいスケールで空間が閉じていれば、その閉じた方向に沿って光がぐるぐる回ることが可能になる。すると、我々は、まるで万華鏡を覗いた時のように、ある特定のパターンを持った像が幾つも幾つもの如く繰り返す宇宙を観測することだろう。見掛けは果てしなく続いてみえるが、それはある特定の天体の過去のスナップショットの羅列に過ぎない。そのような宇宙モデルの内、「弱い宇宙論的原理」が成立している宇宙を我々は「小さい宇宙」と呼ぶことにしよう<sup>1)</sup>。

我々の住む宇宙はどの位「大きい」のであろう

か？ もし、宇宙が十分小さければ、我々の銀河や近傍の銀河団の「虚像」を異なる場所に観測することが出来るだろう。近傍の銀河団や超銀河団の観測から宇宙の大きさを特徴付けるスケール（正確にはディリクレ基本領域内の2点間の測地的距離の最大値）に対して $\beta > 600h^{-1}\text{Mpc}$ なる制限が得られている<sup>2)</sup>。つまり、 $\beta$ 程度のスケールまでの銀河は全て「実像」である。しかし、天体が時間的に進化する場合、一見異なる像に見えていても、実は異なる時刻における同一の天体の姿を見ている可能性がある。実際、 $\beta \sim 3000 h^{-1}\text{Mpc}$ では、銀河の進化を考慮する必要があり、単純に同じ像が見えないからと言って非自明なトポロジーを否定することは出来ない。

より強い制限は宇宙背景放射の非等方性の観測によって得られている。宇宙の大きさが有限である場合、実際の宇宙の空間の大きさを超える揺らぎを作り出すことは出来ない。このため、「小さい宇宙」モデルでは宇宙背景放射の大角度の相関が無くなり、COBE（宇宙背景放射探査衛星）の観測結果と矛盾するのではないかという主張がこれまで多くの研究者によって成されてきた。宇宙項の無い平坦なトラスモデルに対して、 $\beta > 8300h^{-1}\text{Mpc}$ という厳しい制限が得られている<sup>3), 4), 5)</sup>。しかし、この場合でも光によって観測可能な領域の共動体積と実際の宇宙の共動体積の比 $N$ は8程度であり、完全に「小さい宇宙」モデルが否定されたわけではないことを強調しておこう。

ところが、最近の研究の進展により、密度パラメーター $\Omega_0$ が1より小さい「低密度」モデルに対しては宇宙の大きさに対する制限は大幅に緩むことが明らかとなった。宇宙項を含む平坦なトラスモデルに対しては $N \sim 50$ 程度まで<sup>6)</sup>、又、閉双曲モデルでは $N = 10^{2-3}$ まで許される<sup>7), 8)</sup>。つまり、宇宙年齢の間に光が数回程度空間をぐるぐる回れるような宇宙モデルは観測的に否定されていない

(脚注2) 負の定曲率空間を空間成分として持つモデルを「開(オープン)」と呼ぶことは適切ではない。我々はこれらのモデルを双曲的モデルと呼ぶべきである。

のである。「低密度」モデルにおいては、宇宙背景放射の大角度の揺らぎは、主に、我々の近傍  $z \sim 3$  における重力ポテンシャルの減衰によって生成される。つまり、大角度の揺らぎは、我々の近傍の比較的小さいスケールの揺らぎに対応している。ある与えられた角度に対応する揺らぎのスケールは、揺らぎが生成された場所が我々に近づけば近づく程小さくなるので、大域的な非自明なトポロジーの効果は益々利かなくなり、大角度の相関の著しい減少は生じない。さらに「弱い宇宙論的原理」を満たすという仮定から、我々の近傍では、背景となる空間は一様等方であるから、近傍で生成された揺らぎの情報から局所的且つ大域的に一様等方なモデルと区別することは困難である。以上が制限が緩む所以である。

