

ラーマの海と大気

—スペースコロニーの物理学③—

福江 純

〈大阪教育大学 〒543 大阪市天王寺区南河堀町4-88〉

1. 円筒海の謎

西暦 2131 年、深宇宙から謎の天体が太陽系にやってくる。最初、発見年と順序にしたがって、31/439 と登録されたその天体は、その後、インドの大叙事詩ラーマヤナに出てくる神にちなんで、ラーマと名づけられた。そしてラーマに送られた探査機シータ(ラーマの妻；どっかで聞いた名だね)が送ってきた映像は、巨大な円筒型の金属物体だった(『宇宙のランデブー』)。

宇宙の彼方から飛来した巨大な人工物体ラーマは、直径 20 km 長さ 50 km の円筒型で、密閉型スペースコロニーの一種だった。ラーマの外殻の厚みは 2 km ほどで、したがって内部の空洞部分の大きさは、直径約 16 km、長さ約 50 km である。さらに円筒世界の周囲をめぐるように、幅 10 km の円筒状の海(円筒海)がある。ラーマの自転周期は 4 分なので、内壁での遠心力の加速度は、0.56 G になる。図 1 にラーマの断面の想像図を示しておく。また表 1 にラーマの諸元をまとめておく。

さて実は、この円筒海の縁の崖の高さが、進行方向の前方側(北側)と後方側(南側)で異なっているのだ。すなわち前方側に比べ後方側の崖の方が高いのである(北側 50 m、南側 500 m；図 1 参照)。自転による遠心力だけを受けて一定速度で飛行しているときは、海の表面は円筒状だが、ラーマが進行方向に一定の加速度で加速する際には、後方側の水面が盛り上がるため、というのがその理由である(ネタばらしをしてしまった。読

表 1 ラーマの諸元

外径	D	= 20km
内径	$2R$	= 16km
長さ	L	= 50km
円筒海の幅	W	= 10km
自転周期	$2\pi/\Omega$	= 4 分
自転角速度	Ω	= $0.0262s^{-1}$
内壁での回転速度	$R\Omega$	= $209ms^{-1}$
内壁での遠心力加速度	$R\Omega^2$	= 0.56G
加速航行時の加速度	a	= 0.02G
総質量	M	= 約10兆トン

1G = $9.8ms^{-2}$

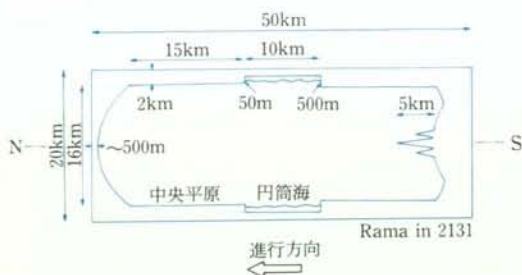


図 1 ラーマの構造

んでいない人、ごめんなさい)。

で、前から疑問だったのは、そのときに円筒海の表面はどんな形状になるのか、という問題だ。後知恵で考えると、直観的にごく当然のことだったんだが、式で解いてみるまでわからなかったというニブシサ。流体力学の簡単な例題と思って、本稿を読んでいただきたい。

2. 基礎方程式

まず、ラーマの海あるいは大気の構造を求めるための基礎方程式をまとめておこう。

図2のように、ラーマ（あるいは円筒型スペースコロニー）の中心軸をz軸とする円筒座標 (r, ϕ, z) を用いる。コロニーの自転角速度を Ω とすると、自転による遠心力加速度は、 r 方向外向きに $r\Omega^2$ である。また z 方向を進行方向とし、一定加速時の加速度の大きさを a とする。このとき、コロニー内の流体に対する静水圧平衡の式は、 r 方向と z 方向のそれぞれについて、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = r\Omega^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -a \quad (2)$$

