

スペースコロニーの自由落下

—スペースコロニーの物理学②—

福 江 純*

1. エレベーターの紐が切れたら

「自由落下 (freefall)」という言葉は、もともと物理学かなんかの用語だと思っていた。ところがそもそもは SF 用語だったらしい。ハイラインが自分の SF で最初に用いたという話をどっかで読んだことがある。その後、宇宙時代になってから学術用語に転用されたのである。ブラックホールみたいに学術用語が SF で使われる例はいくらでもあるだろうが、SF 用語が学術用語になった例は少ないだろう。閑話休題。

スペースコロニー内における初等力学の話題として、今回は、“自由落下”なるものを考えてみたい。

ここで自由落下を“”つきにしたのは理由がある。というのは、自由落下はその原義からすれば、落下している当事者にとってはいかなる力も働かない (free) 運動を表すからだ。したがってスペースコロニー内の自由落下運動と言えば、前回紹介した、見かけの力であるコリオリの力を受けた運動を指すのであろう。このコリオリの力を受けた運動は、コロニーに固定した回転系から見れば非慣性運動のように見えるが、コロニーの外の慣性系から見れば、力のまったく働かない等速直線運動である。したがってそのような運動がスペースコロニー内での本来の自由落下なのである。

ここで考えたいのは、そのようなコリオリの力もとの自由落下ではなく、スペースコロニーの半径方向に限定した“自由落下”である。地球のような天体周辺では、重力の方向が半径方向なので、自由落下も半径方向に起こる。スペースコロニーでも遠心力の方向は半径方向であり、そこで遠心力を受けて半径方向に運動する場合は、どのような運動になるのだろうか、というのが、今回取り上げた問題である。すなわち半径方向に“拘束された”という意味での“自由落下”なのである。

なおこのような“自由落下”は現実には十分可能性のある状況である。というのも、円筒型コロニーやとくにドーナツ型の宇宙ステーションなどでは、ステーション中心のハブ (車輪のこしき) と周辺の居住部分との間の交通手段として、ステーションのスポーク (車輪の輻) に沿ったエレベーターシステムが設置されるだろう。そんなエレベーターの紐が切れたときに、ここで考えているような“自由落下”が実現すると考えられる。

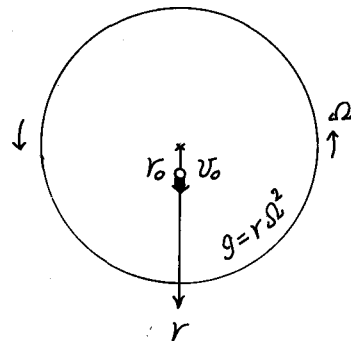


図 1 コロニーの“自由落下”

次節で、スペースコロニーの“自由落下”を表す方程式を立て、その方程式の解析解を示す。3節で解の解析を行おう。4節で2, 3補足をする。

2. 自由落下解

2.1 運動方程式

図 1 のように角速度 Ω で回転しているスペースコロニーを考える。このコロニーの半径 r における遠心力の加速度は、

$$g = r\Omega^2$$

である。さて質点が、時間 $t=t_0$ に中心から $r=r_0$ の距離から初速 $v=v_0$ で、半径に沿って運動を始めたとする。このときの質点の運動方程式は、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g = r\Omega^2 \quad (1)$$

で表される。また速度 v は、

$$\frac{dr}{dt} = v \quad (2)$$

である。

2.2 中間積分

運動方程式 (1) の積分を実行しよう。まず中間積分を求めよう。すなわち (1) 式の両辺に dr/dt を掛けると、

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dr}{dt} r\Omega^2$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Omega^2$$

のように変形できるので、時間 t で積分して、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 + \text{定数}$$

* 大阪教育大 Jun Fukue: A Freefall in Space Colony

となる。あるいは、(2) 式と、 $t=t_0$ で $r=r_0$, $v=v_0$ であることを使えば、

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\Omega^2 r_0^2}{2} = E \quad (\text{一定}) \quad (3)$$

が得られる。

この (3) 式が、運動方程式 (1) の中間積分と呼ばれるものである。あるいはエネルギー保存の式と言ってもよい。すなわち (3) 式は、質点の単位質量当りの運動エネルギー ($v^2/2$) と遠心力のポテンシャルエネルギー ($-\Omega^2 r^2/2$) の和が一定であることを表している。

