軸性ベクトルについて

安　藤　裕　康
〈国立天文台名誉教授　〒181–8588 東京都三鷹市大沢 2–21–1〉
e-mail: ando.hys@nao.ac.jp

角速度ベクトル，角運動量ベクトル，磁場ベクトルなどは軸性ベクトルである．普通のベクトル（極性ベクトル）とほとんど同じ振る舞いをするが，空間反転に対して反転する．これは普通のベクトルとは違った本質をもっているのではないか．ここでその問題を考えてみる．

1.　はじめに

退職後，都内の大学で物理学（力学，電磁気学，解析力学）を講義する機会があった．対象は大学1,2年生である．力学の場合，学期の後半に回転座標系での運動方程式が導かれ，角速度ベクトルが現れる．位置ベクトルと運動量ベクトルとの外積で表現される角運動量ベクトルがでてくる．これらは軸性ベクトル（または擬ベクトル）である．一応教科書に従い，「普通の座標変換に際して不変だが，座標軸の反転（空間反転）に対して向きを反転するベクトルである．これを軸性ベクトルとよび，これまで学んだ位置ベクトルや速度ベクトルは極性ベクトルと呼んで区別している」と説明する．

軸性ベクトルは，あとで説明するように2階の反対称テンソル由来のものなので，空間反転に対してだけ普通のベクトル（1階のテンソル）と違った振る舞いをする．時間もないし煩雑になるので1, 2年の学生にテンソルの説明は省略してしまう．学生は，変わったベクトルだけれど回転を表現するのに便利なツールぐらいに受け止めたようだ．私もそれ以上二つのベクトルの本質の違いを考えることはなかった．

他方,「ベクトルは座標系の取り方によらないものである．そのため，物理法則がベクトルで表現され，ベクトルで式展開される.」と私は教わり，講義でも述べてきた．確かにベクトルを含むテンソルは座標系の取り方によらない．先達の努力で2階の反対称テンソルが軸性ベクトルとして表され，外積の導入によってベクトルの枠内に収められた．実際の教科書では物理法則は極性ベクトルと軸性ベクトルで表現されている．ベクトルの枠内での表現は矛盾しているのだろうか．

基本に立ち返って，座標変換（原点を共有した回転と空間反転）に対する極性ベクトルと軸性ベクトルの振る舞いからそれぞれ何が本質か調べてみた．

2.　空間反転に対する振舞

デカルト座標系を考え，その正規直交基底ベクトルを（$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$）とする．極性ベクトルの例として，質点の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$を考えると，その成分（x_1, x_2, x_3）によって

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$$

で表される．

いま空間反転（右手系から左手系，またはその逆）という座標変換を行い，変換後の座標系の正規直交基底ベクトルを（$\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$），変換後の位置ベクトルの成分を（x'_1, x'_2, x'_3）とすると，正規直交基底ベクトルは（$\boldsymbol{e}'_1=-\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}'_2=-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_3=$

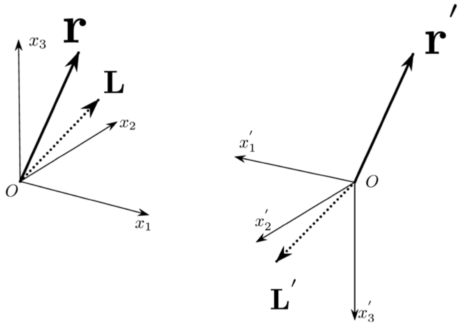

図1　空間反転に対する極性ベクトルと軸性ベクトルの振る舞い．

$-\boldsymbol{e}_3$）と変換され，位置ベクトルの成分は（$x'_1=-x_1, x'_2=-x_2, x'_3=-x_3$）と変換される．そして，変換後の位置ベクトル$\boldsymbol{r}'$は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= x'_1\boldsymbol{e}'_1+x'_2\boldsymbol{e}'_2+x'_3\boldsymbol{e}'_3\\ &=(-x_1)(-\boldsymbol{e}_1)+(-x_2)(-\boldsymbol{e}_2)\\ &\quad+(-x_3)(-\boldsymbol{e}_3)\\ &=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3\\ &=\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