と表される。ただし ρ は流体の密度、 p は圧力である。

上の(1)式は、半径方向の圧力勾配と遠心力が釣り合っていることを示し、(2)式は z 方向の圧力勾配と単位質量当りの力の釣り合いを意味している。また(2)式のマイナスの符号は、用いた座標系で z 方向の力が下向きになっているためである。

基礎方程式としては、さらに流体の性質によ

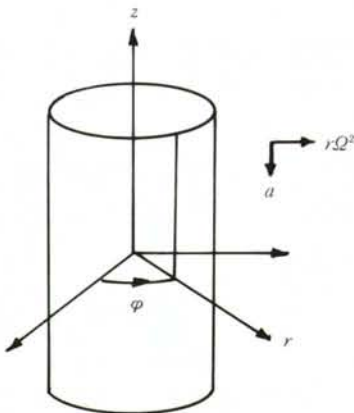


図2 円筒座標系

表2 地球大気の諸元

気体定数	$R_g = 8.314 \times 10^7 \text{ erg g}^{-1} \text{ K}^{-1}$
気温	$T_0 = 300 \text{ K}$
平均分子量	$\mu = 29$
比熱比	$\gamma = 7/5$

て決まる状態方程式が必要である。

海の場合には、海水が非圧縮だと考え、状態方程式を、

$$\rho = \text{一定} \quad (3 \text{ 海})$$

とする。

一方、大気の場合は、理想気体の状態方程式：

$$p = \frac{R_g}{\mu} \rho T \quad (3 \text{ 大気})$$

を用いよう。ここで R_g は気体定数、 μ は大気を作っている分子の平均分子量、 T は絶対温度を単位とした気温である。もし大気が地球大気と同じく、窒素4対酸素1の混合大気なら、その平均分子量は29になる(窒素分子の分子量 $28 \times 4/5 +$ 酸素分子の分子量 $32 \times 1/5 = 28.8$)。表2に空気の諸量をまとめておく。

さらに、大気が長い間静かな平衡状態になっており、対流などが無い場合は、温度が一定(等温)と仮定していいだろう。すなわち、

$$T = \text{一定} \quad (4 \text{ 等温})$$

たとえば地球大気の場合も、対流圏・成層圏・中間圏を大局的に眺めれば、おおむね等温とみなせる。

逆に、地表が暖められたりして大気が対流状態になっている場合は、断熱の式：

$$p/\rho^\gamma = K (\text{一定}) \quad (4 \text{ 断熱})$$

を補助的に使用する。ただし γ は比熱比で、空気の場合は2原子分子なので $\gamma = 7/5$ である。地球の場合も、対流圏のみをみると断熱的になっている。

3. スペースコロニーの大気構造

3.1. 等温大気

円筒型スペースコロニーの大気構造はよく調べられているので(たとえばオニール 1974 年, 須賀 1985 年), いまさらではあるが, ウォーミングアップがてら, 等温の場合の大気構造を解いてみよう。

基礎方程式は, (1)式, (3大気)式, (4等温)式の3つである。ただし通常のスぺースコロニーの場合, 半径 r 方向1次元の問題なので, (1)式の偏微分は常微分にしてよい。

さて(1)式に(3大気)式を代入すると, (4等温)式より T =一定だから T を微分の外に出せて,

$$\frac{R_g T}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = r\Omega^2$$

となり, 積分して,

$$\log \rho = r^2/H^2 + C \quad (\text{積分定数}) \quad (5)$$

が得られる。ただし \log は自然対数であり, また,

$$H^2 = \frac{2(R_g/\mu)T}{\Omega^2} \quad (6)$$

である。この H はスケールハイトと呼ばれる。

さらに, コロニー内壁の半径を R とし, そこで密度が ρ_0 だという境界条件:

$$\rho = \rho_0 \quad (r = R) \quad (7)$$

を与えると, (5)式より,

$$C = \log \rho_0 - R^2/H^2$$

となり, 密度分布として, 結局,

$$\log \rho - \log \rho_0 = r^2/H^2 - R^2/H^2$$

あるいは,

$$\rho = \rho_0 \exp[(r^2 - R^2)/H^2] \quad (8)$$

が得られる。

スペースコロニー大気の密度分布(8)の概形

を図3に描いておく。図3の横軸は内壁の半径を単位とした中心軸からの距離で, 縦軸は内壁での密度を単位とした密度の値である。内壁($r/R=1$)から中心軸($r=0$)へ向かうにしたがって密度は減少し, 中心軸上では, 内壁の密度の $\exp(-R^2/H^2)$ 倍になる。

