

ラーマに降る雨

ースペースコロニーの物理学④ー

福 江 純

〈大阪教育大学 〒543 大阪市天王寺区南河堀町4-88〉

1. スペースコロニーのお天気

前回、円筒型スペースコロニーのグローバルな大気構造に関して、簡単な考察をした。今回は、オニールの島3号やラーマのようなスペースコロニーにおいて、雨はどのように降るのかという問題を考えてみたい(図1)。いわばスペースコロニーの気象(お天き)学の初步である。

このような問題を考える動機／目的はつぎの2つだ。

①地球上に降る雨の場合、雨滴に働く重力と雨滴の落下速度に比例する空気抵抗との釣り合いの結果、雨滴の落下速度には終末速度が存在することが知られている。コロニーに降る雨の場合はどうなのだろうか？

②コロニーの回転に伴って見かけ上の力としてコリオリの力が働くが、その結果、雨滴はコロニー内でどんな軌跡を描くのだろうか。

以下、2節で終末速度などの簡単なおさらいをした後、3節で基礎方程式、4節で解析的な結果、5節で数値計算の結果について述べる。結論に急ぎたい方は、最後の6節へスキップしてもらえばいいだろう。なおコロニーとしては、ウインドウ

ウインド(松田1983年)の影響を避けるために、密閉型スペースコロニーを想定する。

2. おさらい

たいていの力学のテキストには出ている話だが、雨滴の運動と回転系の運動について少し触れておこう。

2.1. 雨滴の終末速度

速度に比例する空気抵抗を受ける落体(たとえば雨滴)の運動方程式は、水平方向を x 軸、鉛直上向き(重力加速度と反対方向)を z 軸とする座標系で、

$$mu' = -ku \quad (1x)$$

$$mv' = -mg - kv \quad (1z)$$

と表せる。ただし m は落体の重量、 g は重力加速度の大きさ、 k は空気抵抗の大きさ、そして (u, v) はそれぞれ速度の x 成分、 z 成分である。またプライム(')は時間微分を表す。

時刻 $t=0$ で雨滴が原点($x=z=0$)に静止している($u=v=0$)という初期条件のもとで上式を解く。まず(1x)式は解くまでもなく、常に、

$$u=0, z=0 \quad (2)$$

という解を与える。一方、(1z)式を時間で積分し、初期条件を考慮すると、 z 方向の速度として、

$$v=(mg/k)(e^{-kt/m}-1) \quad (3)$$

という解が得られる。さらに初期条件を考慮してもう1回積分すると、

$$z=-(mg/k)[t+(m/k)(e^{-kt/m}-1)] \quad (4)$$

となる。

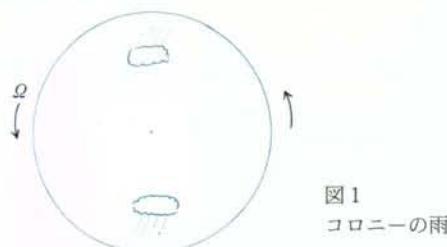


図1
コロニーの雨

十分時間が経てば ($t \rightarrow \infty$), (3) 式や (4) 式の指標項は 0 になるので,

$$v \rightarrow v_\infty = mg/k \quad (t \rightarrow \infty) \quad (5)$$

$$z \rightarrow -(mg/k)t \quad (t \rightarrow \infty) \quad (6)$$

となる。

とくに (5) 式から、雨滴の落下速度は一定の値 v_∞ に近づく。これが雨滴の終末速度である。これは (1z) 式に戻って考えればもっとよくわかる。すなわち雨滴の落下は重力によって次第に加速されるが、雨滴に働く重力 ($-mg$) と速度に比例する抵抗 ($-kv$) が釣り合った段階でネットな力 (mv') が 0 となり、雨滴は一定の終末速度に達する。

2.2. レコード盤の運動

図 2 のように角速度 Ω で回転する滑らかな円盤の中心から、時刻 $t = 0$ に速度 v で質点を射出したとしよう。円盤に固定した座標系すなわち円盤と同じ角速度で回転する座標系として、原点を円盤の中心においていた極座標 (r, ϕ) を用いる。運動の初期条件は、 $t = 0$ で $r = 0$, $\phi = 0$ である。