となり，位置ベクトルは空間反転で変わらない．つまりベクトルの空間に対する関係は不変のままである．これを図示すると図1のようになる．

軸性ベクトルはどうであろうか．軸性ベクトルとして角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$を例にとって考えてみる．これは位置ベクトル$\boldsymbol{r}$と運動量ベクトル$\boldsymbol{p}$（その成分を（p_1, p_2, p_3）とする）との外積により$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$で与えられる．位置ベクトルと同じように正規直交基底ベクトルとそれぞれの成分を用いて，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)\times(p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3)\\ &=(x_2p_3-x_3p_2)\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3+(x_3p_1-x_1p_3)\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1\\ &\quad+(x_1p_2-x_2p_1)\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 \qquad (1)\\ &=(x_2p_3-x_3p_2)\boldsymbol{e}_1+(x_3p_1-x_1p_3)\boldsymbol{e}_2\\ &\quad+(x_1p_2-x_2p_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

と表せる．ここで外積の交代性（$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=-\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_i$）と外積のルール（$\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$）を用いた．

ここで空間反転を考える．空間反転後の角運動量ベクトルを$\boldsymbol{L}'$とする．運動量ベクトルも極性ベクトルであることに注意して，変換後の角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}'$は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}'&=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{p}'\\ &=(x'_1\boldsymbol{e}'_1+x'_2\boldsymbol{e}'_2+x'_3\boldsymbol{e}'_3)\\ &\quad\times(p'_1\boldsymbol{e}'_1+p'_2\boldsymbol{e}'_2+p'_3\boldsymbol{e}'_3)\\ &=\{(-x_1)\boldsymbol{e}'_1+(-x_2)\boldsymbol{e}'_2+(-x_3)\boldsymbol{e}'_3\}\\ &\quad\times\{(-p_1)\boldsymbol{e}'_1+(-p_2)\boldsymbol{e}'_2+(-p_3)\boldsymbol{e}'_3\}\\ &=(x_1\boldsymbol{e}'_1+x_2\boldsymbol{e}'_2+x_3\boldsymbol{e}'_3)\\ &\quad\times(p_1\boldsymbol{e}'_1+p_2\boldsymbol{e}'_2+p_3\boldsymbol{e}'_3)\\ &=(x_2p_3-x_3p_2)\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3\\ &\quad+(x_3p_1-x_1p_3)\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{e}'_1\\ &\quad+(x_1p_2-x_2p_1)\boldsymbol{e}'_1\times\boldsymbol{e}'_2 \qquad (2)\end{aligned}$$

となる．変換後の座標系での外積のルールも変換前と同じで，（$\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3=\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_1\times\boldsymbol{e}'_2=\boldsymbol{e}'_3$）となる．これを用いて，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}'&=(x_2p_3-x_3p_2)\boldsymbol{e}'_1+(x_3p_1-x_1p_3)\boldsymbol{e}'_2\\ &\quad+(x_1p_2-x_2p_1)\boldsymbol{e}'_3\\ &=(x_2p_3-x_3p_2)(-\boldsymbol{e}_1)\\ &\quad+(x_3p_1-x_1p_3)(-\boldsymbol{e}_2)\\ &\quad+(x_1p_2-x_2p_1)(-\boldsymbol{e}_3)\\ &=-\{(x_2p_3-x_3p_2)\boldsymbol{e}_1+(x_3p_1-x_1p_3)\boldsymbol{e}_2\\ &\quad+(x_1p_2-x_2p_1)\boldsymbol{e}_3\}\\ &=-\boldsymbol{L} \qquad (3)\end{aligned}$$

となり，角運動量ベクトルは空間に対して反転している（図1）．

これまで具体例で示したが，一般に，空間反転に対して極性ベクトルは不変であるが，軸性ベクトルは反転していることが示されている．

ここで，テンソルでの議論に慣れた読者のために少々補足する．式(1)で$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j$を外積ではなく直積と解釈すれば，この式は2階のテンソル（反対称テンソル）を表した式になる．式(1)と式(2)を比較すれば，この2階のテンソルは空間反転に対してその成分が変化しないことがわかる．軸性ベクトルはこの成分を取り出してベクトルの成分

として表したものなので，軸性ベクトルの成分は空間反転に対して変化しない．また，式(2) において2階のテンソルの基底を空間反転させても，−1が2回でてきて結局基底も変化しないこともすぐ理解できるだろう．結局2階のテンソルは空間反転に対して変化しない．一方，これを軸性ベクトルとして表した場合，2階のテンソルとして表していたときと違ってベクトルの基底は空間反転に対して符号が変わってしまう． これが式(3) の意味である．