ここでは省略するが, スペースコロニーの内部の海の構造も同じようにして解ける。

3.2. 応用例

参考のために, 以上の等温大気をオニールの島3号やラーマに適用してみよう。

島3号コロニーは, 直径が6.5 kmなので, 半径 R は3.25 kmである。また内壁での加速度 $R\Omega^2$ は1 Gとする。気温は300 K (27°C)としよう。これらの数値を代入すると, スケールハイト H は7.6 kmとなる。さらに中心軸上の密度は, 内壁の密度の0.83倍になる。

一方, ラーマの場合, 円筒世界の内壁の半径 R は8 kmであり, また自転角速度 Ω は 0.0262 s^{-1} である(表1)。したがってスケールハイト H は15.8 kmになる。また中心軸上と内壁の密度の比は, 0.77である。

3.3. 断熱大気

断熱的な場合も, (4等温)式の代わりに(4断熱)式を使えば, 同じように解くことができる。

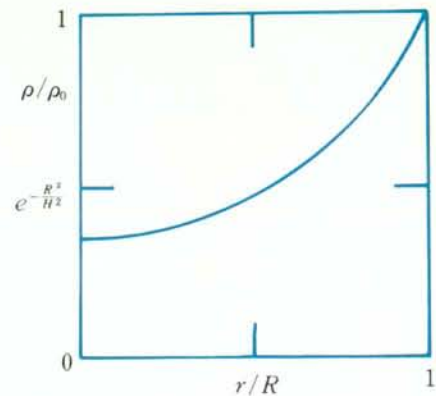


図3 密度分布

この場合については、また詳しく触れることがあ
ると思うので、ここではとりあえず結果のみ書い
ておく。

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{r^2 - R^2}{H^2} \right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (9)$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{r^2 - R^2}{H^2} \right) \quad (10)$$

である。なお ρ_0 および T_0 はそれぞれ内壁の密度お
よび温度であり、 H は (6) 式と同じ式で表され
るとする。

4. 加速中のラーマの海の圧力分布

4.1. 円筒海の形状

肩ならしの済んだところで、円筒海の海面の形
を考えてみよう。用いる基礎方程式は、静水圧平
衡 (1) 式、(2) 式と、密度一定の状態方程式 (3
海) 式である。

まず密度一定のもとで (2) 式を積分すると、

$$p(r, z) = -\rho g z + f(r) \quad (11)$$

が得られる。ここで $f(r)$ は半径 r の任意の関数で
ある。この (11) 式を (1) 式に代入すると、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{df}{dr} = \Omega^2 \rho r \quad (12)$$

となり、積分して、

$$f(r) = (\Omega^2 \rho / 2) r^2 + C \quad (\text{積分定数}) \quad (13)$$

が得られる。この $f(r)$ を (11) 式に戻して、結局、
圧力分布として、

$$p(r, z) = (\Omega^2 \rho / 2) r^2 - \rho g z + C \quad (14)$$

が得られる。

さらに境界条件として、

$$p = p_0 \quad (r = R, z = 0) \quad (15)$$

とすると、

$$p(r, z) = p_0 - \Omega^2 \rho R^2 / 2 + (\Omega^2 \rho / 2) r^2 - \rho g z \quad (16)$$