このように宇宙の（空間的）トポロジーを測定するには地球上における宇宙背景放射の2次元的な温度揺らぎのデータを用いる方法と銀河や銀河団、若しくはQSO等の遠方の天体の3次元的分布のデータを用いる方法がある。特に前者の方法は、トポロジーの観測的検出には理想的である。なぜならば、宇宙背景放射の揺らぎから、我々は光によって知ることの出来るもっとも古い時代、つまり、もっとも空間的に大きいスケールの情報を知ることが出来るからである。本稿では、まず初めに非自明なトポロジーを持つ空間について簡単に解説し、次に宇宙背景放射の温度揺らぎを用いて宇宙の空間的トポロジーを測定する方法を紹介する。最後にまとめと今後の展望を述べる。

## 2. 非自明なトポロジーを持つ宇宙

### 2.1. 2+1 次元宇宙

まず、空間が2次元である場合を考えよう。局所的にも大域的にも一様で等方な空間は、正の定

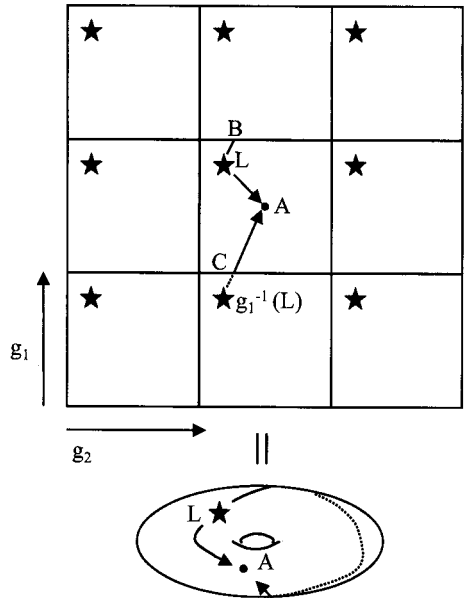


図1 トーラス面内での実像と虚像。2次元トーラス  $T^2$  は、見掛け上、無限であるユークリッド的平面  $E^2$  を同一の正方形のタイルで無限に敷き詰めたものと同等である。時間的に十分変化の少ない天体は、タイルの一辺の長さの間隔で周期的に次々と現れる。

曲率をもつ2次元球面  $S^2$ 、曲率ゼロの無限に広がったユークリッド的平面  $E^2$ 、負の定曲率をもつ無限に広がった2次元双曲面  $H^2$  の3種類である。これらの空間は自明なトポロジーを持ち、空間内の任意のループを1点につぶすことが可能である。

ここで、非自明なトポロジーを持つ閉じた空間の例として、平坦な2次元トーラス  $T^2$  を考えよう。 $T^2$  は  $E^2$  内に置かれた正方形  $S$  の向かい合った辺を平行移動 ( $g_1, g_2$ ) で同一視することによって得られる。 $T^2$  はドーナツと同じ（連続写像で互いに移しあうことが可能）トポロジーを持つが、3次元のユークリッド的空間中のドーナツは、平坦ではなく、曲率が正の部分と負の部分があることに注意しよう<sup>脚注3</sup>。

(脚注3)  $E^2$  内に  $T^2$  を埋め込むことは出来ないが、高次元のユークリッド的空間に  $T^2$  を埋め込むことは可能である。(Whitney の定理)



