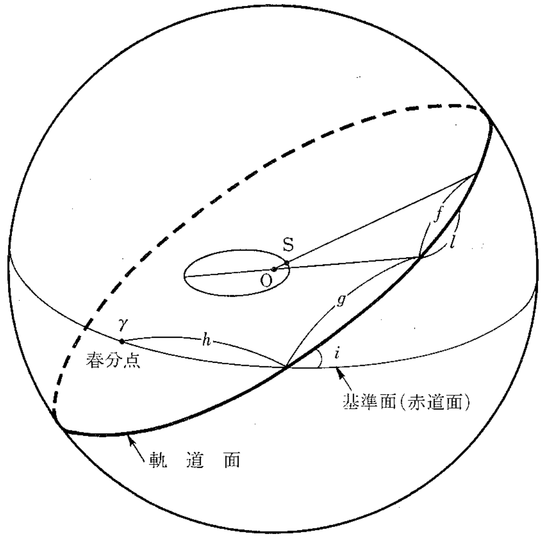
24時間衛星と剛体の自由回転

木　下　　宙*

1957年10月4日ソ連が最初の人工衛星スプートニク1号を打上げて以来，1971年9月28日の「しんせい」まで含めて約1,300個の人工天体が地球から飛び立った．この中には，金星，火星に到達した人工惑星や，木星に接近し宇宙人へのメッセージをつんだパイオニア10号もあるが，大部分の人工天体は，地球のまわりをかけめぐる人工衛星である．題名をみて静止衛星の姿勢の話かと思われる読者がおられるかもしれないが，実は，24時間で地球のまわりをまわる人工衛星の運動と，3軸不等の剛体の自由回転の間に，ある種の対応があることについて述べる．

まず地球のまわりをまわる人工衛星の運動を考えよう．地球が球だと人工衛星には距離の自乗に逆比例する力が働らく．これは2体問題と呼ばれていて，完全にとける．軌道の形は地球の重心を焦点とする2次曲線であって，人工衛星の全エネルギー（位置エネルギー＋運動エネルギー）の負，零，正によって楕円，放物線，双曲線となる．楕円運動（ケプラー運動という）の場合には，軌道の長半径の3乗を周期の2乗でわったものは定数となる．これはケプラーの第3法則と呼ばれている．ある時間を与えて人工衛星の位置を示すには6つの量が必要となる．この6つの量として，通常ケプラーの要素というものが良く使われる（第1図参照）．すなわち昇交点経度 h（基準面と軌道面の交点の経度），軌道傾斜角 i，近地点引数 g（昇交点から近地点までの角距離），楕円の長半径 a，離心率 e と平均近点離角 l（人工衛星が天球上を一様に動いたときの近地点からはかった角距離）である．h と i が軌道面を，g が近地点の方向を，a と e が楕円の形を，l が楕円上の位置を決める．基準面として赤道面が普通使われている．h と i が定数なので，2体問題としたときの人工衛星は定平面上を動く．これは中心力の特徴であって，力が何も逆自乗でなくてもよい．しかし g も定数というのは逆自乗力の大きな特色である．力が中心力であっても，逆自乗力でないと，一般には g は動く（距離に比例する力の場合も g は動かない）．角変数 l 以外の角変数 g と h が定数である運動は完全縮退しているという．完全縮退という意味で，2体問題は非常に特異な運動であるともいえる．ケプラー要素の他にもいろいろな要素があり，問題に応じて使いわけられている．解析的取扱いには良くドローネー要素が用いられる．ドローネー要素では，a, e, i のかわりに，l, g と h に正準共役な運動量（作用変数または断熱不変量）を使う．



第1図　ケプラー要素

h: 昇交点経度　　g: 近地点引数
i: 軌道傾斜角　　l: 平均近点離角
f: 真近点離角

実際の地球は完全な球ではなく，赤道部がわずかにふくらんでいる回転楕円体に近い．すると人工衛星に働く力は逆自乗でなくなり，人工衛星の運動はケプラー運動からはずれ，g か h が動き出す．すなわち縮退がとける．球に近い物体のポテンシャルは球面調和函数で展開され，その係数は地球の物質分布に依存している．球面調和函数は帯球函数 (zonal harmonics) と方球函数 (tesseral harmonics) にわけられ，前者は軸対称に，後者は軸対称からのはずれに対応している．さらに，この中で奇数次の調和函数は赤道面対称からのはずれを示している．2次の帯球函数による部分が最も大きく，逆自乗力を生み出すポテンシャルの約 1/1000 である．これは赤道上での比較である．この部分は普通 J_2 項と呼ばれている．その他のものは J_2 項より更に千倍も小さい．

