天体力学における計算機による数式処理

木　下　　　宙*

電子計算機の出現によって天体力学者の寿命はのび，天体力学の様相がかわった．厖大な数値計算から解放され，また一種の実験が行なえるようになった．その一例としてコーヘン(Cohen)が行なった冥王星の約12万年にわたる数値積分があげられるであろう．冥王星の軌道と海王星の軌道は交差していて，衝突の可能性がある．しかし数値積分によって冥王星と海王星は一種の秤動を行ない，衝突をさけるように運動していることがわかった．この数値実験は，この秤動の理論的究明へと天体力学者をかりたてた．また計算機によって，制限三体問題の種々の周期解が発見され，周期解の解析的研究が一段と進んだ．このような数値実験と理論的研究の二人三脚は，天体力学ばかりでなく他の自然科学でも使われる有力な研究方法となった．ここでは計算機の単なる数値計算，数値実験的利用でなく，数式処理を電子計算機で行なう試みについて述べる．

天体力学の大きな攻撃手段として摂動論がある．摂動論では，まず摂動函数の展開という非常に労力のいる計算が前準備として必要であり，さらにその展開された摂動函数に対する代数的演算ならびに微分，積分という操作が必要である．このような操作は人手でやるには非常に面倒であるが，計算の方針がきまれば後は機械的な計算ばかりである．従って，このような計算を電子計算機で行なえないかということが1958年にコロンビア大学で開かれた天体力学会議で検討された．その当時やっとフォートラン(FŌRTRAN)，アルゴル(ALGOL)などの数値計算用の言語が現われたばかりで，計算機の速さも遅く，内部記憶の容量も少なかったので，その会議で例えばドロネーの月運動論の計算を行なうプログラムを作るには約200人年（1人でやれば200年，10人でやれば20年）の努力がいるであろうと見積られ，この試みはその当時としては，ほぼ絶望的であった．しかし，それ以後10年間のハードウェア(計算機内部に使用されている電子回路)，ソフトウェア(計算機を操作，使用するときに用いるプログラム)の発達にはめざましいものがある．現在利用できる最大の計算機のスピード，容量は約10年前の約100倍にも達している．ソフトウェアの面でも，非数値的処理を行なう種々の言語がアメリカを中心に開発された．これらの言語は，リスト処理用言語と記号処理用言語に大きくわけられ，前者では LISP, IPL-5 が，後者では SNOBOL が有名である．これらハードウェア，ソフトウェアの発達が数式処理を行なうプログラムや，数式処理用言語の出現をうながした．

今まで発表されている電子計算機で数式処理をやらせているプログラムには，ある特殊の目的のためにアッセンブラ言語や，数値計算用言語であるフォートランやアルゴルで書かれているものと，数式処理用言語を用いて書かれたものとがある．以下，例をあげて説明していこう．　天体力学で最初に，ある種の数式を処理するプログラムを書いたのはハーゲットとミューゼン(Herget and Musen)であろう(1959)．彼等のプログラムは

$$N\times x_1{}^{j_1}x_2{}^{j_2}\cdots\cdots x^{j_k}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(i_1y_1+i_2y_2+\cdots\cdots+i_ny_n) \quad (1)$$

なる形を持つ三角級数の加減乗を行なう．係数 N の計算は浮動小数点演算で行ない，級数の掛算をやるときには計算結果をいちいちカードに出力し，更にそのカードを読み込んで計算を進めている．使用した計算機は内部記憶装置として磁気ドラムを持っている IBM650 である．容量が小さいので上記のようにカードを中心にして計算を進めていくのは無理もないが，この方法で摂動函数の展開等を行うのは困難であったろう．彼等はこのプログラムを使って，ベッセル函数 $J_k(ie)$ を計算し，更に楕円運動における $\frac{a}{r}$, $\left(\frac{a}{r}\right)^2$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3$, $\cos f$, $\sin f$, $\cos 2f$, $\sin 2f$, $\frac{r}{a}$, $\left(\frac{r}{a}\right)^2$, $\cos E$, $\sin E$ を展開したものを発表しているが，浮動小数点演算のため，あまり実用的でない．しかし(1)の形の式の演算を計算機でやらせた試みは先駆的意義がある．

1965年ヤルナガン(Jarnagan)はアメリカ海軍天文台の計算機 NORC を使って，ケーレイのテーブル(Cayley's Tables)を計算した．ケーレイのテーブルとは二体問題の楕円運動において，