仮に2次元の観測者  $A$  が  $T^2$  に住んでいるとしたら、 $A$  の目に、世界はどのように映るのであろうか？ もし、 $A$  を照らす光源が十分強ければ、 $A$  は遠方に多数の自分自身の姿を観察するに違いない。 $A$  を発した光は空間をぐるぐるの周り、いつかは、 $A$  のところに帰ってくるためである。 $A$  は鏡に囲まれた世界にいるような錯覚を覚えることだろう。違う点は、虚像の向きが変わらないことと、実際に虚像の位置に物体が「存在」することである<sup>脚注4</sup>。今、図1にあるような光源  $L$  の光の経路を考えよう。上辺に向かう  $L$  を出発した光は  $S$  の上辺と点  $B$  において交差したとき、平行移動  $g_1^{-1}$  で底辺上の点  $C$  に引き戻され、再び  $A$  に向かう。ここで、便宜的に  $g_1$  による  $S$  のコピー  $g_1(S)$  を考えよう。 $L$  のコピーを  $L' = g_1^{-1}(L)$  としよう。すると経路  $\overline{L(B=C)A}$  を通ってきた光は経路  $\overline{L'CA}$  を通ってきた光として考えることが可能である。ただし、 $L'$  は光が巡るのに要した時間だけ過去に遡ったときの  $L$  である。同様にして、 $S$  の全てのコピー  $g_1^{m_1} g_2^{m_2}(S)$  を考えると、 $L$  から  $A$  に向かう測地線は、 $L$  の全てのコピー  $g_1^{m_1} g_2^{m_2}(L)$  と  $A$  を測地線で結ぶことによって得られる。従って、 $T^2$  においては、 $E^2$  中で、ある一定のパターンが繰り返されているかの如く見える。空間が無限に広がって見えるのは錯覚で、実は有限の大きさをもつタイルのコピーが次々と繰り返して見えるだけに過ぎない。この繰り返しのパターンを決定するタイルは基本領域<sup>脚注5</sup>と呼ばれ、その大きさは実際の空間の大きさに等しい。基本領域の非等方性は空間の大域的な非等方性に対応する。又、基本領域の形が観測者の位置に依る場合は、空間は大域的に非一様である。この場合、観測者を通る周期的測地線のループの長さの最小値は、観測

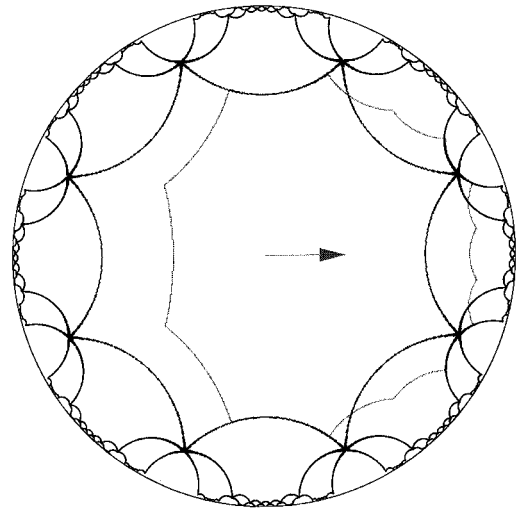


図2  $g=2$  の閉双曲面に対する周期構造と大域的な非一様性。図は共形的に平坦な座標（ポアンカレ座標）における正八角形の双曲面内でのタイル張りを表す。円周上の点は、無限遠方の点を表す。閉双曲面は大域的に非一様なので観測者の位置が変れば（矢印）、タイル（ディリクレ領域）の形も一般には変化する。

者の位置に依存することになる。従って、空間の大域的な非等方性も位置によって変化する。

閉双曲面は、 $T^2$  の場合と比べると若干複雑だが、同様に構成出来る<sup>脚注6</sup>。無限に広がった双曲面から、基本領域となる正八角形を切り取り、向かい合った辺を同一視すれば  $g=2$  の閉双曲面になる。（図2）この場合、基本領域であるタイルは正八角形である。正八角形では一見無限の空間をタイル張りすることは不可能に思えるが、負の定曲率空間における正八角形の内角は  $\pi/4$  であるので問題は生じない。

（脚注4）もし、 $A$  の手が十分長ければ、真っ直ぐ前に手拭いを差し出して自分の背中を綺麗に拭うことも可能になる。鏡の場合は単に鏡に「ぶつかって」しまうだけである。

（脚注5）基本領域の内、中心  $x$  から基本領域内の点  $y$  までの最短距離  $d(x,y)$  が全ての中心のコピー  $g(x)$  から  $y$  までの最短距離  $d(g(x),y)$  よりも小さい  $y$  の集合から成るとき、基本領域はディリクレ領域と呼ばれる。

（脚注6）2次元の閉曲面は全て連続変形によって  $g$  個の取っ手のついた球面に移すことが可能である。 $g=0$  の場合は球面、 $g=1$  の場合は  $T^2$ 、 $g>1$  の場合は全て負の定曲率を持つ閉双曲面に移すことが出来る。