2.3 解析解

つぎに (3) 式を積分しよう。(3) 式を v について解くと、

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\Omega^2 r^2 + 2E}$$

となるので、

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 + 2E/\Omega^2}} = \Omega dt \quad (4)$$

のように変数分離型に変形できる。

ここで数学公式集の出番である。すなわち (4) 式は、逆双曲線関数などを用いて初等的に積分でき、その不定積分は、 E の正、負、0 に応じて、以下のように表される。

(1) $E > 0$ の場合

$$\operatorname{arcsinh} \left(\frac{r}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right) = \Omega t + \text{定数} \quad (5)$$

ただし $\operatorname{arcsinh}$ は逆双曲線関数である。

(2) $E < 0$ の場合

$$\operatorname{arccosh} \left(\frac{r}{\sqrt{2|E|/\Omega^2}} \right) = \Omega t + \text{定数} \quad (6)$$

ただし $\operatorname{arccosh}$ は逆双曲線関数である。また、 $|E|$ は E の絶対値を表す。

(3) $E = 0$ の場合

$$\log(r) = \Omega t + \text{定数} \quad (7)$$

ただし \log は自然対数である。

つぎの節で、これらの解を解析しよう。

3. 解の性質

3.1 半径 r について陽な解

上の解、(5) 式、(6) 式、(7) 式は、時間 t に関しては陽に解けているが、どちらかという、半径 r に関して陽に解けた解が欲しい。すなわち、時間 t の関数として $r=r(t)$ という形で解を求めたい。さらに、 $t=t_0$ で $r=r_0$, $v=v_0$ という初期条件を満足する解が欲しい。 E が正の場合から始めよう。

(1) $E > 0$ の場合

まず、

$$E = v_0^2/2 - \Omega^2 r_0^2/2 > 0$$

の場合を考える。

初期条件を (5) 式に入れて、

$$\operatorname{arcsinh} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right) = \Omega t_0 + \text{定数}$$

なので、(5) 式と辺々引いて、

$$\operatorname{arcsinh} \left(\frac{r}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right) = \Omega t - \Omega t_0 + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right)$$

となる。そこで逆関数を戻して、

$$\frac{r}{\sqrt{2E/\Omega^2}} = \sinh \left[\Omega t - \Omega t_0 + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right) \right]$$

になる。さらに、 $\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{2E/\Omega^2}} &= \sinh \left[\Omega t - \Omega t_0 + \log \left(\frac{r_0}{\sqrt{2E/\Omega^2}} + \sqrt{\frac{r_0^2}{2E/\Omega^2} + 1} \right) \right] \\ &= \sinh \left[\Omega(t - t_0) + \log \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right] \end{aligned}$$

のように変形できる。さらにここで、 $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ であることを使うと、

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{2E/\Omega^2}} &= \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[\Omega(t - t_0) + \log \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[-\Omega(t - t_0) - \log \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}}{\sqrt{2E/\Omega^2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}}{\sqrt{2E/\Omega^2}} e^{\Omega(t - t_0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2E/\Omega^2}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}} e^{-\Omega(t - t_0)} \right] \end{aligned}$$

となる。したがって、最終的に、

$$r = \frac{1}{2} \left[(r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}) e^{\Omega(t - t_0)} - \frac{2E/\Omega^2}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}} e^{-\Omega(t - t_0)} \right] \quad (5r)$$

が得られる。

(2) $E < 0$ の場合

つぎに、

$$E = v_0^2/2 - \Omega^2 r_0^2/2 < 0$$

の場合を考えよう。

このときは初期条件を (6) 式に入れて、

$$\operatorname{arccosh} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2|E|/\Omega^2}} \right) = \Omega t_0 + \text{定数}$$

なので、(6) 式と辺々引いて、

$$\operatorname{arccosh} \left[\frac{r}{\sqrt{2|E|/\Omega^2}} \right] = \Omega t - \Omega t_0 + \operatorname{arccosh} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2|E|/\Omega^2}} \right)$$