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nf$$

を離心率 e で展開したときの係数である．ヤルナガンは(1)の形の三角級数を順次かけあわせて，m について -14 から 13，n について 0 から 13，とくに $n=0$ については，m は -20 から 20 まで，e の 20 次まで計算した．演算はすべて有理演算で行なっている．高次の係数には分子，分母とも10進で約30桁に近い数があらわれている．

---

* 東京天文台

H. Kinoshita: Formula manipulations on Computers in Celestial Mechanics

(1) の形の三角級数の加減乗，微分，積分等を行なう一般的プログラムは1966年から1967年にかけて，イギリスのバートン(Barton)，フランスのコワレフスキー(Kovalevsky)，シャプロン(Chapront) 達が開発した．彼等のプログラムも，ハーゲットやヤルナガンと同様に，彼等が使った計算機固有のアッセンブラ言語で書かれている．バートンは，このプログラムを使って月運動論の摂動函数を6次まで2分，8次まで7分，10次まで50分でやってのけた．さらにこの展用された摂動函数を使って，ドロネーが約20年かかって計算した正準変換を求めつつあり，近日中に発表されるであろう．(バートン達の仕事については先月号の畑中氏の記事を参照)．

1964年アメリカのイザック(Izsack)は，軌道が互いに交わらないような惑星運動論における摂動函数をケプラーの要素で展開するときに必要なニューカムの作用素を計算した．ニューカムの作用素 $X^{n,k}_{\rho,\sigma}$ は ρ と σ にある整数値を与えると，n と k の2変数についての有理係数を持った有限次の多項式である．ニューカム自身は8次($\rho+\sigma=8$) までしか計算していない．彼は n と k についての多項式の係数を2次元配列で表現して，それに対する加減乗の操作を行なうプログラムを FŌRTRAN II で書いた．このプログラムで原理的に何次まででも作用素は求められるが，容量と係数のオーバーフローのため16次($\rho+\sigma=16$) ぐらいまでしか求められない．イザックは IBM 709 を使って，10次までの結果を発表しているが，どれくらい計算時間がかかったかについては何も述べていない．筆者が HITAC5020E で同じ計算をやった経験でいうと，入出力の時間を除いて10次までの計算時間は約10秒であった．FŌPTRAN はアッセンブラ言語と違って計算機と独立した言語なので，プログラムを作る時間は零で，ただイザックの書いたプログラムをカードにパンチするだけである．イザックは更に，このニューカム作用素のプログラムとラプラス係数のプログラムを合わせ用いて惑星運動論の摂動函数を計算するプログラムを FŌRTRAN II で書いた(1966)．彼はこのプログラムを用いて，海王星を発見したルヴェリエが土星と木星の摂動函数を離心率と軌道傾斜角について6次まで求めパリ天文台報に21頁にわたって発表した計算を，IBM7094 で約1分ばかりで実行した．東京天文台の古在由秀氏はイザックほど一般的ではないが，イザックの計算結果を利用して，小惑星の摂動函数を求め，平均運動が木星と共約関係にある小惑星の周期解を求めた．

今まで紹介してきたプログラムは，ケーレイテーブルの計算，ニューカムの作用素の計算，(1) の形の三角級数の処理という特殊目的のために作られたものであるために，他の形の数式を処理しようと思うとプログラムはすべて最初から書かなければならない．次に1963年頃から現われ出してきた総合的に数式処理を行なうシステムを紹介しよう．特に注目すべきものに，ベル研究所の人々が開発した ALPAK と，サメット女史(Sammet)を中心に開発された IBM の FŌRMAC がある．

ALPAK は1963年に多項式処理を目的としてベル研究所のブラウン，ハイドとタグー (Brown, Hyde and Tague) 達によって開発された．IBM7090 用に作られてはいるが，言葉自身と，その概念は機械に依存していない．ALPAK で行なえる主な操作は，多項式の加，減，乗，除(除算は可能な時だけ)，代入，微分，多項式が零かどうかのテスト，2つの多項式が等しいかどうかのテストである．ALPAK は約8000項を内部記憶で処理できる．ALPAK では多項式，例えば $3x^2+2xyz-5yz^2$ は