## 2.2. 3+1 次元宇宙

次に空間が3次元の場合を考えよう。残念ながら、境界を持たない有限で閉じた3次元空間の分類は、未だ完全には達成されていない。しかしながら、局所的に一様等方な空間は定曲率であるから、幾何学としては、2次元の場合と同じく、空間の曲率によって3つの場合が考えられる。

まず、曲率ゼロの場合を考えよう。この場合、向き付け可能な閉じた空間はたったの6通りしかない。従って、トポロジー的にいえば、数は少ない。しかし、空間の大きさは任意であり、さらにタイルを連続的に変形出来る自由度を持っている、という特徴を備えている。構成法は以下の通りである。無限のユークリッド的空間  $E^3$  内の立方体（若しくは平行6面体）を考え、3組の向かい合った面を平行移動で同一視すると3次元トーラス  $T^3$  が出来る。又2組の向き合う面を平行移動で同一視し、残りの1組の面を平行移動と180度回転若しくは90度回転で同一視すると、 $T^3/Z_2$  と  $T^3/Z_4$  が得られる。（ $Z_m$  は位数  $m$  の巡回群）又、全ての向き合う面を平行移動及び180度回転で同一視すると  $T^3/Z_2 \times Z_2$  が得られる。さらに、6角プリズムの向かい合う側面同士を平行移動で同一視し、6角形である上面と底面を平行移動と120度回転、又は60度回転で同一視すると、 $T^3/Z_3$  と  $T^3/Z_6$  が得られる。

正の定曲率の場合は可算無限個の種類がある。2つの2次元の円盤を円周の境界に沿って貼り合わせると2次元球面  $S^2$  が得られるように、3次元球面  $S^3$  は、2つの3次元球体をその表面である  $S^2$  で貼り合わせることによって作ることができる。 $S^2$  は中心を通る軸の周りの  $360/m$  度の回転変換  $Z_m$ 、正  $n$  角形を自分自身に移す変換  $D_n$ 、正4面体、正8面体及び正20面体を不変にする変換 ( $T, O, I$ ) で同一視することが可能である。これらの変換やその組み合わせから成る変換を  $S^3$  上の変換に引き戻す

ことにより、非自明なトポロジーを持つ球面的空間が得られる。因みに、正の整数  $m$  の上限値は存在しないので、基本領域の体積の下限は存在しない。上限はいうまでもなく  $S^3$  自身の体積である。

負の定曲率の場合の分類は難しく、未解決の問題である。しかし、その構成のアルゴリズムは知られており、閉双曲的空間のトポロジーの種類は無限であることが証明されている。現在では、コンピュータによる計算から、1万個以上の例が知られている<sup>9)</sup>。重要な性質は体積の値に下限が存在（ $\sim 0.1667\dots$ ）することである。既知の空間の中で最も小さいのは、数学者ウィークスの発見したウィークス多様体<sup>10)</sup>であり、体積はおよそ0.94立方ラジアンである<sup>脚注7</sup>。次に小さい閉双曲的空間は、サーストン多様体と呼ばれ、体積はおよそ0.98立方ラジアンである。小さい体積の値はまるで水素原子のスペクトルのようにとびとびの値を取り、体積が2立方ラジアンより小さいものは44個しか知られていない。

## 3. 宇宙背景輻射による測定

1964年にPenziasとWilsonによって偶然発見された宇宙背景輻射は今日のビッグバン宇宙論を裏付ける決定的な観測的証拠と考えられている。それは、我々の宇宙の大きさが現在のおよそ1100分の1で、温度が約3000度の時、プラズマ状態であった電子と陽子が再結合して中性水素になり、それまで電子と相互作用（トムソン散乱）していた光子が「脱出」して（宇宙の晴れ上り）、我々に届いた、ビッグバンの残り火である。脱出した当時は可視光の領域（波長 $\sim 1\mu\text{m}$ ）でも、我々に届く間の宇宙膨張によって、およそ1100倍に引き延ばされるので、現在は、マイクロ波の領域（波長 $\sim 1\text{mm}$ ）に観測される。