* 東京天文台
Hiroshi Kinoshita: 24-hour Satellite and Free Rotation of Rigid Body

逆自乗力に J_2 項による力を含めた問題を主問題 (main problem)といい，人工衛星が打上げられてから，多くの人々によって研究された．J_2 項は軸対称なので，系の自由度は２となるが，特殊解をのぞいて，一般的にはとけない．しかし J_2 項は小さいので，ケプラー運動を 0 次の解とし，J_2 項を摂動として取扱い，摂動論を用いると運動の概要はつかめる．

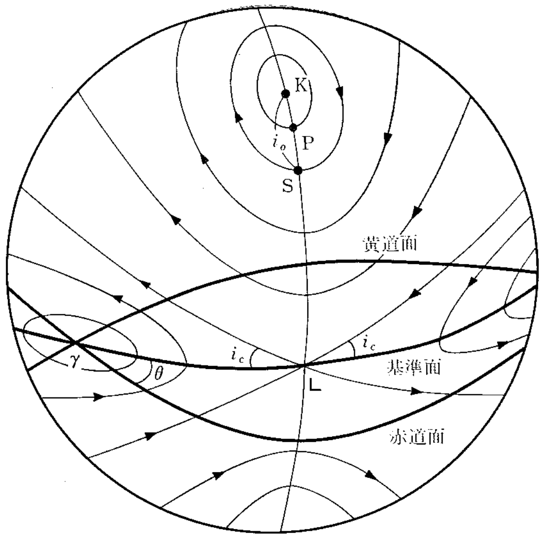
摂動がなかったとき定数であったものが，摂動が加わると変化する．この変化するもののうち，時間とともに一方的に増加または減少する項を永年項，周期的に変動するものを周期項という．永年項は係数がどんなに小さくても時間とともにいくらでも大きくなり得るので，最も重要な項である．周期項の大きさは，おおざっぱにいって，その項の周期に比例する．したがってより長周期の項ほど変化が大きくなる．それゆえ摂動論では，周期項を短周期項と長周期項とにわけて別々に取扱い，長時間の運動を議論する場合には，長周期項だけとり出せばよい．短周期項は，うねりに乗っかっているさざ波のようなものである．

主問題においては，a，e と i には永年項はなく，g と h には永年項があらわれる．このことは力学系が多重周期系であることをアプリオリに仮定すればあたりまえのことである．さらに解は形式的に３角級数で表現される．力学系が多重周期系であるかどうか，３角級数が収束するかどうか，は数学的にむつかしい問題である．a，e と i に永年項が入ってこないようにする摂動論としては，正準変換を用いて周期項を消去する方法が有効である．このとき変数の採用に注意しないと混合永年項 (時間×周期項) がみかけ上あらわれることがある．この周期項を消去するということは，系の作用変数，角変数をもとめていることに対応している．系が多重周期系であると仮定することと作用変数の存在を仮定することとは同じことからもうなずける．

上に述べたようなことは，保存系についていえることであって，エネルギーの散逸がある場合にはあてはまらない．空気の抵抗がある場合には，a も e も i も減少し，人工衛星は地球に衝突，というより大気中で燃えつきてしまう．i が減少するのは，大気が地球の自転によって運動し，人工衛星の進行方向以外からも大気の抵抗が作用するからである．