質点の半径方向の運動に対しては力は働くないので、明らかに、

$$r = vt \quad (7)$$

である。方位角 ϕ 方向の運動に対しても力は働くがないが、円盤が角速度 Ω で回転しているために、円盤に乗った人間からみれば、(慣性系で直線運動する) 質点は角速度 $-\Omega$ で反対方向に回転するようみえ：

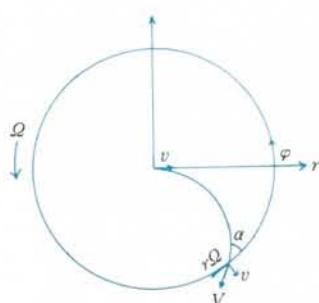


図 2
CD 上の運動

$$\phi = \Omega t \quad (8)$$

となる。この結果、円盤上で質点はスパイラル状の軌跡を描く。

なお、回転系において、質点の半径方向の速度は v 、方位角方向の速度は $-r\Omega$ なので、速度の大きさ V は、

$$V = \sqrt{v^2 + (r\Omega)^2} = v \sqrt{1 + \Omega^2 t^2} \quad (9)$$

となる(図 2 参照)。また半径 r で質点の軌跡が円周方向となす α (図 2 参照) は、

$$\tan \alpha = v / (r\Omega) = 1 / (\Omega t) \quad (10)$$

である。すなわち時間が経つほど α は小さくなる。

3. 基礎方程式

角速度 Ω で一様回転している系(回転系)における質量 m の質点の運動方程式は、ベクトル的に、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{k}{m} \mathbf{v} \quad (11)$$

と表せる。ただし \mathbf{r} は位置ベクトル、 \mathbf{v} は速度ベクトルで、 $\boldsymbol{\Omega}$ は角速度ベクトルとする。重力や電磁気力のような外力はなく、回転は定常とした(第 1 回の式参照)。右辺第 1 項が遠心力、第 2 項がコリオリ力である。そして最後の項が速度に比例した抵抗を表す(k は抵抗の係数で一定とする)。

さらに図 3 のような回転中心を原点とする直角座標 (x, y) を用いて成分を書き下すと、

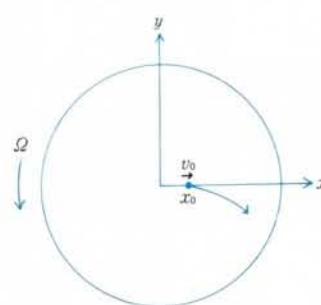


図 3
座標系と初期条件

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \Omega^2 x + 2\Omega v - \frac{k}{m} u \quad (12x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \Omega^2 y - 2\Omega u - \frac{k}{m} v \quad (12y)$$

となる。ただし (u, v) は速度の x, y 成分とする。

この(12)式が、角速度 Ω で回転するスペースコロニー内を空気抵抗を受けながら落下する雨滴の運動を支配する基礎方程式である。

4. 解析的な解

すぐ(12)式を数値計算してもいいのだが、(12)式は微分方程式としては比較的簡単な形をしている方なので、解析的な取り扱いも少ししておきたい。

解析的に扱う際、(12)式は x と y に関して連立方程式になっているので、 x と y それぞれに関する微分方程式に変形しておこう。まず(12x)式を t で微分して x の t に関する 3 階微分の式をつくる。そのとき右辺(第2項)で y の t に関する 2 階微分の項が出るので、そこへ(12y)式を代入する。その結果、

$$x''' = -3\Omega^2 x' + (k/m)^2 x' - \Omega^2(k/m)x + 2\Omega^3 y$$

となる。ただしプライム(')は時間微分を表す。この式をもう1回 t で微分し、右辺最後の y の t に関する微分の項へ(12x)式を代入すると、結局、 x の t に関する 4 階微分の式が得られる：

$$x'''' + [2\Omega^2 - (k/m)^2]x'' + \Omega^4 x = 0 \quad (13x)$$

同じようにして、 y についても、

$$y'''' + (2k/m)y''' + [2\Omega^2 + (k/m)^2]y'' - 2\Omega^2(k/m)y' + \Omega^4 y = 0 \quad (13y)$$