1989年に打ち上げられたCOBEに搭載されたFIRAS（遠赤外絶対分光光度計）から得たデータか

（脚注7）閉双曲的空間や球面的空間の体積は曲率半径の3乗に比例する。通常は曲率半径が1のときの体積で「大きさ」を表す。



ら、輻射の振動数に関するエネルギー分布は 160GHz (波長 1.88 mm) で最大値をとる絶対温度 2.73 度の黒体輻射の分布と 60GHz から 600GHz の範囲において約 3 千分の 1 以下しかずれていないことが判明した。この事実は、初期宇宙において、非常に高い精度で熱平衡状態が保たれていたことを物語っている。又、COBE の DMR (示差マイクロ波放射計) は、宇宙背景輻射の天空上の空間的な温度揺らぎを観測した。その結果、温度揺らぎは (背景時空に対する我々の固有速度による二重極成分を差し引いた上で)、大角度スケール (10 度以上) で絶対温度にして 10 万分の 2 ないし 3 程度であることが判明した。我々の宇宙は非常に良い精度で等方的である。

この相対的には 10 万分の 1 程度という揺らぎの大きさは非常に重要である。宇宙の空間成分は完全には一様等方ではなく、極く僅かではあるが、「丁度良い加減」のずれをもっているのである。この極く僅かなずれから、我々は宇宙に含まれている物質の質量や種類、膨張率、揺らぎの初期条件といった貴重な情報を得ることが出来るのである。我々の宇宙の大域的な幾何の情報もこの極く僅かな揺らぎの中に隠されているのだ。

### 3.1. 「空の円」

もし我々の宇宙の空間成分が非自明なトポロジーを持つならば、特有の周期構造がこの宇宙背景輻射の温度揺らぎに隠されているはずだ。Cornish 達は、定曲率空間ならば、どのようなトポロジーをもつ空間に対しても適用可能なまい検出法を提案した<sup>11)</sup>。それは、天球上に同じ半径の二つの円 (「空の円」) を描き、それらを同一視することが可能かどうか調べる、というものである。

簡単のため、平坦な 3 次元トーラス空間  $T^3$  を考えよう。前述の通り、立方体のタイルを考え、向

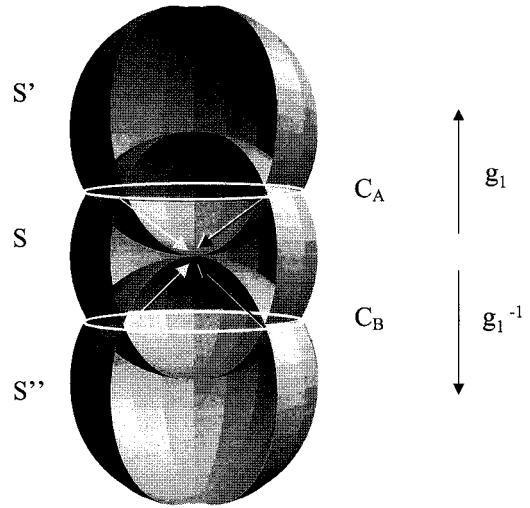


図3 宇宙背景輻射における周期構造。  $T^3$  の大きさの特徴付ける、立方体の 1 辺の長さ  $L$  が最終散乱面  $S$  の直径より小さければ  $S$  はそのコピーである  $S' = g(S)$  や  $S'' = g^{-1}(S)$  と交わり、その交線は二つの円  $C_A, C_B$  になる。これらの見掛け上の二つの円は実は同一の円である。

かい合った面を平行移動で同一視しよう。向かい合った面の組は三組あるが、対応する同一視の操作をそれぞれ  $g_1, g_2, g_3$  と名付けよう。又、我々はそのタイルの中心にいるとしよう。そして、無限の 3 次元ユークリッド的空間  $E^3$  に  $T^3$  を「展開」しよう。  $E^3$  は立方体のタイルのコピーで埋め尽くされていくが、我々を中心とした球面である最終散乱面<sup>脚注8</sup>  $S$  のコピーも全ての立方体のタイルのコピーに付随して存在することに注意しよう。さて、  $g_1$  で移動させた、  $S$  のコピーを  $S' = g_1(S)$  としよう。もし、  $S$  の直径が  $g_1$  で平行移動した距離に比べて大きければ、  $S$  と  $S'$  は交わり、その交線は円  $C_A$  になる。さて、今度は、  $g_1$  と方向が逆向きの平行移動  $g_1^{-1}$  を考えよう。同様に、  $S$  のコピー  $S'' = g_1^{-1}(S)$  は、  $S$  と交わり、その交線は円  $C_B$  になる。さて、  $g_1(S'' \cap S) = g_1(S'') \cap g_1(S) = S \cap S'$  であるから、円