3. 軸性ベクトルは何を表しているか

ベクトル（極性ベクトル）は座標系の取り方によらないということで物理法則がベクトルで表現される．実際には軸性ベクトル（擬ベクトル）も物理法則に使われる．物理法則が座標系の取り方によらないために，むしろ軸性ベクトルは空間反転に対し反転するのではないか．この点を調べるため，代表的な教科書[1),2)] をはじめとして手にできる力学の教科書をことごとく読んでみたが，反転の背後にある本質に迫る議論は見当たらなかった．そこで，応用数学の教科書で，「シリーズ新しい応用の数学」の中の，伊理正夫，韓太舜著「ベクトル解析」（東大出版会1977年）（3章擬ベクトル）を調べた[3)]．それによると，線分に大きさと方向と向きをもたせた有向線分を（極性）ベクトル．他方，線分とその周りの“回転の向き”を表すものが存在し，ねじを“回転の向き”に回したときに進む向きを有向線分の向きにしたベクトルを擬ベクトル（軸性ベクトル）と呼んだ．軸性ベクトルはベクトルとは本来違う空間の概念であるが，空間反転を除いて極性ベクトルと同じ振る舞いをし，同じ計算ルールに従うというものである．

これに留意して極性ベクトルと軸性ベクトルの本質について考えてみる．空間反転を含むすべての座標変換に対して極性ベクトルは不変であるから，ベクトルの表す矢印が不変であることがわかる．

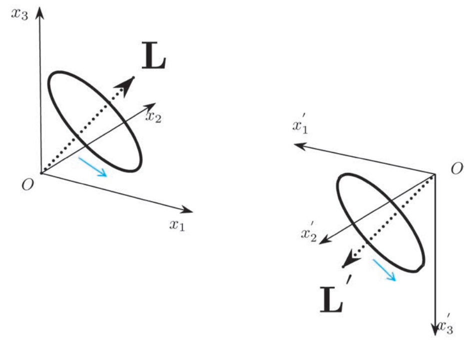

図2 空間反転に対する不変な軸性ベクトルの回転の向き．

軸性ベクトルは連続的な回転という座標変換に対しては極性ベクトルと同じで不変である．したがって軸性ベクトルの表す“回転の向き”はそのような座標変換に対して不変である．

他方，空間反転に際して軸性ベクトルの表す“回転の向き”がどうなるだろうか．例えば，図2の左に示すような右手系で軸性ベクトル$\boldsymbol{L}$が与えられたとする．右ねじを回し，ねじが進む向きをこの軸性ベクトルの矢印に合わせる．そのとき，ねじの“回転の向き”は図2の左に示す青い矢印の向きになる．

次に空間反転した場合には，図2の右に示すように座標系は左手系になってこの軸性ベクトルは反転し，軸性ベクトル$\boldsymbol{L}'$となる．そこで左ねじを回し，ねじが進む向きを軸性ベクトル$\boldsymbol{L}'$の矢印に合わせる．そのとき，ねじの“回転の向き”は図2の右に示す青い矢印の向きになる．

この結果からわかるように，空間反転でベクトルが反転し，このとき座標系の向きも右手系から左手系に（あるいはその逆に）変換されるが，空間に対して“回転の向き”は不変である．つまり，軸性ベクトルは空間反転を含むすべての座標変換に対して矢印ではなく，その“回転の向き”が不変になっている．

以上の考察をまとめると，すべての座標変換に対して極性ベクトルの“矢印の向き”，軸性ベクトルの“回転の向き”がそれぞれ空間に対して不

変であると考えることができる．この意味で極性ベクトルと軸性ベクトルは共に座標系の取り方によらないといえる．したがって，これら二つのベクトルで表現される物理法則は座標系の取り方によらないといえる．

4.　軸性ベクトルと物理量

物理量としての軸性ベクトルはどのようなものがあるだろう．

例で示したように角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$は軸性ベクトルである．質点の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$とその運動量$\boldsymbol{p}$によって，

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$$

で表せる．角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$の本質は，それが表す矢印に垂直な平面内の質点の回転運動であると考える．空間反転に対して角運動量ベクトルの矢印は反転するが，角運動量ベクトルの矢印に垂直な平面内の質点の回転運動の向きは不変になっているからである．

角速度ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$も軸性ベクトルである．このとき位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の先端の質点がもつ速度$\boldsymbol{v}$は，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$

で与えられる．質点は角速度ベクトルの周りに回転（ここでは右手系を考え，右回り）する．空間反転に対して角速度ベクトルの矢印は反転するが，質点の回転運動の向きは不変である．

磁場$\boldsymbol{B}$も軸性ベクトルである．磁場$\boldsymbol{B}$は微分オペレータ∇（ナブラ）とベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$との外積で，