となる。そこで逆関数を戻して、

$$\frac{r}{\sqrt{2|E|/\Omega^2}} = \cosh \left[\Omega t - \Omega t_0 + \operatorname{arccosh} \left(\frac{r_0}{\sqrt{2|E|/\Omega^2}} \right) \right]$$

になる。さらに、 $\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ であるこ

とを用いると,

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} \\ &= \cosh \left[\Omega t - \Omega t_0 + \log \left(\frac{r_0}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} + \sqrt{\frac{r_0^2}{2|E|\Omega^2} - 1} \right) \right] \\ &= \cosh \left[\Omega(t-t_0) + \log \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} \right] \end{aligned}$$

のように変形できる. さらにここで, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ であることを使くと,

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[\Omega(t-t_0) + \log \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} \right] \right. \\ & \quad \left. - \exp \left[-\Omega(t-t_0) - \log \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}}{\sqrt{2|E|\Omega^2}} e^{\Omega(t-t_0)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{2|E|\Omega^2}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}} e^{-\Omega(t-t_0)} \right] \end{aligned}$$

となる. したがって, 最終的に,

$$r = \frac{1}{2} \left[(r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}) e^{\Omega(t-t_0)} + \frac{2|E|\Omega^2}{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|\Omega^2}} e^{-\Omega(t-t_0)} \right] \quad (6r)$$

が得られる.

(3) $E=0$ の場合

最後に,

$$E = v_0^2/2 - \Omega^2 r_0^2/2 = 0$$

の場合を考えよう.

このときは初期条件を (7) 式に入れて,

$$\log(r_0) = \Omega t_0 + \text{定数}$$

となるので, (7) 式と辺々引いて,

$$\log(r) = \Omega t - \Omega t_0 + \log(r_0)$$

となる. したがって,

$$\log(r/r_0) = \Omega(t-t_0)$$

$$r/r_0 = e^{\Omega(t-t_0)}$$

となり, 結局,

$$r = r_0 e^{\Omega(t-t_0)} \quad (7r)$$

が得られる.

さて, (5r) 式, (6r) 式, (7r) 式を見比べてみると, E の正, 負, 0 によらずに, すべての場合を, (5r) 式すなわち,

$$r = \frac{1}{2} \left[(r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}) e^{\Omega(t-t_0)} - \frac{2E/\Omega^2}{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 2E/\Omega^2}} e^{-\Omega(t-t_0)} \right] \quad (8)$$

で表すことができる. この (8) 式が, r について陽に解いた解である.

時間 t が初期時刻 t_0 から十分大きくなると, (8) 式の第 2 項は指数的に減衰するので無視できる. 一方, 第 1 項は指数的に増加していく. すなわち t が十分大きくなると, 半径 r は $\exp(\Omega t)$ のように指数的に増加していくことがわかる. したがって半径 r に比例する遠心力加速度のもとでの“自由落下”運動は, 重力加速度一定の場合の自由落下運動とは随分異なる.

3.2 特別解

上の (8) 式は, ごく一般的な初期条件のもとでの“自由落下”解 $r=r(t)$ だが, とくに重要な場合として, つぎの 2 つの初期条件の場合を取り上げておこう.

① $t=t_0=0$ で, $r=r_0=0$ および $v=v_0$

② $t=t_0=0$ で, $r=r_0$ および $v=v_0=0$

まず ① の場合,

$$E = v_0^2/2 - \Omega^2 r_0^2/2 = v_0^2/2$$

なので,

$$2E/\Omega^2 = v_0^2/\Omega^2$$

と表せる. したがってこの式を考慮しながら, (8) 式で t_0 と r_0 を 0 にすると,

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{2E/\Omega^2} (e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}) \\ &= \frac{v_0}{\Omega} \frac{1}{2} (e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}) \\ &= \frac{v_0}{\Omega} \sinh(\Omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

と簡単になる. 図 2 に $\sinh x$ のグラフを描いておく.

