数値的相対論

柴　田　大
〈東京大学・総合文化研究科　〒153–8902 東京都目黒区駒場 3–8–1〉
e-mail: shibata@provence.c.u-tokyo.ac.jp

1. はじめに

大質量星のコアが重力崩壊して中性子星またはブラックホールを形成する，中性子星やブラックホール同士が合体する，といった現象では一般相対論が本質的役割を果たす．つまり理論的に調べるには，非線形連立偏微分方程式であるアインシュタイン方程式を解く必要がある．複雑な方程式ゆえに解析的に解を求めることは一般的には不可能であるので，理論的研究には数値シミュレーションが必要不可欠となる．

一般相対論的数値シミュレーション（いわゆる数値的相対論）の重要性は，これまでになく増している．その理由の一つとして，レーザー干渉計による重力波検出実験が始まったことが挙げられる[1), 2)]．重力波の直接検出および検出した重力波の波源の特定のためには，理論家が精度の良い波形のテンプレートを用意する必要がある．解析的に波形の計算が可能な現象も存在するがそれらは例外で，多くの現象（例えば，連星中性子星や連星ブラックホールの合体，大質量星のコアの重力崩壊）に対しては，数値的相対論によってのみ波形が計算可能である．したがって，数値的相対論は重力波検出計画において重要な役割を担う．

数値的相対論が重要性を増したもう一つの理由として，ダイナミカルな一般相対論的天体現象の観測例が増えたことが挙げられる．例えば最近，高光度超新星 (hypernova) がたびたび報告されるようになったが，この現象にはブラックホール形成が伴っているとする説が有力視されている．また，γ 線バーストは宇宙論的距離で発生していて，その中心源は恒星サイズの質量のブラックホールとディスクからなっていると考えられている．その progenitor として大質量星の重力崩壊や連星中性子星の合体が有力視されているが，仮説を理論的に実証するにはシミュレーションを実行するほかない．ブラックホールが形成される現象なので，数値的相対論が必要不可欠である．

数値的相対論の研究は，1990 年代前半から世界各地で盛んになった．日本でも，1996 年以降国立天文台に宇宙物理学者・理論天文学者専用のスーパーコンピュータが導入され大規模な数値シミュレーションが可能になったおかげもあり，世界最先端の研究成果を発表できるようになった（例えば，文献 3〜6）．そこで本稿においては，我々の研究成果と数値的相対論の今後の課題について，簡単に解説する．

2. 数値的相対論

数値的相対論とは，アインシュタイン方程式および物質場の方程式（例えば流体力学方程式）からなる連立方程式を数値シミュレーションにより解き，天体現象を解明する研究分野を指す．ただし他の数値天文学諸分野とは異なり，解くべき方程式型が定まっていないという特色があり，単なる数値計算以上の面白さ・難しさがある．これは以下のような事情による．

一般相対論においては，座標変換の自由度が存在する．方程式型は，座標変換自由度の固定の仕方によって異なる．また，一般相対論は電磁気学と同様にいわゆる拘束系の理論であり，計量に対する束縛方程式と発展方程式の両方が存在する．

その結果，どの方程式を解くべきかという自由度も存在する．さらに，仮に発展方程式だけを解くと決めても，束縛方程式を用いて発展方程式を書き換える自由度が存在する．その結果，発展方程式の形にも選択の自由度が多数存在する．以上のような事情のゆえ，解くべき方程式を決定するという問題がまず発生する．この選択を誤ると，数値シミュレーションを安定に行うことができない．例えば，数値的相対論においては標準的ADM形式[7]が長らく優れた形式であると信仰されてきたが，この形式は実は数値計算には不向きなことが最近明らかにされている．

優れた形式に関するさまざまなアイデアが提案されてきたが，現在では2種類に収束しつつある．一つはいわゆるBSSN形式である．この方法は，もともと中村によって考案され[8]，その後筆者[5), 9)]やBaumgarteとShapiro[10]によって手直しが加えられたのでその頭文字を取ってBSSN形式と呼ばれている．この形式は，標準的ADM形式に多少改良を加えるだけで得られる．

もう一つは，いわゆる双曲型形式である[11]．この形式では計量の微分も独立変数として導入され，すべての方程式が1次の双曲型になるように定式化される．標準的ADM形式では解くべき方程式の数は12に過ぎず，またBSSN形式では17に過ぎないが，双曲型形式では40近くにも及ぶ．よって式も複雑であるし，数値計算において演算量も増える．しかしこの形式では，すべての方程式が双曲型になっているので，特性曲線の方向が明確であるという利点がある．特性曲線に沿って方程式を解くことができるので，流体力学と同様の数値手法が採用できたり，またブラックホール近傍における境界条件の設定などにおいて威力を発揮する．