さて，昇交点経度 h と近地点引数 g の運動を少しくわしくみてみよう．h と g の永年変化は次式で与えられる．

$$\Delta h=\left(-\frac{3}{2}\frac{J_2}{p^2}n\cos i\right)t,$$

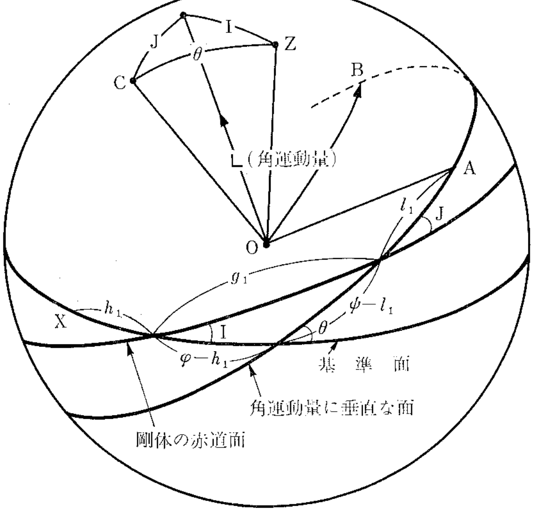


第２図　軌道面の極の軌跡
P: 天の北極，　S: 人工衛星の軌道面の極

$$\Delta g=\left\{\frac{3}{2}\frac{J_2}{p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right\}t \qquad (1)$$

上式において J_2 は２次の調和項の係数，n は平均運動 ($2\pi/T$: T は周期)，$p=a(1-e^2)$ である．h は傾斜角の大きさによらず逆行（時計まわり）し，g は i が小さいときは順行し，ある程度大きくなると逆行する．ちょうど $i=63^\circ\!.4$ のときが順行，逆行のさかいめである．この角度を臨界傾斜角という．ちょうど i が臨界傾斜角と一致したとき近地点は動かない．ちょっとでも臨界傾斜角からはずれると (1) 式は g が一方的に動くことを示しているが，実はこの式は臨界傾斜角の近傍では成立しないのである．くわしい理論によると g は臨界傾斜角の近傍で秤動することがわかる．角距離をあらわす変数が一方的に変化することをサーキュレーションという．しかし g に対応する角変数は臨界傾斜角の近傍でもサーキュレーションしている．これは角変数の意味から考えても当然である．接触要素が，初期条件の違いによって秤動したり，サーキュレーションすることはよくあることであることである．振子がその簡単な例である．「しんせい」の要素は，$a=1.22$ (赤道半径を単位), $e=0.065$, $i=32^\circ$ である．約２時間で「しんせい」は地球のまわりを１回転し，h は逆行し 83 日で，g は順行し 54 日で天球上を１周する．

人工衛星の長半径が大きくなる，すなわち公転周期が長くなると今まで無視してきた月と太陽の影響がきき出してくる．月と太陽による引力は，地球にも作用するので，人工衛星には潮汐力として作用する．長半径が赤道



第３図　オイラーの角とアンドワイアー変数

半径の6.61倍，すなわち公転周期が１日の衛星では，地球の J_2 項，月と太陽の摂動は同じ程度の大きさとなる．月と太陽の摂動は周期的な外力として働き，その基本周期は月と太陽の公転周期の１月と１年，月の軌道面が黄道面に対して約 5° 傾いて回転する周期の 18.6 年である．24時間衛星だと J_2 項による g と h は約70年で天球上を１周するので，１日，１月，１年，18.6年は短周期とみなしてよい．短周期項を消去すると自由度は２となる．離心率が小さいとして，離心率による項を方程式から捨てると自由度は１となる．以下，上のようなことを仮定して話を進める．運動方程式は

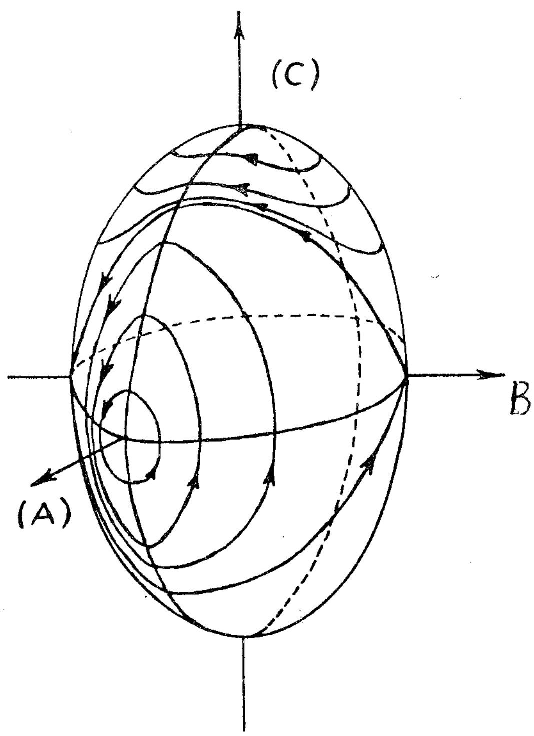
$$\begin{cases} \dfrac{dh'}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial H'}, \quad \dfrac{dH'}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial h'} \\ F=\dfrac{1}{2}C_1G^2\sin^2 i'\cos^2 h'+\dfrac{1}{2}C_2G^2\cos^2 i' \\ H'=G\cos i' \end{cases} \qquad (2)$$