一方, ② の場合,

$$E = v_0^2/2 - \Omega^2 r_0^2/2 = -\Omega^2 r_0^2/2$$

なので,

$$2E/\Omega^2 = -r_0^2$$

と表せる. したがってこの式を考慮しながら, (8) 式で t_0 を 0 にすると,

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} r_0 (e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}) \\ &= r_0 \cosh(\Omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

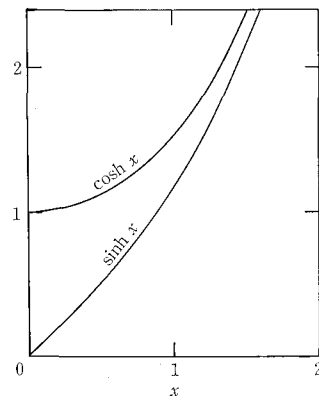


図 2 双曲線関数

と簡単になる。図 2 に $\cosh x$ のグラフを描いておく。

先にも述べたように、いずれの場合にも、時間 t が十分大きくなると、半径 r は指数的に増大する。

4. 議 論

以上のように、スペースコロニー内の半径方向に拘束された“自由落下”運動は、解析的に完全に解ける。

4.1 落下時間

ところで、このような“自由落下”で、 $t=t_0=0$ で $r=r_0$ から初速度 $v_0=0$ で落下運動を始め、 $r=r$ まで落下するのに要する時間はどれくらいになるだろうか？ またその落下時間は、コリオリの力を受けながら自由落下する場合の落下時間と比べて、長いだろうか短いだろうか (図 3)。その問題を少し考えてみよう。

まず半径方向の“自由落下”の落下時間を求めてみよう。初期条件として、 $t=t_0=0$ で $r=r_0$ 、 $v=v_0=0$ より、

$$E = v_0^2/2 - \Omega^2 r_0^2/2 = -\Omega^2 r_0^2/2 < 0$$

なので、(6) 式がこの問題の解である。あるいは、

$$\operatorname{arccosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

であることを用いると、(6) 式は、

$$\log(r + \sqrt{r^2 - 2|E|/\Omega^2}) = \Omega t + \text{定数} \quad (11)$$

とも表せる。ここで定数は右辺に繰り込んだ。

この (11) 式に初期条件を入れると、

$$\log(r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|/\Omega^2}) = \text{定数}$$

となるので、(11) 式と辺々引いて、

$$\log \frac{r + \sqrt{r^2 - 2|E|/\Omega^2}}{r_0 + \sqrt{r_0^2 - 2|E|/\Omega^2}} = \Omega t$$

となる。さらに $2|E|/\Omega^2 = r_0^2$ を代入すれば、最終的に、落下時間として、

$$\begin{aligned} \Omega t &= \log \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \\ &= \log \left(\frac{r}{r_0} + \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

が得られる。

一方、時刻 0 に初速度 0 でほうり出され、コリオリの力を受けながら螺旋状に落下していく際の r_0 から r

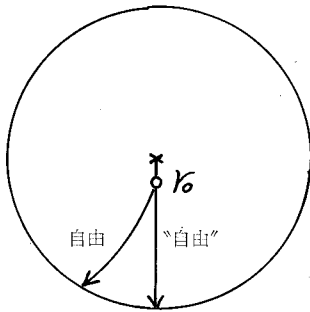


図 3 2つの自由落下

まで落下する時間はいかほどになるだろうか。この問題は、慣性系で考えた方が簡単である (図 4)。すなわち角速度で回転している回転系において、 $r=r_0$ から初速度で物体を自由運動させるということは、図 4 のように慣性系で考えれば、 $r=r_0$ からそこでの回転速度 Ωr_0 を初速度として、円の接線方向に物体を運動させることである。慣性系では物体はそのまま (円の弦上を) 等速直線運動を行って、 r まで到達する。円の弦の長さは、図 4 からわかるように、

$$\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

であり、初速度は Ωr_0 なので、半径 r まで到達する時間 t は、結局、

$$t = \sqrt{r^2 - r_0^2} / (\Omega r_0)$$

あるいは、

$$\Omega t = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} \quad (13)$$

となる。

半径方向の“自由落下”の落下時間 (12) 式とコリオリの力を受けての自由落下の落下時間 (13) 式のおおまかなグラフを図 5 に示しておく。グラフや式からわかるように、半径方向の“自由落下”の方が落下時間が短い。実際、落下距離 r が十分大きいところでは ($r \gg r_0$)、