となる。

さて、海面では圧力は一定で 1 気圧に等しいと
考えれば、(14) 式あるいは (16) 式から、海面の
形状が、

$$z = (\Omega^2 / 2a) r^2 + \text{定数} \quad (17)$$

で与えられることがわかる。(17) 式は z 軸を中心
軸とする回転放物面の式である。よーするに、自
転しながら一定加速度で飛行するラーマの円筒海
の形状は、水の入ったバケツを一定の重力加速
度を受ける地表でぐるぐる回したときの水面の形
状とまったく同じだったわけである。まあ当り前の
話だけど、縦のものが横になっていただけでわか
んなかった。頭がカタクになった証拠かも。

もちろん、海面だけでなく、海中でも (17) 式
は成り立つので、海中の等圧面も回転放物面にな
る。

4.2. 応用例

上で解いた円筒海の構造を使って、若干の数値
を求めてみよう。すなわち、ラーマが加速したと
き、円筒海の北側と南側では実際にどれくらい海
面の高さが違ってくるだろうか？

図 4 のように、円筒海の北側 (進行方向前側)
のところを z 座標の原点とする。またそこでの円
筒海の海面の中心からの距離を r_N 、南側 (進行方
向後ろ側) での距離を r_S としよう。欲しいのは、そ
れらの差、 $r_N - r_S$ である。また円筒海の南北方向
の幅を W ($= 10 \text{ km}$) とする。

先にも述べたように、円筒海の表面で圧力 p は
1 気圧とすると、(16) 式から、図 4 の A 点 ($r_N, 0$)
および B 点 ($r_S, -W$) で、それぞれ、

$$1 \text{ 気圧} = p_0 - \Omega^2 \rho R^2 / 2 + (\Omega^2 \rho / 2) r_N^2 \quad (18 \text{ N})$$

$$1 \text{ 気圧} = p_0 - \Omega^2 \rho R^2 / 2 + (\Omega^2 \rho / 2) r_S^2 + \rho g W \quad (18 \text{ S})$$

が成り立つ。下の (18 S) 式から上の (18 N) 式

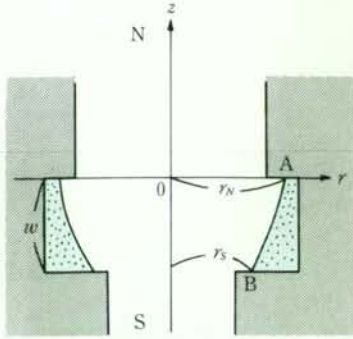


図4 円筒海の海面の形状

を辺々引いて、

$$a\rho W = (\Omega^2 \rho / 2)(r_N^2 - r_S^2)$$

あるいは、

$$r_N^2 - r_S^2 = 2aW / \Omega^2 \tag{19}$$

となる。

もし r_N と r_S の差が、 r_N や r_S 自身に比べて十分小さければ、

$$\begin{aligned} r_N^2 - r_S^2 &= (r_N + r_S)(r_N - r_S) \\ &\sim 2r_N(r_N - r_S) \end{aligned} \tag{20}$$

と近似できる。したがって、(19) 式と (20) 式より、

$$r_N - r_S = aW / (\Omega^2 r_N) \tag{21}$$

となる。

r_N はおおむね半径 $R = 8 \text{ km}$ とすれば、表1からラーマの場合の数値を入れて、

$$r_N - r_S = 357 \text{ m} \tag{22}$$

という値が出て来る。なるほど確かに、慣性航行時において、円筒海の北側の崖の高さが 50 m、南側の崖の高さが 500 m という設定はよくできている。やっぱりクラークのことだから、ちゃんと計算したんだろうなあ。

5. 加速中のラーマの大気構造

5.1. 等温大気

つぎに、ラーマの大気中でも、等圧面が回転放物面になることを示そう。大気の温度は一定だとする。したがって基礎方程式は、静水圧平衡(1)式、(2)式と、(3大気)式および(4等温)式である。

まず、(1)式と(2)式のそれぞれに、 $T = \text{一定}$ のもとで、(3大気)式を代入する：

$$\frac{R_g T}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \log \rho = r \Omega^2$$

$$\frac{R_g T}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \log \rho = -a$$