以上の二つのどちらを用いても，非常に強い重力場を含む時空に対して，数値計算を安定に長時間実行できることが示されている．いまのところ手軽さゆえ，BSSN形式が世界中で広く用いられている．しかし，ブラックホール時空のシミュレーションを行うためには，双曲型形式の方が有効かもしれない．今後は，解くべき問題によって使いわけされていくものと思われる．

ほかにもゲージ自由度の固定法などさまざまな問題が存在したのだが，過去5年ほどの間にあらかた解決している．これらの問題の解決の歴史については，誌面の都合上省略する．残された唯一の未解決問題は，ブラックホールが存在する場合に，どのようにブラックホールを取扱うかという問題である．ブラックホールとは，事象の地平面で特徴づけられるが，これが計算途中に発生すると，有限時間内に真の特異点か座標特異点が地平面内に現れ，計算が破綻することが分かっている．これを避けるには，事象の地平面以内の計算領域を切り取ってしまって，そこに境界条件を課して計算を行う以外ない[12]．しかしこのような手法を用いるには，正確な境界条件や特殊な差分法が必要である．アインシュタイン方程式に対する未知の特殊な定式化が必要となる可能性もある．

3. 必要な計算機パワー

相対論数値シミュレーションを行うにあたっては，巨大な計算機資源が必要となる．理由の一つとしては，計量やその接続係数など取扱うべき変数の量が多いことが挙げられるが，本質的には以下のような事情のためである．

数値的相対論の最も重要な役割の一つは，重力波の波形を計算することである．正確な波形を得るには，波動帯まで計算領域を確保し，そこで重力波を抽出しなくてはならない．一方，中心付近に存在する中性子星やブラックホールを高分解能で計算することも必要なので，格子幅は十分に小さくとる必要がある．計算領域の端から端までの長さを$2L$し，格子幅を$\varDelta$とすれば，必要な格子数は1次元当たり$N=2L/\varDelta$と評価される．空間3次元の計算を実行するのだから，格子数はトータルでN^3必要となる．

今，重力波の特徴的な波長をλとしよう．Lがλよりも大きくないと，正確に重力波を計算できない．連星の合体を考える場合，合体直前に放出される重力波の波長が最も長い．そのときの軌道半径をr，連星の合計質量をMとすれば，$\lambda \approx \pi c r^{3/2}(GM)^{-1/2}$と評価できる（$G$は重力定数，$c$は光速度）．一方，$\Delta$は系の重力半径$2GM/c^2$の10% 以下に取ることが望ましい．以上の条件から，$N \geq 10\pi(c^2r/GM)^{3/2}$という条件が得られる．現実的な値として$r=7GM/c^2$を代入してみると，$N \geq 600$を得る．いま計算で定義が必要となる変数の数を200としよう．すると倍精度計算のために必要な最小限のメモリが，350ギガバイトにも及ぶ．なお満足できる精度を要求するならば，格子数をさらに2, 3倍は増やす必要がある．

国立天文台には現在 FACOM VPP5000 が導入されているが，最大で約700ギガバイトのメモリを用いることができる．つまり，必要最小限のメモリは確保できる．ただし，350ギガバイトのメモリを用いた計算を行った場合に，必要となる計算時間は1モデル当たり20000タイムステップとしておよそ200 CPU 時間である．年間に1グループ当たり，たかだか1000 CPU時間程度しか使用可能でないので，1年で5モデル程度しかシミュレーションが実行可能でない．

十分な精度の計算を実行するには，$N \approx 2000$程度は取りたい．また，計算時間も1モデル当たり100 CPU時間以内に押えたい．つまり，メモリにして10テラバイト，計算速度にして今の100倍程度（数十テラフロップス）のマシンが将来望まれる．

4. これまでの研究成果

とはいうものの，VPP5000でも必要最小限度の格子数は確保できるし，精度が多少落ちるものの，シミュレーションから定量的結果を引き出すことも可能である．そこで，過去数年間の我々の研究成果について紹介する．

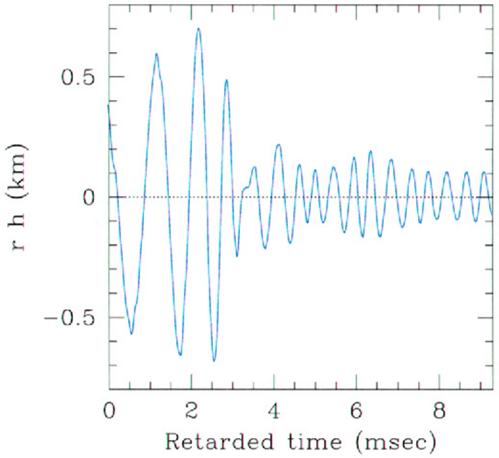

図2　図1の現象に伴って発生する重力波の波形．遅延時間にして約2.5ミリ秒までは，二つの中性子星が合体に向かう途中の波形を表し，その後は形成された重い中性子星の振動による波形を表す．