$$\Omega t = \log(2r/r_0)$$

のように対数的にしか増加しないが、自由落下の場合の

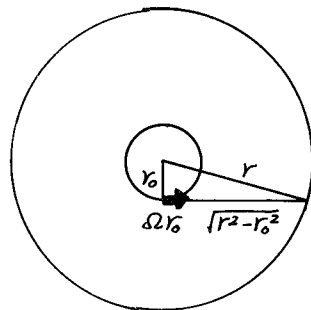


図 4 慣性系で見た自由落下

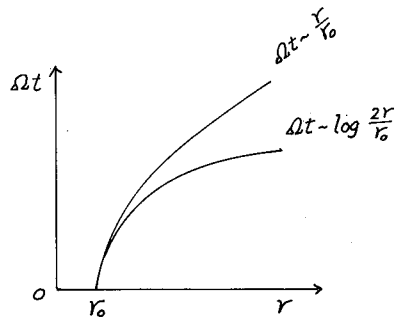


図 5 落下時間

落下時間は、(13) 式から、

$$\Omega t = r/r_0$$

のように線形的に増加する。

4.2 その他の議論

今回取り上げた問題は、スペースコロニーにおける力学としてはわりと初等的に取り扱えるケースである。このような力学的な問題には、他にもいろいろあるだろう。

たとえば、スペースコロニーにおける最速降下曲線がその一つである。最速降下曲線というのは、ある力の場で、最も時間のかからない運動経路を求める問題で、地表近傍のように重力加速度が一定の場合の最速降下曲線はサイクロイドになることが知られている。スペースコロニーの場合は、遠心力の加速度は半径に比例しているが、そのときの最速降下曲線はどのような曲線になるのだろうか。とくにこの問題はスペースコロニーの交通問題とかかわってくるだろう。興味深いところである。

重力列車のコロニーバージョンも考えられる。重力列車というのは、地球の表面のある地点から別の地点へ向けて、地球内部をまっすぐに掘り抜いたトンネルの中に、列車を走らせる問題である。トンネル内を真空にして空気抵抗をなくし、さらに他の摩擦も働かないようにしておくと、トンネルの入口を初速 0 で出発した重力列車は、地球重力に引かれて加速し、最深部で最高速度に達して、その後は重力によって減速されて、トンネルの出口でちょうど止まる。トンネルの出口が地球表面のどこにあっても、重力列車の所要時間は約 42 分である。スペースコロニーの場合についても似たようなものを考えることができるだろう。もっとも遠心力列車と呼ぶべきかも知れないが。

参考文献

福江 純 1991, ハード SF 研究所公報, 印刷中.
森口・宇田川・一松『数学公式 I』岩波全書 (1956 年)

お知らせ

野辺山観測所特別公開のお知らせ

当観測所では、天文知識の普及と観測所の仕事を広く知って頂くため、下記の要領で観測所の諸設備を一般の方に公開致しますので、ご案内申し上げます。

1. 日時 1991 年 9 月 23 日 (秋分の日) 午前 10 時から午後 4 時半まで
2. 内容
 - (1) 見学 通常の見学コースの他、45 m 望遠鏡の観測室、10 m 5 素子干渉計の観測室、観測データを処理する計算機室等を見学できます。
 - (2) 実験・展示
 1. やってみよう天体電波受信
VLBI 6 m グループ (国立天文台水沢 他)
 2. レンズアンテナで太陽をみよう
パラボラ反射鏡でなくレンズでも電波望遠鏡を作れます。
 3. その他、観測所での研究内容を展示します。

- (3) 講演 浮田信治 「電波で探る星の質量放質」

最近明らかにされつつある晚期型星からの質量現象を紹介しながら、遠い昔に星の内部で作られた元素の話。

柴崎清登 「太陽からの電波」

- (4) その他 質問コーナー等

3. 交通 小海線・野辺山駅下車、徒歩 25 分

*尚、観測所内に食堂はありませんので、ご承知おき下さい。また恐縮ですが、各自入室用の上履き (スリッパ等) をご持参下さい。

問い合わせ先 〒384-13 長野県南佐久郡南牧村野辺山
野辺山宇宙電波観測所

(担当) 高橋敏一 ☎ 0267-63-4375

斎藤泰文 63-4397

近田義廣 63-4394

(国立天文台野辺山 電波天文学研究系
野辺山宇宙電波観測所
野辺山太陽電波観測所)