第1図 ALPAK による $R=P+\partial Q/\partial Y$ の計算プログラム

	PŌLBEG	1000 ・・・・・・・・	POLBEG は頭書．1000語このプログラムのため保留せよ．
	VARTYP	NAM ・・・・・・・・	微分，代入を行なうときの前準備．
FMT	PŌLCVF	(X, 12, Y, 12, Z,12 ・・	X, Y, Z の指数部に各々ビット使うことを宣言．
	PŌLRDP	P, FMT ・・・・・	P を FMT の仕様によって読み込んで P を印刷．
	PŌLRDP	Q, FMT ・・・・・	を FMT の仕様によって読み込んで Q を印刷．
	PŌLDIF	DQDY, Q, Y ・・	DQDY=∂Q/∂Y
	PŌLADD	R, P, DQDY ・・・	R=P+DQDY
	PŌLPRT	R, −, (R=R+DQ/DY)	R=P+DQ/DY を印刷して3行あけて多項式 R を印刷．
	TRA	ENDJŌB ・・・・	仕事の終りを示す．
P	PZE	・・・・	多項式 P を定義．
Q	PZE	・・・・	多項式 Q を定義．
R	PZE	・・・・	多項式 R を定義．

3	2,	0,	0
2	1,	1,	1
−5	0,	1,	2
0			

と表現される．多項式の係数は整数で10進法で約10桁に制限されている．しかし ALPAK では係数の計算の部分はすべてマクロ命令でかかれているので，有理数演算や多重精度演算をやりたいときには，マクロ命令の中身だけを変更すればよい．ALPAK では多項式を係数と指数の数値を，ある規則に従ってならべた数値のかたまりとして取り扱うため，内部記憶も節約できて，計算のスピードも早い．第1図に例として $R=P+\partial Q/\partial Y$ を計算するプログラムを示す．

ALPAK は相当の能力を持ちながらもベル研究所の人々によって使われているだけで天体力学の研究に利用されたという話を今までのところ聞いていない．ALPAK を使うには，ALPAK 言語のほかに IBM7090 用のアッセンブラ言語 FAP を縦横に駆使できないと使いにくいというのも他の所で使われていない原因の一つであろう．この使いにくさを除くため，ベル研究所では FŌRTRAN の中で FŌRTRAN 流の書き方で多項式処理ができるコンパイラー ALTRAN を 1966 年に開発した．このような多項式処理システムを作るのにどれだけの時間と人力がかかったかという事はこれからこのようなシステムを作る上で参考になるであろう．

ALPAK	6.5人年（1人でやれば6.5年）
ALPAK B	2.5人年
ALTRAN	0.5人年

ALPAK B は ALPAK の改良と拡張されたものである．更にベル研究所は，多目的コンパイラー PL/I の中で多項式処理できるコンパイラー ALPAK C の開発を IBM より請負ったので近い将来日本でも利用できるようになるであろう．

日本では 1961 年に東北大の遠藤氏らによって有理係数多項式の計算プログラムが発表されているが，筆者はその内容をよく知らない．今年（1668）東京天文台の平山智啓氏が ALPAK の機能を制限した，整数係数多項式処理プログラムを OKITAC5090 用のアッセンブラ言語 SIP で書いた．平山氏はこのプログラムを用いて，後で述べるラグランジュの係数を計算した．筆者はこれに小さな改良として有理係数多項式が取り扱えるようにした．これを使ってルジャンドルの陪函数を三角函数で表現することを試みているがまだうまくいっていない．同じ試みを東京天文台の田中千恵氏が 1967 年にアルゴルで行ない岩波の数学公式集IIの間違いを数ケ所発見された．高次の陪函数の係数の計算は普通にやっているとオーバフローしてしまうため，特種なテクニックを使ってオーバフローが起きないようにしている．

今まで述べてきた ALPAK の多項式処理，バートン，コワレフスキー達の三角級数の処理システムは，多項式，三角級数を係数，指数，角変数の係数の数値のまとまりとして表現して，そのまとまりに対して種々の操作を行なうシステムである．このようなシステムに対して，数式を，数，変数名，演算記号，括弧等の記号のまとまりとした表現して，そのまとまりに対して操作を行なう一種の記号処理システムとしての一般的な数式処理システムは IBM のサメット女史を中心として 1962 年頃から開発に着手され，1965 年から実用段階に入った．この言語は Fōrmula Manipulation Compliler の始めの文字をとって，FŌRMAC となづけられた．FŌRMAC は FŌRTRAN のスーパーセット(Superset)であって，FŌRTRAN IV のステートメント（命令を記述するもの）はFŌRMAC のステートメントと一緒に使える．従って FŌRTRAN になれている者は FŌRMAC を数日で習得できるであろう．FŌRMAC は始め IBM7090 と 7094 用に作られたが現在では 360 シリーズ で PL/I とともに使えるようになった．