あるいは整理して、

$$\frac{\partial}{\partial r} \log \rho = 2r / H_r^2 \tag{23 r}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \rho = -1 / H_z \tag{23 z}$$

となる。ただし H_r 、 H_z はそれぞれ、 r 方向および z 方向のスケールハイトで、

$$H_r^2 = 2(R_g / \mu) T / \Omega^2 \tag{24 r}$$

$$H_z = (R_g / \mu) T / a \tag{24 z}$$

である。

上の(23)式を海の場合と同じ手順で解こう。すなわち、まず(23-z)式を z について積分して、

$$\log \rho = -z / H_z + f(r) \tag{25}$$

を得る。この式を(23 r)式に代入すると、 $f(r)$ に関して、

$$df/dr = 2r / H_r^2 \tag{26}$$

となり、積分して、

$$f = r^2 / H_r^2 + C \text{ (積分定数)} \tag{27}$$

となる。さらに(25)式に戻して、密度分布として、

$$\log \rho = r^2/H_r^2 - z/H_z + C \quad (28)$$

が得られる。

境界条件として、

$$\rho = \rho_0 \quad (r=R, z=0) \quad (29)$$

を与えると、最終的に、

$$\log \rho - \log \rho_0 = r^2/H_r^2 - z/H_z - R^2/H_r^2$$

あるいは、

$$\rho = \rho_0 \exp[(r^2 - R^2)/H_r^2 - z/H_z] \quad (30)$$

という密度分布が得られる。

上の (28) 式あるいは (30) 式から、大気等の密度面は、

$$\begin{aligned} z &= (H_z/H_r^2)r^2 + \text{定数} \\ &= (Q^2/2a)r^2 + \text{定数} \end{aligned} \quad (31)$$

で与えられる。これも海の場合の (17) 式と同じく、回転放物面である。さらに等温を仮定しているので、等圧面は等密度面に一致する。

5.2. 応用例

ラーマの場合の数値を代入すると、

$$H_r = 15.8 \text{ km}$$

$$H_z = 439 \text{ km}$$

となる。ただし気温は $T=300\text{K}$ 、加速航行時の加速度は $a=0.02\text{G}$ とした。

半径方向の密度分布の様子は、3 節のスペースコロニーの場合とあまり変わらない。

一方、 z 方向の様子は、加速度を大きくしてたとえば a を 1G にまで増やすと、 z 方向のスケールハイトは 9km となる。すなわち、あまり加速度が大きいと、円筒海の水がラーマ内に溢れる点も問題だが、同時に、ラーマの進行方向北側で、空気の密度が希薄になりすぎてしまう。このような大気が呼吸可能であるという条件から、加速度の上限を見積もってみるのも面白いだろう。

ラーマの海と大気については、天体の大気構造

に関する講義の中で息抜きに話しているのだが、式の山なので、学生にはあまり息抜きになっていないようだ。

参考文献

- 福江 純 1990, ハード SF 研究所公報, 38, 35.
 アーサー・C・クラーク『宇宙のランデブー』(南山 宏訳) 早川書房 (1985 年)
 須賀 隆 1985, ハード SF 研究所公報, 16, 42.
 O'Neill, G. K. 1974, Physics Today, Sept., 32.