となる．F はハミルトニアンである．C_1, C_2, G は人工衛星，月，太陽の長半径，地球，月，太陽の質量，黄道面傾斜角 ε（$\varepsilon=23°.5$），月の軌道と黄道面の交角に依存する量であって定数である．基準面として，春分点を通って赤道面に対して $\theta=6°.8$ 傾いた面をえらんである（第２図参照）．これはあとで述べる剛体の自由回転と対応ずけるときのためと，運動方程式が簡単になるためである．この θ は人工衛星の長半径に依存し，長半径が小さくなると J_2 項が月と太陽の摂動よりはるかに大きくなるので θ は小さくなり，基準面は赤道面に近づく．逆に長半径が大きくなると，J_2 項による摂動が月と太陽による摂動より相対的に小さくなるため，基準面は黄道面に近づく．(2)式の中の h', i' はこの基準面に準拠した昇交点経度と軌道傾斜角である，ハミルトニアン F は時間を陽に含んでいないので運動の積分となる．したがって運動方程式を解かなくても，i' と h' の関係はわかる．しかし時間と結びつけるには方程式を解かなければならない．第２図は人工衛星の軌道面の極（地球の中心を通って軌道面にたてた垂線が天球と交わる点）の軌跡を天球上に描いたものである．

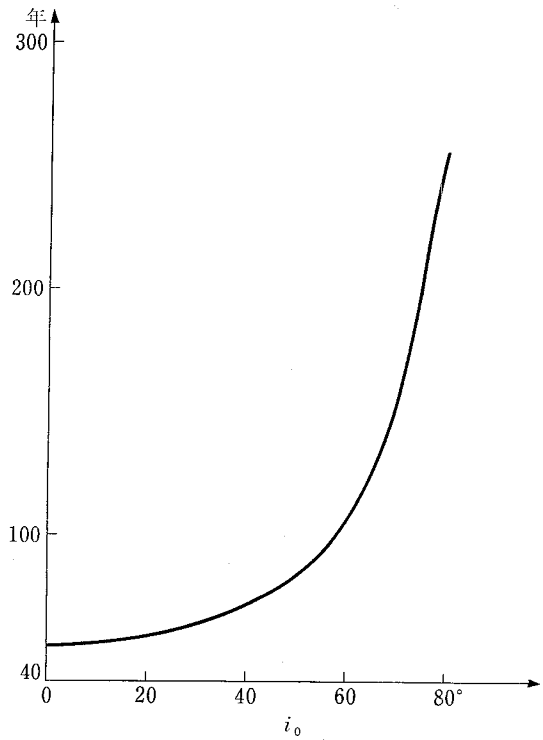
第２図の説明に入る前に３軸不等の剛体の自由回転について少し述べてみよう．剛体の運動の記述には普通オイラーの角（φ, θ, ϕ）（第３図参照）がもちいられているが，方程式が非常に複雑となり見通しがよくない．オイラーの角のかわりにアンドワイアーの変数（l_1, g_1, h_1, I, J）を用いると，自由回転のハミルトニアン F は

$$F=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l_1}{A}+\frac{\cos^2 l_1}{B}\right)G^2\sin^2 J+\frac{1}{2C}G^2\cos^2 J \qquad (3)$$