FŌRMAC の主な宣言と命令を次に示す．

宣 言

ATŌMIC	記号として取り扱うべき変数名であることを示す．
DEPEND	ある変数が他の変数の函数であることを示す．
SYMARG	FŌRMACプログラムの先頭におく頭書．サブルーチンのときにはFŌRMAC変数としての引数の宣言をする．
PARAM	EVAL と SUBST ステートメントにおけるパラメータの対を宣言する．

命 令

LET	指定された式の表現を作れ．
SUBST	式の中の変数に定数または他の変数または式を代入せよ．
EXPAND	式中の括弧をとりされ．
COEFF	変数またはその幅の係数を求めよ．
ORDER	式を指定された順序にならべかえよ．
PART	式を項，因子，指数に分離せよ．
EVAL	式中の変数に数値を代入してその値を求めよ．

FŌRMAC によるプログラム例を第2図と第3図に示す．第2図は微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=t^2-x^2$ を初期条件 $t=0$, $x=1$ で，x を t の幅級数で解を求めるプログラムである．この微分方程式はリカッチ型の微分方程式で求積法では解けない．第3図はラプラスの方法による軌道決定

にでてくる f, g の計算プログラムである. f, g は次の漸化式で与えられる.

$$f_n=\dot{f}_{n-1}-\mu\, g_{n-1},$$
$$g_n=f_{n-1}+\dot{g}_{n+1},$$

ただし
$$\dot{\mu}=-3\mu\sigma,$$
$$\dot{\sigma}=\varepsilon-2\sigma^2,$$
$$\dot{\varepsilon}=-2\sigma\varepsilon-\mu\sigma$$

で初期値は $f_1=0$, $g_1=1$ である. この f_n, g_n を μ, σ, ε の多項式で表わす. スコンツオ(Sconzo) は 1965 年に IBM 7094 電子計算機を使って, $n=27$ まで 18.67 分, $n=12$ まで 58 秒で計算した. $n=13$ から整数計算ではオーバフローするので浮動小数点演算で計算している. 東京天文台の平山智啓氏は, 同じ計算を彼が作った ALPAK 的プログラムと OKITAC5090 を用いて, $n=22$ までの結果を約 4 分で得た. OKITAC5090 は IBM7094 より約 100 倍演算時間遅いが, 上記のように約 4 分で終ったのは, FŌRMAC が数式を記号のまとまりとして取り扱い, また ALPAK で扱えない数式を取り扱え, より高度の機能を持った大規模なシステムだからである. ちなみに ALPAK でできる計算を FŌRMAC でやらせると約 10 倍くらい時間がかかるようである. しかしプログラム作成は EŌRMAC の方がより容易である.

スコンツオは三体問題の解を, 独立変数 t の巾級数に展開し, の巾の係数を, 初期条件と三体の質量の函数として求めるプログラムを FŌRMAC で書いた(1967).

FŌRMAC を摂動論に応用したという話は今までのところ聞いていない. 筆者は FŌRMAC による摂動論が有効であるかどうかを調べるために次のハミルトハアンを持つ非線型振動を FŌRMAC で解いてみた.

