数　表　の　す　す　め

堀　　源　一　郎*

すぐれた詩歌や小説のように，対数や三角関数，あるいはその具象化である関数表は人類の遺産である，という趣旨の，いつかなにかで読んだ一文が印象に残って，以来古本屋の店頭に立つときも，理工系関係の古書目録に目を通すときも，面白い数表に注意するようになった．手許にあるものから拾うと，〈115,500 までの自然数の，7より大きい最小の素因数の表（1955）〉などはいかにも人類の遺産という感がする．115,499 が素数であること，115489 が 11×10499 と素因数分解されることなどを即座に知らせてくれ，A 5 版で表の正味 20 頁の小冊子である．天体力学では諸種の摂動をフーリエ級数で表わすが，その係数に現われる数は（小数で近似せずに）分数で表わすので，摂動計算には分数の加減算が頻繁におこり，上記の表は筆者には実利的価値も大きい．手許からもう 1 つ例をとれば，〈0°.01 毎の正弦余弦 15 桁の表（1949）〉はB 6 版で表の正味 90 頁である（ついでに定価 50 セント）．もちろん天体力学あるいは物理学的自然科学一般で如何に高精度が要求されても，15 桁の正弦余弦が必要となることはない．しからば何ゆえの 15 桁かということになるが，それはこの表を基にして例えば我々天文学徒にはなじみの深い〈ジーベンシュテリゲ氏（強いて訳せば 7 桁氏）三角関数表〉の如く，より使い易い三角関数表を複製しうるということである．この 7 桁の表では引数は 10″（=0°.0028）毎と上記 15 桁の表より細かくなっており，そのため表の正味はB 5 版で 270 頁と 3 倍になっているが，その代り 1 次補間が使えて引き易くなっている．要するに 15 桁 90 頁の表から 7 桁 270 頁の表は再現できるが逆は不可能である，というところに 15 桁の表の意義があるのであろう．それをいうなら 15 桁表を作る親となった表はもっと人類の遺産的色彩が強いことになる．上記の 15 桁表の付録にヘルマンの 30 桁の正弦・余弦表がレプリントされてでているが，引数が 1° 毎のため 2 頁に収まっている．この原典は 1848 年にウィーンで出版された王立科学・アカデミー数学科学部門報告にのっているそうである．

15 桁の表は桁数の割に引数が 0°.01 毎と粗いため 1 次補間は使えない．1 次補間を使うとすれば引数の間隔は 0″.01 とせねばならぬので，このような表は 7 桁表のざっと 1000 倍でB 5 版 30 万頁を要することになる．30 万頁を 90 頁に縮める秘訣は高次補間であるが，高次といっても 2 次ですむところが嬉しい．実際引数の間隔を h とし，引数 x_0, x_1 に対する関数値を f_0, f_1，第 2 階差を f_0^2, f_1^2，第 4 階差を f_0^4, f_1^4 とすれば，エベレットの補間公式は

$$
\begin{aligned}
f(x_0+ph) &= pf_1+\frac{1}{6}p(p^2-1)f_1^2 \\
&\quad +\frac{1}{120}p(p^2-1)(p^2-4)f_1^4+\cdots\cdots \\
&\quad +qf_0+\frac{1}{6}q(q^2-1)f_0^2 \\
&\quad +\frac{1}{120}q(q^2-1)(q^2-4)f_0^4+\cdots\cdots \\
&\qquad \begin{pmatrix} 0<p<1 \\ q=1-p \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とかかれる．$0<p<1$ に対して第 4 階差の係数の絶対値は 0.012 を越えないので，第 4 階差が 40 単位（1 単位は数表値の最後の桁における 1）を越えなければ無視できる．$h=0°.01$ ($=175\times10^{-4}$) に対する 15 桁正弦・余弦表では $f^4\sim h^4\cdot(\sin x)^{(4)}\lesssim10^{-15}$ が示すように，第 4 階差は高々 1 単位であるから余裕を以て省略される．そこで関数値の横に並べて δ^2 を併記すれば，そのために僅かのスペースが余分に必要とはなるが，15 桁の正弦余弦を自由に算出できる表が 90 頁に収められることになる．参考のために 30°.00～30°.05 に対する正弦の関数値と第 2 階差を同表から引用して表 1 に示す．表 1 を掲げたついでに，これを使って 30° 0′ 0″.1 の値を求める手順を掲げる $0''.1=(1/36000)°$ で $p=1/360$, $q=\frac{359}{360}$ であるから，

$$
\frac{1}{6}p(p^2-1)=-0.00046296,
$$

$$
\frac{1}{6}q(q^2-1)=-0.00092207
$$

よって先に示したエベレットの補間式を使った

表 1　第 2 階差付き 15 桁正弦表

30°.00	0.50000 00000 00000	−152 30871
.01	.50015 11423 30817	152 35476
.02	.50030 22694 26158	152 40078
.03	.50045 33812 81421	152 44681
.04	.50060 44778 92003	152 49285
30.05	0.50075 55592 53300	−152 53887