となる．A, B, C は剛体の主慣性能率である．F には g_1 と h_1 が含まれていないので自由度は１であり，さらに h_1 に正準共役な H も含まれていないので１重だけ縮退している．自由回転においては外力によるトルクがないので角運動量は保存され，大きさも向きも一定である（ハミルトニアンに h_1 と g_1 が含まれていないことに対応している）．形状軸の向きが角運動量の向きと一



第４図　主慣性楕円体上での瞬間回転軸の軌跡



第5図　i_0 と軌道面の回転の周期の関係

致していないと，自由章動と呼ばれている運動がおこり，形状軸は角運動量軸のまわりを回転する．第4図に，慣性楕円体と瞬間回転軸の交点の軌跡を図示した．主慣性能率 A，B，C の差が小さいときには，角運動量軸と瞬間回転軸は非常に接近しているので，第4図は角運動量軸の軌跡と本質的な差はないとみてよい．

第2図と第4図を見くらべてみると両者の運動が似ていることが，おわかりいただけるであろう．これは式の上でもいえることで，(2) と (3) 式を比較すると，B が $1/C_1$ に，C が $1/C_2$ に，A が ∞ に，l_1 が h' に，J が i' に対応している．すなわち物体に固定した座標系でみた角運動量軸の運動に，人工衛星の軌道面の極の運動が対応しているのである．主慣性能率 A が無限大となるような剛体は物理的に存在しないが，A は方程式上では単なるパラメータにすぎないので形式的に無限大としても数学的には何らおかしいことはおこらない．したがって剛体の自由回転の知識が，衛星の軌道面の運動へ応用できる．

さて第2図にもどろう．Kは基準面の極，Pは天の北極，Lは春分点 γ から 90° 離れた点である．点K，γ，Lと中心をはさんでむこう側の点も平衡点である．図からあきらかなように点 K と γ は安定な平衡点であり，Lは不安定な平衡点である．L点を通る軌跡はセパラトリックスと呼ばれ，基準面に対して $i_c=20\overset{\circ}{.}9$ 傾いている．春分点の近傍に軌道面の極がくるような軌道を極軌道といい，軌道の極は 281.5 年で春分点のまわりを1周する．初期条件として $h=0$，$i=\theta$ となるような24時間衛星の極はKと一致する．初期条件がわずか違うと極は K のまわりを $T=54.1$ 年でひとまわりする．赤道上空をまわる最初の静止衛星は 1964 年 8 月 19 日に打上げられた通信衛星シンコム3号であった．これ以来アメリカによって通信衛星インテルサット，応用技術衛星ＡＴＳなどつぎつぎと静止衛星が打上げられた．図からわかるように赤道上空をまわる 24 時間衛星の極は P であるから，軌道修正をしないかぎり 27.3 年後にはKに関してPの反対側の点まで移動して，軌道傾斜角は $13\overset{\circ}{.}6$ にもなり，もはや静止衛星とはいえなくなる．さらに 27.3 年後に再び静止衛星となる．この周期は，K と S の角距離 i_0 に依存していて，i_0 が小さいときには，K点のまわりの微小振動の周期を T とすると $T/\cos i_0$ となる．i_0 が大きくなるとこの式は成立しないが約 60° 近くまでは有効である．第5図に i_0 と周期の関係を示してある．同じ軌道傾斜角で打上げても，そのときの h の値によって，i_0 が違うので i の変化する範囲と周期はことなる．例えば最初の 24 時間衛星シンコム1号（1963 年 2 月 14 日）の傾斜角は 34° であった．そのときの h の値は手許に資料がないのでわからないが，もし $h=0$ だと i_0 は $27\overset{\circ}{.}2$ となり，i は 34° と $20\overset{\circ}{.}4$ の間を 60.8 年の周期で変動し，$h=180°$ だと i_0 は $40\overset{\circ}{.}8$ となり i は 34° と $47\overset{\circ}{.}6$ の間を 71.5 年の周期で変動する．

人工衛星の長周期の運動と，3軸不等の剛体の自由回転が等価であることに興味をおぼえたのが，この小文をかいたゆえんである．地球の球からのはずれによる摂動，月と太陽の摂動を球函数で展開し，どちらも2次までしか考慮せず，より高次を無視したことが，異なる2つの運動の等価性をもたらしたのである．