(脚注8) 我々が観測している光子は宇宙の晴れ上りの時期にはほぼ同時にある場所を起点として出発したが、その起点の集合である 2 次元面を最終散乱面と呼ぶ。



$C_A$  と円  $C_B$  は、平行移動  $g_1$  (又は  $g_1^{-1}$ ) で同一視される (図 3). 同様に  $g_2, g_3$  についてもそれぞれ対応する円の対が存在する. つまり, 宇宙の空間が十分小さければ, 最終散乱面は宇宙の空間をぐるっと包み込んで自分自身と交わる. そして, その交線である最終散乱面上の円を出発した光子は異なる二つの方向をもって我々の観測点に到達することが可能となる. よって, 我々がこの二つの円  $C_A, C_B$  の方向の温度揺らぎを観測すると円上で互いに逆向きの方向に沿って全く同じ温度揺らぎのパターンを示すはずである.

もちろん, 円の対の現れ方は空間の個々のトポロジーに依存するため, それらを特定するのは容易ではないだろう. 又, 「低密度」宇宙では, 考える揺らぎの角度スケールによっては, 最終散乱面から我々に届く間に光子が受ける影響のため, 完全なパターンの一致は残念ながら望めない. しかし, 宇宙の空間が十分小さければこのような円の対の数は多くなり, 観測にかかる確率は増大するだろう.

COBE の観測データは, 10 度以下のスケールで, ノイズがシグナルに勝ってしまい, 非常に大きい角半径を持つ円の組に対しても, 統計的に有意な相関を検出することは困難である. しかし, 次世代の衛星 (MAP, Planck) による観測によって, より小さい角度スケールにおける温度揺らぎの全天地図が得られれば, 非自明なトポロジーの検出は容易になる. 角分解能が  $1^\circ$  程度で, 且つ  $S/N = 2$  程度ならば, 円の角半径が約  $15^\circ$  以上であれば検出は可能である<sup>12)</sup>.

### 3.2. 非ガウス性

通常, 宇宙背景輻射の非等方性を用いて, 宇宙論パラメータを決定するには, 天球上の温度揺らぎの空間的な 2 点相関の等方な成分である角パワースペクトル  $C_l$  を用いる. もし, 初期揺らぎが一様等方なガウスのランダム場で記述されるならば,  $C_l$  を用いた統計解析を行えば, それで十分である. しかし, 「小さい宇宙」モデルは, 大域的に

は非一様非等方なので初期揺らぎは非一様非等方なガウスのランダム場で記述される. 従って  $C_l$  を用いた統計解析だけでは不十分である.

今, 例として再び  $T^3$  モデルを考えよう. 基本領域は辺の長さが  $L$  である立方体  $Q$  であるとしよう. 温度揺らぎを球面調和関数  $Y_{lm}$  を用いて展開しよう.

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (1)$$

ここで,  $\mathbf{n}$  は天球上を指し示す方向ベクトルである.  $T^3$  モデルに対して  $(l, m)$  空間における 2 点相関のガウスの初期揺らぎのアンサンブル平均は,  $Q$  の中心を中心として, 各軸が  $Q$  の各面に垂直な座標を取ると,

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{8\pi^3}{k^3 L^3} \mathcal{P}_\Phi(k) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) F_{kl} F_{kl'}, \quad (2)$$