が得られる。

4.1. 抵抗のない場合

最初に空気抵抗がない場合($k=0$)を考えよう(連載第1回参照)。このとき、(12)式および(13)式はそれぞれ、

$$x'' = u' = \Omega^2 x + 2\Omega y' \quad (14x)$$

$$y'' = v' = \Omega^2 y - 2\Omega x' \quad (14y)$$

$$x'''' + 2\Omega^2 x'' + \Omega^4 x = 0 \quad (15x)$$

$$y'''' + 2\Omega^2 y'' + \Omega^4 y = 0 \quad (15y)$$

となる。

まず(15x)式は線形の微分方程式であり、 $ABCD$ を定数として、

$$x = (A + B\tau) \sin \tau + (C + D\tau) \cos \tau \quad (16)$$

という形の一般解を持つ。ただしここで簡単のために、無次元化した時間として、

$$\tau = \Omega t \quad (17)$$

という変数を導入した。この(16)式を τ で微分して、

$$x' = u = -(C - B + D\tau) \sin \tau + (A + D + B\tau) \cos \tau \quad (18)$$

となる。

一方(15y)式は(15x)式と同形なので、同じ形の一般解を持つが、 $EFGH$ という定数を増やすのもしんどいので、(16)式と(18)式を(14x)式に代入して y' を求め、それを積分して、

$$y = -(C + D\tau) \sin \tau + (A + B\tau) \cos \tau \quad (19)$$

$$y' = v = -(A + D + B\tau) \sin \tau - (C - B + D\tau) \cos \tau \quad (20)$$

という一般解を得る。

さらに時刻 $t = 0$ ($\tau = 0$) に x 軸上で $x = x_0$ ($y = 0$) にあった雨滴が、初速 $v = v_0$ ($u = 0$) で落下を始めたという初期条件を置けば、上の一般解(16)–(20)からその初期条件を満たす解として、

$$x = x_0 \tau \sin \tau + (x_0 + v_0 \tau) \cos \tau \quad (21)$$

$$u = -v_0 \tau \sin \tau + (v_0 + x_0 \tau) \cos \tau \quad (22)$$

$$y = -(x_0 + v_0 \tau) \sin \tau + x_0 \tau \cos \tau \quad (23)$$

$$v = -(v_0 + x_0 \tau) \sin \tau - v_0 \tau \cos \tau \quad (24)$$

が得られる。

回転の中心($x = x_0 = 0$)から初速 v_0 で射出する場

合、当然ながら、これらの解はすでに2.2節で述べた(7)式や(8)式に帰着する。

一方、雨滴の場合にもっともらしいのは、 $x=x_0$ から初速 $v_0=0$ で落下を始める場合だろう。このとき xy 成分のままでは見通しが悪いので、図2のような回転中心に原点をおいた極座標 (r, ϕ) で表すと、雨滴の位置 (r, ϕ) とそれぞれの方向の速度成分 $(r', r\phi')$ は、

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=x_0\sqrt{\tau^2+1} \quad (25)$$

$$r'=x_0\tau/\sqrt{\tau^2+1} \quad (26)$$

$$\tan\phi=(\tau-\tan\tau)/(\tau\tan\tau+1) \quad (27)$$

$$r\phi'=-x_0\tau^2/\sqrt{\tau^2+1} \quad (28)$$

となる。この場合も、たとえば(25)式からわかるように、 τ が十分大きくなれば、 r は中心から射出した場合の(7)式に類似する。また速度の大きさ V も、

$$V=\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{(r')^2+(r\phi')^2}=x_0\tau \quad (29)$$

となり、 τ が大きいところで、(9)式に似てくる。最後に、雨滴の軌跡と円周のなす角 α は、

$$\tan\alpha=1/\tau \quad (30)$$

と表され、(10)式と同じ形になる。

とくに(30)式から、たとえば $\tau=\Omega t=1$ のときに、雨滴の落下方向が動径方向と45°の角度をなすことがわかる。このときの半径は $r=\sqrt{2}\times x_0$ である。言い替えれば、コロニーの半径を R としたとき、雨滴が落下を始める高さが、 $x_0 < R/\sqrt{2}=0.7$ であれば、地表ではかなり横殴りの雨が降る。