* 東京大学
Gen-ichiro Hori
Let us use numerical tables

$$\begin{aligned}\sin 30^{\circ}0'0''1 &= \frac{1}{360}\times 0.500151142330817\\ &\quad -0.00046296\times(-15235476\ \text{単位})\\ &\quad +\frac{359}{360}\times 0.5\\ &\quad -0.00092207\times(-15230871\ \text{単位})\\ &= \frac{1}{360}\times 180.000151142330817\\ &\quad +7053.4(\text{単位})+14043.9(\text{単位})\\ &= 0.5+0.0000004198398078\\ &\quad +21097.3(\text{単位})\\ &= 0.500000419860905\end{aligned}$$

を得る．同様に $\sin 30^{\circ}0'0''2=0.500000839721693$ となり，$h=0''1$ に対して $f^2=-117$(単位) となって第２階差は無視できない(７単位以下なら省略できる)．１次補間ですますためには先に述べたように $h=0''01$ ととらざるを得ないのである．どうせ２次補間が必要なら $h=0''1$ ととるのは誠に不経済であり，15 桁の有効数字に対する $0''01$ の間隔は的を射た選択となっている．

この例に見るような多数桁の計算には計算機の助けがほしいところである．幸い昨今は机上型あるいはもっと小型の電子式計算機が普及したので２次補間も全く苦にならない．なお，〈Everett 補間公式の係数表 (1946)〉という B６版 20 頁の小冊子が計数研究所報告第１号として出版されているが，ここには 0.001 毎の p に対する $\frac{1}{6}p(1-p^2)$ と $\frac{1}{6}q(1-q^2)$ の値が小数位下５桁まで階差と共に与えられており，また比例部分ものっているので使い易い．ただし $f^2<10$ 万単位でないと表の与える係数では精度不足となる．最後に，７桁の正弦余弦表に f^2 を併記するなら $h=2^{\circ}$ で十分であり，１頁に収まってしまうことに注意しよう．このとき $f^2\sim1$ 万単位なので f^2 の係数も表から求めて十分である．

第２階差付数表は，そのスペースに秘める莫大な情報量がそんなにも繁雑でない使用法で自由に利用できるということで，大変良くできた仕様であると思う．表２を使えば，どんな引数に対しても正弦の値が有効数字５桁まで簡単に求められる，というのは素晴しいではないか．とはいうものの鑑賞の立場を離れて使い易さを強調するなら，２次補間より１次補間が使い易いことはあたりまえだし，何百頁の数表の頁をあちこちめくるよりは見開き２頁で一目で見てとれる方が良いにきまっている．となると少ない桁数でがまんすることになる．どの位少なければよいのか正弦の場合で考えよう．

表 2　第２階差付き５桁正弦表

0°	0.00000	0	50°	0.76604	−2328
10	17365	− 528	60	86603	−2633
20	34202	−1039	70	93969	−2854
30	50000	−1519	80	98481	−2993
40	64279	−1954	90	1.00000	−3038

エベレット補間式の第２階差の項からわかるように，f^2 が７単位以下なら第２階差の寄与は省略できて１次補間でよい．正弦表の場合 $f^2\sim h^2$ であるから，表を n 桁とすれば $h^2<7\cdot10^{-n}$ が必要である．一方見開き２頁に収めるには１頁に縦に $0^{\circ}\sim45^{\circ}$ とし，各度に対して $10'$ 毎の値を $0'\sim50'$ と６ケ横に並べることができるので $h=10'(=0.0029)$ の程度である．この時 $h^2\sim9\cdot10^{-6}$ だから $n=5$ で十分であり，９を７とみて $n=6$ でもそんなに悪くはない．しかし使い易さに徹するなら，第１階差か比例部分がないことにはお話にならないのに，表値は $10'$ 飛びに横に並んでいるので，第１階差の場所がない．しかるにもし各度に対し $0'\sim10'$, $10'\sim20'$, …, $50'\sim60'$ の第１階差が共通なら，各列ごとに共通の比例部分が設けられて印刷上の体裁も整う．このためには結局 $h\sim1^{\circ}(=0.0175)$ で１次補間が使えればよいので，$h^2\sim3\times10^{-4}<7\times10^{-4}$ であるから $n=4$ が適当であることがわかる．以上まとめると，４桁の正弦表では $h=1^{\circ}$ で，１次補間が使えるが，補間の手順を簡単にするため，