と表せる.  $\mathcal{P}_\Phi(k)$  は初期パワースペクトル,  $F_{kl}$  は重力ポテンシャルの空間的な揺らぎとその時間発展で決まる輻射輸送関数である. 空間が有限であるため, 波数は離散的な値  $k_i = 2\pi n_i/L$  を取る.  $L \rightarrow \infty$  の極限では,  $Y_{lm}$  の直交性から非対角成分  $l \neq l', m \neq m'$  の項はゼロだが,  $L$  が有限の場合は非対角成分はゼロではない. 従って, ある向きを持った観測者に対しては, 揺らぎは非等方な成分を残す. しかし, あらかじめ, どの向きが選択されるかについて, 我々は何の情報も持たないので, ある特定の向きに対する物理量だけを比べても意味はない. 観測者のあらゆる向きに応じた, 全ての揺らぎのパターンを比べる必要がある. ここで, 等方な観測者のアンサンブルを考えよう. すると, 等方な観測者に対するアンサンブル平均を取ると, 当然のことながら 2 点相関の非対角成分は消える. 同様に 3 点相関も消えるが, 4 点相関の連結成分の項は全て消えない<sup>12)</sup>. つまり, 等方な観測者のアンサンブルに対しては, 揺らぎは等方な非ガウスの揺らぎとして振る舞うのである. 非ガウスの揺らぎを生成する非標準的イン

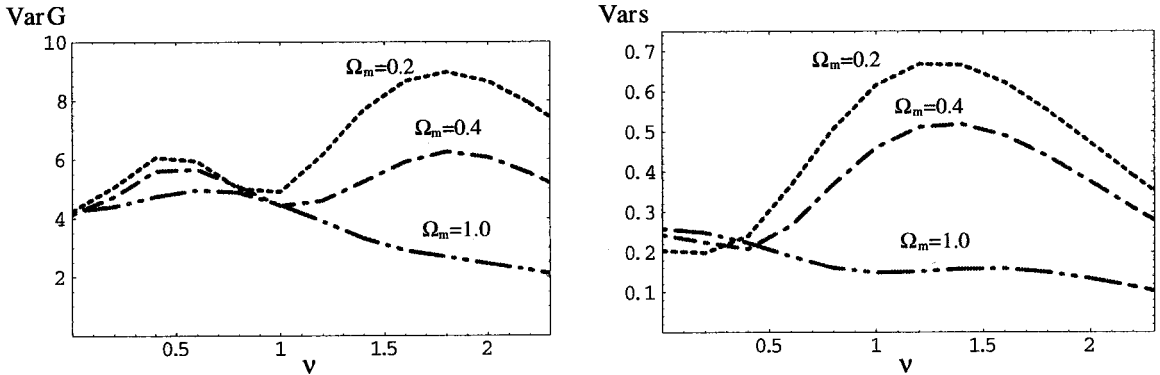


図4 体積の小さい閉双曲モデル（ウィークスモデル）における非ガウス性の痕跡。横軸は温度揺らぎの rms 値で規格化した閾値，縦軸は単位面積辺りの等温曲線の種数  $G$  の分散（左）と単位面積辺りの全長  $s$  の分散（右）を表す。 $\Omega_0=1$  の曲線は  $C_l \propto 1/l(l+1)$  のアインシュタイン-ドジッターモデルに対する値を表す。

フレーションモデルや宇宙紐モデルと異なり，その非ガウス性は，空間の有限性の効果が顕著な大きいスケールにのみ表れるので，その区別は容易である。又，「空の円」の方法と異なり，最終散乱面が自分自身に交わらなくても，その効果が表れるので，間接的とはいえ，空間の大域的な非一様性や非等方性を測るには理想的な方法である。

閉双曲的空間ではラプラシアン固有モードに関する展開係数が一様等方な観測者のアンサンブルに対して良い近似でガウスのランダム数として振る舞うことが数値的に確かめられている<sup>13)</sup>、<sup>14)</sup>。すると，温度揺らぎは歪度はゼロであるが尖度が正である分布関数に従うことになる。天球上の温度揺らぎに関するトポロジー的に不変な統計量，即ち，等温度閉曲線の単位面積当りの種数や全長を調べたところ，平均値はガウス揺らぎの予言とほぼ同じであるにも拘らず，分散は，絶対値が  $1.5\sigma - 2\sigma$  の閾値に対して，ガウス揺らぎの予言よりも数倍程度まで大きくなることが判明した<sup>15)</sup>（図4）。これは，分布関数の歪度がゼロであることと，尖度が正のため，分布関数がガウス分布に比べゆっくりと減衰していることに起因するものと思われる。