我々は連星中性子星の合体に最も興味を注いできた．連星中性子星の合体は，強力な重力波源であるとともに，短時間継続のγ線バーストの中心天体の候補でもある．よって，重力波天文学および高エネルギー天体物理学の両方の観点から興味深い現象である．

結論だけ言うと，連星中性子星の合体を完全に一般相対論的に数値計算するのは，十分に精度を向上するという技術的課題を除けば，現在ではさほど難しくはない，というレベルにまで我々は到達している．図1（p. 608 カラー図）にシミュレーションの結果を示した[13]．この例では，中性子星同士が合体し，非常に重い高速回転中性子星が誕生する様子を示した．また図2には，合体に伴って放出される重力波の波形を示した．なお付け加えておくと，合体の様子を長時間安定に完全に一般相対論的に数値計算したのは，世界で我々が初めてである．

大質量回転星のコアの重力崩壊も，一般相対論的にシミュレーションを実行することが可能となっている．この現象を数値計算する上で難しい点の一つは，ダイナミカルレンジが大きいことで

ある．なぜならば，崩壊前には半径が約 2000 km 程度だったのに対して，形成される中性子星の半径が 10 km 程度だからである．格子幅を 1 km にとるとしても単純に一方向 2000 以上の格子数が必要であることが分かる．しかし，軸対称を仮定すれば，2000 程度格子数をとることは VPP5000 を用いれば容易である．その結果このような数値計算も手軽に実行可能になった．図 3（p. 608 カラー図）に重力崩壊の結果，中性子星が形成される様子を示した[6]．衝撃波が遠方に伝播するまで十分に計算が継続されていることが，理解してもらえるであろう．

なお http://esa.c.u-tokyo.ac.jp/~shibata/anim.html に，計算結果の一部に対する簡単な動画を公開している．

5. まとめと国立天文台への期待

数値的相対論は，成熟段階に達しつつある．基本的な部分―アインシュタイン方程式を解く，流体力学方程式を解く―に関しては，ほぼ手法が確立しつつある．ブラックホールが存在しない限りは，大抵の問題に対してシミュレーションは実行可能である．

もっとも，精度を向上したり，より複雑な物理過程（ニュートリノ冷却や磁場の効果）を取り入れるといった課題が残されている．定量的かつ現実的結果を引き出すためには，これらの課題を解決することが必要不可欠である．またブラックホールが形成された場合やはじめから存在する場合に，いかにして計算を長時間継続するのかといった問題も残されている．

精度を向上するために多層格子法のような技法を開発することも必要であるが，最も期待されるのは，より高性能のコンピュータが使用可能になることである．上でも述べたように，数値的相対論で精度の良い定量的結果を得るには，メモリーにして 10 テラバイト，かつ速度にして数十テラフロップスのマシンが望まれる．このようなマシンが，今後国立天文台計算機共同利用センターに導入されることを強く期待する次第である．

参考文献

1) Ando M., et al. (the TAMA collaboration), 2001, Phys. Rev. Lett. 86, 3950
2) Cutler C., Thorne K. S., in *Proceedings of the 16th International Conference on General Relativity and Gravitation,* eds. Bishop N. T., Maharaj S. D. (World Scientific, 2002), p. 72
3) Shibata M., 1999, Phys. Rev. D 60, 104052
4) Shibata M., Uryu K., 2000, Phys. Rev. D 61, 064001
5) Shibata M., Uryu K., 2002, Prog. Theor. Phys. 107, 265
6) Shibata M., 2003, Phys. Rev. D 67, 024033
7) York Jr. J. W., in *Sources of Gravitational Radiation,* ed. Smarr L. (Cambridge University Press, 1979), p. 83
8) Nakamura T., Oohara K., Kojima Y., 1987, Prog. Theor. Phys. (Suppl.) 90, Chapter 1
9) Shibata M., Nakamura T., 1995, Phys. Rev. D 52, 5428
10) Baumgarte, T. W., Shapiro, S. L., 1999, Phys. Rev. D 59, 024007
11) 例えば，Kidder L. E., Scheel M. A., Teukolsky S. A., 2001, Phys. Rev. D 64, 064017
12) Unruh W. が 1984 年にアイデアを提唱した．また以下も参照：Seidel E., Suen W.-M., 1992, Phys. Rev. Lett. 69, 1845
13) Shibata M., Taniguchi K., Uryu K., 2003, Phys. Rev. D, to be published

Numerical Relativity

Masaru Shibata
Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo, Komaba, Tokyo 153–8902, Japan

Abstract: I briefly review the current status in the field of numerical relativity. First, I summarize the reason that this field has been active recently. Secondly, I outline the numerical relativity and review the latest progress in this field. Thirdly, I required the necessary power of the super computers for simulations of certain problems in numerical relativity. Finally, I show the latest results of numerical simulations performed by our group.