表 3　共通の比例部分付き４桁正弦表

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Differences								
							1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30°	.5000	.5025	.5050	.5075	.5100	.5125	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	2	5	7	10	12	14	17	19	22
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

表4 工夫された4桁対数表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$h=10'$ として各度に対する $10'$ 毎の表値を横に並べて示し，各列毎にない共通の比例部分を掲げた表は，使い易さの点では申し分ない仕様ということである(表3)．

4桁という有効数字は天文学・物理学などの精密自然科学の分野でも結構な情報量を荷なっている．地球・太陽間の平均距離なら1億4960万km，地球・月の平均距離なら38万4400 km，地球の赤道半径が 6378 km で極半径が 6357 km という工合で，地球のほか 2，3 を除けば大きさが有効数字4桁までわかっている天体はない．地球の質量 5.977×10^{27} g でも有効数5字桁目は確定していないし，その他大方の天文定数・物理定数で有効数字4桁で情報が不足するような事態はあまりおこらないであろう．

いろいろと考えて4桁の関数表は i) 見開きですむ便利さ，ii) 暗算ですむ補間手順，iii) 十分な精度の拍子が揃った理想的な仕様と思われる．〈ケンブリッジ4桁数表(1946)〉(B6版32頁) は，これまで種々の数表を見てきた筆者にも特に勝れたものに思われる．引数 x に対して $\log x$，10^x，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\sec x$，$\log\sin x$，$\log\cos x$，$\log\tan x$，$1/x$，x^2，$\sqrt{x}$，$\sqrt{10x}$，$\ln x$，それに (度分)→(ラジアン) が見易く印刷されている．この表は，表を引くことが全然おっくうにならないのが不思議なくらいである．(表3は本表の $\sin x$ から引用した) ただし次のことに注意しておく：先にも述べたように共通の比例部分が使えるためには引数の列毎の間隔――三角関数の真数表・対数表では1°，対数表では 0.1，逆対数では 0.01，等々――に対して1次補間が使えなければならない．しかるにこれの是非は関数の形によるわけで，正弦で良かったからといって対数関係でも可とは限らない．例えば $f(x)=\log x\,(1<x<10)$ とすると，$f'(x)=M/x$ $(M=0.4343)$，$f''(x)=-M/x^2$ であるから $|f^2|\sim h^2|f''(x)|=(0.1)^2\dfrac{M}{x^2}=\dfrac{0.0043}{x^2}$ で，$x\sim1$ では 40 単位を越えるので第2階差の寄与を無視できず，共通の比例部分によると高々3単位の誤差を生じうる．実際に $x\sim1$ で2単位の誤差が生じているが，一方比例部分を使う限り (表値に比例部分を加えて関数値とするので) 1単位の誤差はさけられないので，僅かの場所で2単位の誤差がでても使用上の便利さには代えられない，ということである．しかしどうしても2単位の誤差をさけるべく，工夫を加えた表もある(表4)．

多数桁の関数表の2次補間に小型電卓を利用するのは大いに結構だが，4桁以下の計算では電卓より4桁数表の方が便利なことが多い．3桁なら計算尺も使えるが，滑尺のすべりが理想的でないと使っていらいらする．また超精密と称する4桁乗除用計算尺を見たことがあるが，40 cm の C，D 尺がそれぞれ6列ずつになっていて恐ろしくなる．ついでに紹介すると，印刷された計数式計算尺ともいうべき〈The MACMILLAN Table Slide Rule (1931)〉では5桁の数字の縦横に印刷されたプレートが関数尺の代りをして，2枚のプレートを重ねて計算を行なう．精度は補間を使わずに 3～4 桁で乗除・平方根・対数・正弦・正接が求まる．同じくマクミラン社から印刷された対数尺ともいうべき〈A Graphic Table Combining Logarithms and Anti-logarithm (1926)〉というのもでている．B5版で5桁の尺度が40頁，4桁が6頁に収まっている．しかし常用対数はそれ自体が必要になることはめったになく，乗除幅根の計算補助として必要なので，三角関数の対数も含めて6桁以上の対数表は使われなくなるだろう．実際10桁ぐらいまでの加減乗除・幅・平方根は小型電卓がもっとも得意としている．極く最近では三角関数や指数関数，またそれらの逆関数 (含自然・常用対数) もキーを押すだけで有効数字10桁がたちどころに表示されるものまで現われたので，対数表といわず一般の関数表も存在の影が薄くなってきたと見られている．ただ桁数が4で良いのなら，見開き2頁の関数表は，電卓のスイッチを入れてキーを何回か押し，表示された数字を四捨五入して4桁にする (四捨五入しなければ10桁数字を記入せねばならぬ) 操作に比べると，むしろ使い易いくらいのものである．その上，これは広瀬先生のお言葉であるが，電卓は電気がなくては動かない．