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

で与えられる．微分オペレータ∇は極性ベクトル，ベクトルポテンシャルは電流の作るポテンシャルなので極性ベクトルだからである．

今，円環電流の作る磁場を考えてみる．電流の向きは座標系の取り方によらない．しかし電流によって作られる磁場は，右手系か，左手系かで磁場ベクトルの矢印は反転する．しかし，磁場ベクトルの“回転の向き”は変わらない．この“回転の向き”が電流の向きに重なるのは興味深い．

以上の例でわかるように軸性ベクトルはそれに垂直な平面内の回転運動を表現するツールと考えることもできる．数学では擬ベクトルとの呼称が一般的だが，軸性ベクトルと呼んだほうが物理学では理解しやすい．

もう一つ大切なことを指摘しておく．上記の物理法則の式を見て分かるように，二つの表すものが異なるベクトルを等式で結ぶことはできず，何らかの演算を介する必要がある．加算，減算は同種のベクトル間で成り立つ．外積，内積については次のように両者が混ざり合う．すなわち，

(極性ベクトル)×(極性ベクトル)→(軸性ベクトル)
(軸性ベクトル)×(軸性ベクトル)→(軸性ベクトル)
(極性ベクトル)×(軸性ベクトル)→(極性ベクトル)
(軸性ベクトル)×(極性ベクトル)→(極性ベクトル)

(極性ベクトル)・(極性ベクトル)→(スカラー)
(極性ベクトル)・(軸性ベクトル)→(擬スカラー)
(軸性ベクトル)・(極性ベクトル)→(擬スカラー)
(軸性ベクトル)・(軸性ベクトル)→(スカラー)

というルールである．微分オペレータ∇は極性ベクトルであることに留意すると，電磁場のMaxwell方程式は両者のベクトルが混ざり合った式であり両方のベクトルで表現された典型的な物理法則である．すなわち，

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

である．見事に2種類のベクトルが混ざり合いながらも，結果は同種のベクトルが等式で整然と結びつけられていることが理解できよう．余談だが，もし磁場に対する磁気モノポールが発見され

ればそれは擬スカラーということになる．

5. ま と め

以上まとめると，極性ベクトルの本質は“矢印の向き”で，軸性ベクトルの本質は“回転の向き”であり，これらは座標系の取り方によらず不変である．したがって，これら二つのベクトルで記述された物理法則は座標系の取り方に依存しないといえる．

本稿を終えるにあたって，物理学の教科書について触れておきたい．ほとんどの力学や電磁気学の教科書では軸性ベクトルを計算のツールというとらえ方が色濃く，極性ベクトルと軸性ベクトルの本質的な違いについて書かれていない．両ベクトルの数学的な構造と物理的な意味を理解すれば物理法則をより深く理解でき，物理現象の本質をつかむことができる．そろそろ省かずに説明してもよいのではないか．それによって物理学をより深く，より楽しく理解できると確信している．

最後に，ここで述べた問題についてよりよい考え方をお持ちの読者はここでご紹介いただければ幸いである．

謝 辞

本稿は，現代物理学と現代数学との深い関わりについて林正彦氏とメールで議論していた中から筆者が古典物理学にも数学との関わりがあることを思い出し，その考えをまとめたものである．林氏には，一連の議論およびこの原稿への有益なコメントをいただき感謝いたします．

また，本稿をほぼまとめた頃，水本好彦氏から数学的に厳密にこの問題に取り組んだ教科書[4]を紹介いただいた．しかし，大学前期の学生が理解するには数学の壁が高すぎるので，内容に立ち入らず参考文献に掲げることにする．水本氏には教科書のご紹介と本稿に対する有益なコメントとに感謝いたします．

最後に編集部の滝脇知也氏により本稿の改善について貴重なコメントをいただきました．感謝いたします．

参考文献

1）Goldstein, H., 1950, “Classical Mechanics”, 1st edition,（Addison-Wesley Publishing Company, Inc.）, Chap. 4
2）ランダウ＝リフシッツ著，（広重　徹，恒藤敏彦訳），1969, 場の古典論　増訂新版，（東京図書），第1章
3）伊理正夫，韓太舜　共著，1977，シリーズ新しい応用の数学1-1ベクトルとテンソル第1部ベクトル解析（教育出版），第3章
4）有馬哲，浅枝陽　共著，1987，ベクトル場と電磁場，（東京図書），第4章

Nature of Axial Vector

Hiroyasu Ando
Emeritus Professor, National Astronomical Observatory, 2–21–1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181–8588, Japan

Abstract: Angular velocity vector, angular momentum vector, and magnetic intensity vector are axial vectors. They behave as a usual vector（polar vector）under proper rotations, but they are inverted under space inversion. We guess axial vectors have a different nature from usual vectors. Here we are going to investigate this point.