$$H=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\alpha x^4,$$

第 3 項が非線型項で, この項を摂動と考える. 4 次までの永年摂動を求めるのに約 8 分かかった. このような問題でさえ 8 分かかるのでドロネーの月運動論を FŌRMAC で実行すると IBM360 シリーズでも相当時間をくうであろう. 更に前にも述べたように FŌRMAC では数式を記号のかたまりとして表現するために, ALPAK 等の数値のかたまりとして表現するより, 一概にはいえないが, 5, 6 倍記憶容量を必要とする. 従って, ドロネーの月運動論のように (1) の形の項を何百項も持った三角級数を FŌRMAC で扱うと内部記憶はパンクするであろう. 更に三角級数の掛算の際にでてくる $\sin^2\theta+\cos^2\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ 等の取り扱いに問題がある. 当然, 前者は 1, 後者は $1/2\sin 2\theta$ に変換しないと計算は続行できない. しかし, $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ と 1, $\sin\theta\cos\theta$ と $1/2\sin 2\theta$ の同等性を判断するのは一種のパターン認識の機能が必要となり現在の FŌRMAC ではこの機能を持っていない. 従って上記の非線型振動の問題を取り扱う際には, $\cos\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2$, $\sin\theta=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i$, $e^{i\theta}=u$ とおき, 三角函数を u と虚数単位 i の多項式に変換して計算した. このように計算機のスピード, 記憶容量, FŌRMAC での三角函数の取り扱いにくさから考えて, 今のところ FŌRMAC で摂動論を行なうのは時期尚早であろう. この状況は約 10 年前と似ているが, ハードウェア, ソフトウェアの発達は以前にもましてすばらしいので 10 年を待たずして, 上記の問題点は解決されるであろう.

しかしながら, ドロネーの月運動論のように小さなパラメータすべてについて摂動函数を展開し, 多項式を係数に持つ三角級数だけ取り扱えればよいならば, FŌRMAC のような一般的な数式処理システムよりは, バートン, コワレフスキー達のような単目的のシステムの方が, 計算時間, 記憶容量の面からいっても有効である.

第 2 図　微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=t^2-x^2$ を FŌRMAC で解くプログラム

	SYMARG	
	ATŌMIC EX, T	
	DEPEND (EX, T)	・・・・・・・・・・・・・・ EX は T の函数であることを宣言.
	LET X=1−T	
	LET F=X ** 2−EX ** 2	
	DŌ 10 1=2, 50	
	LET D=FMCDIF (F, T, 1)	・・・・・・・・・ F を T で 1 回微分し, その結果を D とせよ.
	LET F=SUBSTD, (FMCDIF (EX, 1), T ** 2−EX ** 2)	・・・ D の中にでてくる dEX/dT を T²−EX² でおきかえたものを F とせよ.
	LFT C=EVAL F, (T, 0), (EX, 1)	・・・・ F に T=0, EX=1 を代入して計算しその結果を C に入れよ.
	LET X=X+C * T ** I/FMCFAC (I)	・・・ X=X+C * T$^{\mathrm{I}}$/I !
10	CŌNTINUE	

第3図 f と g の FŌRMAC による計算

```
         SYMARG
         DIMENSIŌN F (100), G (100)
C        FŌRMAC DATA DECLARATIŌNS
         ATŌMIC MU, SIGMA, EPSI, T
         DEPEND (MU, SIGMA, EPSI/T)
         LET F (1)=1.
         LET G (1)=0
         DŌ 13 I=1, 100
C        CŌDE TŌ GENERATE F (I+1) AND G (I+1) FRŌM F (I) AND G (I).
         LET F (I+1)=SUBST FMCDIF (F (I), T, 1)-MU * G (I), LIST
         LET F (I+1)=EXPAND F (I+1)
         LET G (I+1)=SUBST (FMCDIF (G (I), T, 1)+F (I)), LIST
         LET G (I+1)=EXPAND G (I+1)
    LIST PARAM (FMCDIF (MU, T, 1), -3. * MU * SIGMA), (FMCCDIF (SIGMA, T, 1),
        1 EPSI    -2. * SIGMA ** 2), (FMCDIF (EPSI, T, 1), -SIGMA* MU—2. * SIGMA * EPSI)
    13   CŌNTINUE
```

多項式を係数に持つ三角級数処理システムを作るさいのむつかしい点は，三角函数の積を和に直す変換，時間について積分するときの割算，高次になるにしたがって係数が爆発的に大きくなる点等がある．更に，このようなシステムを作るには，FŌRTRAN や Algol のように計算機と独立した言語では不可能であって，各々の計算機固有のアッセンブラ言語で書かなければならない．アッセンブラ言語も FŌRTRAN のように規格統一されるのが望まれる．

計算機によって人間は面倒な数値計算から解放されたように，近い将来，より面倒な数式計算からも解放されるであろう．岡潔の言葉を借りれば，大脳側頭葉の行なう仕事はすべて計算機が行なうようになり，人間は大脳前頭葉だけ使えばよいようになるであろう．