#### 4. おわりに

本稿では宇宙背景輻射の温度揺らぎを用いた測定法について解説したが，その他に銀河団の2点距離の分布<sup>16)</sup>を用いた方法があり，大域的にはほぼ一様な空間（閉ユークリッド的空間や一部の球面的空間）に対しては有効であることが知られている。又，近接したQSOの空間分布を用いて，周期構造を探る方法もあるが，この方法が有効であるためにはQSOの出す光の非等方性が弱くならない<sup>17)</sup>。今後10年以内に宇宙背景輻射の全天観測（MAP, Planck）や，銀河団やQSOの観測（2dF, SDSS）によって得られる新しいデータを用いて，宇宙の空間幾何構造を良い精度で決定することが出来るだろう。さらに， $\gamma$ 線バーストや，宇宙背景重力波輻射を用いた新しい測定法も考えられるが，その具体的な定式化は今後の研究の課題である。

我々は，宇宙のトポロジーを測定することによって，宇宙がどのくらい大きい（小さい）のか，「宇宙論的原理」がどのくらい「強い」（「弱い」）のかを知ることが出来る。たとえ，当然の結果に終わろうとも，それは非常に重要な意味を持つ。





「観測的な果て」という限界に完全に達するまで、我々の知的冒険は限りなく続いていくことだろう。

本稿は日本物理学会誌 2000 年 11 月号に寄せた原稿を基に書き直したものです。指導教官であった富田憲二（京都大学）と共同研究者である杉山 直（国立天文台）の両氏、又、原稿のチェックをして頂いた竹内 努氏に感謝の意を表します。

### 参考文献

- 1) Ellis G.F.R., 1971, *General Relativity and Gravitation* 2, 7
- 2) Sokoloff D.D., Shvartsman V.F., 1974, *Sov. Phys. JETP* 39, 196
- 3) Starobinskii A.A., 1993, *JETP Lett.* 57, 622
- 4) Stevens D., Scott D., Silk J., 1993, *Phys. Rev. Lett.* 71, 20
- 5) Levin J.L., Scannapieco E., Silk J., 1998 *Phys. Rev. D* 58, 103516
- 6) Inoue K.T., 2001, *Classical and Quantum Gravity* 18, 1967
- 7) Inoue K.T., Tomita K., Sugiyama N., 2000, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 314, L21
- 8) Inoue K.T., 2001, *Progress of Theoretical Physics* 106, 39
- 9) Weeks J.R., *SnapPea A Computer Program for Creating and Studying Hyperbolic 3-manifolds*, <http://www.northnet.org/weeks>
- 10) Weeks J.R., 1985, PhD doctoral thesis, Princeton University
- 11) Cornish N.J., Spergel D.N., Starkman G.D., 1998, *Classical and Quantum Gravity* 15, 2657
- 12) Inoue K.T., 2001 PhD thesis (astro-ph/0103158)
- 13) Aurich R., Steiner F., 1993 *Physica D* 64, 185
- 14) Inoue K.T., 1999 *Classical and Quantum Gravity* 16, 3071
- 15) Inoue K.T., 2000 *Phys. Rev. D* 62, 103001
- 16) Lehoucq R., Lachiéze-Rey M. and Luminet J.P., 1996, *Astron. Astrophys.* 313, 339.
- 17) Roukema B.F., 1996, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 283, 1147

### Measuring Topology of the Space - Exploring the Limit of the Observable Universe - Kaiki Taro INOUE

*National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo 181-8588*

Abstract: The Big-Bang theory, the standard theory of the modern cosmology demands that the spatial section be locally homogeneous and isotropic. However, the general theory of relativity cannot specify the global topology of the spatial section, i.e. the global property of the spatial geometry. If our universe has a spatial section with non-trivial topology which is globally inhomogeneous and anisotropic although locally homogeneous and isotropic, then we may be able to detect the imprint by observation, in principle. In this article, we review the recent progress on how we can measure the topology of the spatial section using the cosmic microwave background anisotropy.