おまけ 空気の漏出率

隕石の衝突や爆発などによってスペースコロニーに穴が開いたとき、空気はどれくらいでなくなってしまうのだろうか。本文とは直接関係ないが、コロニーに穴が開いたときの空気の漏出率について少し計算しておこう。

体積 V のコロニーに断面積 S の穴が開いたとする。穴が開いた瞬間の時間を $t=0$ とし、そのときのコロニー内の空気の密度、圧力をそれぞれ、 ρ_0 、 T_0 、 p_0 とする。また空気の漏出速度を v としよう。欲しいのは、 $t>0$ での物理量とくに密度 ρ の時間変化である。

まずコロニー内の空気の総質量を M とすると、穴から空気が逃げていく割合で M は減少するので、

$$dM/dt = -\rho v S \quad (A1)$$

が成り立つ(連続の式)。ただし、密度と体積を用いれば、

$$M = \rho V \quad (A2)$$

である。つぎにコロニー内の圧力 p と密度 ρ と穴からの空気の漏出速度 v の間には、ベルヌーイの定理から、

$$p = \rho v^2 \quad (A3)$$

の関係がある(少し係数がつくが省略した)。最後

に、空気の漏出が断熱的に起こるとすれば、比熱比を γ として断熱の式から p/ρ^γ ＝一定なので、初期の密度と圧力を使って、

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma \quad (\text{A } 4)$$

と表せる。これら(A 1)式から(A 4)式までが、基本的な方程式である。

最初に、(A 1)式に(A 2)式を代入し、コロニーの体積が一定であることを用いると、

$$Vd\rho/dt = -\rho vS \quad (\text{A } 5)$$

が得られる。一方、(A 3)式と(A 4)式からは、

$$\rho v^2 = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$$

となるので、

$$v = (p_0/\rho_0)^\gamma)^{1/2} \rho^{-(\gamma-1)/2} \quad (\text{A } 6)$$

が得られる。

そこで、(A 6)式を(A 5)式に代入して、

$$\begin{aligned} Vd\rho/dt &= -\rho S (p_0/\rho_0)^\gamma)^{1/2} \rho^{-(\gamma-1)/2} \\ \rho^{-(\gamma+1)/2} d\rho/dt &= -(p_0/\rho_0)^\gamma)^{1/2} S/V \end{aligned}$$

と変形し、時間で積分して、

$$[2/(\gamma-1)]\rho^{-(\gamma-1)/2} = (p_0/\rho_0)^\gamma)^{1/2} (S/V)t + \text{定数}$$

となる。 $t=0$ で $\rho=\rho_0$ であることから積分定数を決めると、結局、

$$(\rho/\rho_0)^{-(\gamma-1)/2} = [(\gamma-1)/2](p_0/\rho_0)^\gamma)^{1/2} (S/V)t + 1$$

あるいは、

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \frac{S}{V} t\right]^{2/(\gamma-1)}} \quad (\text{A } 7)$$

が得られる。

ちなみに空気の場合の数値(表 2)を入れると、

$$(p_0/\rho_0)^{1/2} = (R_g T_0/\mu)^{1/2} = 293.3 \text{ ms}^{-1}$$

$$(\gamma-1)/2 = 1/5$$

になり、したがって、

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{[1 + 58.66(S/V)t]^5} \quad (\text{A } 8)$$

となる。ただし、穴の断面積 S とコロニーの体積 V はそれぞれ m^2 、 m^3 で測り、時間 t は秒を単位で計るものとする。

さらにラーマの場合は、半径 8 km、長さ 50 km なので、

$$\text{体積 } V = 1.01 \times 10^{13} \text{ m}^3$$

になり、したがって、

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{[1 + 1.84 \times 10^{-4} St]^5} \quad (\text{A } 9)$$

が得られる。ただし断面積 S は m^2 で測り、時間 t は年を単位とする。あるいは、断面積 S を km^2 単位にすれば、

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{[1 + 184 St]^5} \quad (\text{A } 10)$$

と表すこともできる。

上の(A 9)式あるいは(A 10)式から、容易に漏出率を見積ることができ。たとえば、密度 ρ が最初の密度 ρ_0 の半分になる時間(半減期)を計算してみると、穴の大きさが 1 m^2 ぐらいのときは、

800 年

くらいかかることがわかる。すなわち、 1 m^2 ぐらいの穴ならばらくは大丈夫である。しかし $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ ぐらいの穴が開くと、半減期は

0.08 年すなわち 1 カ月

ほどになってしまう。