4.2. 抵抗のある場合

つぎの空気抵抗がある場合($k\neq 0$)を考えよう。この場合も、空気抵抗がない場合と同じく解析的に調べることができる。(13)式はやはり線形微分方程式であり、一般解を書き下すことができる。途中についてはもう省略して、結果のみ記そう。空気抵抗の大きさを表すパラメータを、

$$\varepsilon=k/(m\Omega) \quad (31)$$

とおけば、 A から L を定数とし、 $\tau=\Omega t$ を無次元化した時間として、(13)xの一般解は ε の値によって以下のように表せる。

(1) $\varepsilon>2$ (空気抵抗が大きい場合) :

$$x=Ae^{\lambda\tau}+Be^{-\lambda\tau}+Ce^{\mu\tau}+De^{-\mu\tau} \quad (32)$$

ただし λ, μ は定数で、

$$\lambda=\sqrt{\varepsilon^2/2-1+\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2/4-1}} \quad (33a)$$

$$\mu=\sqrt{\varepsilon^2/2-1-\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2/4-1}} \quad (33b)$$

である。

(2) $\varepsilon=2$ (空気抵抗が中くらいの場合) :

$$x=(E+F\tau)e^\tau+(G+H\tau)e^{-\tau} \quad (34)$$

(3) $\varepsilon<2$ (空気抵抗が小さい場合) :

$$x=(Ie^{\varepsilon\tau/2}+Ke^{-\varepsilon\tau/2})\sin(\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\tau)+(Je^{\varepsilon\tau/2}+Le^{-\varepsilon\tau/2})\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\tau) \quad (35)$$

y 方向の(14)y式の一般解も似たようなものになる。

初期条件は与えていないが、これらの一般解からおおよそのことはわかる。空気抵抗の大きさを表す ε の値によって解の形は異なるが、重要なのは、時間が十分経ったとき($\tau\rightarrow\infty$)の解の振舞いである。 $\tau\rightarrow\infty$ の極限で、指数関数の肩の符号がマイナスの項は0になるが、プラスの項は発散する。そして(32)式、(34)式、(35)式をみると、常に発散する項が存在する。したがって ε の値によらずに、 $\tau\rightarrow\infty$ で x の値は指数的に発散する。すなわち終末速度は存在しない。

スペースコロニー内の雨滴の落下に対して終末速度が存在しない理由は、加速度の大きさが一定ではなく、半径に比例して大きくなるためである。

5. 数値的な解と具体的な数値

5.1. 数値解の例

まあ結局のところ、雨滴の落下の軌跡がどうなるかをみるには、(12)式の解を数値的に計算するのが一番でっとり早いようだ。数値的に解くために(12)式を無次元化しよう。無次元化した時間 $\tau = \Omega t$ と無次元化した空気抵抗の大きさ $\epsilon = k/(m\Omega)$ を用いると、(12)式は、

$$x'' = x + 2y' - \epsilon x \quad (36x)$$

$$y'' = y - 2x' - \epsilon y \quad (36y)$$

となる。ただしここで、 $' = d/d\tau$ である。さらにこれらの式を連載第1回と同じようにルンゲ・クッタ・ギル法で解く（というよりこちらが先にありきだったのだが）。

ϵ の値をいろいろ変えて雨滴の軌跡を求めたのが、図4から図6である。初期条件はどの場合も、 $\tau = 0$ での雨滴の初期位置がコロニーの半径の0.1から0.9で、静止した状態から落下を始めたと仮定した。図4は $\epsilon = 0$ の空気抵抗がない場合で、4.1節で解析的に求めた解をグラフにしたものだと思えばよい（第1回参照）。図5は空気抵抗が少しある場合 ($\epsilon = 1$) で、さらに図6は空気抵抗が大きい ($\epsilon = 10$) 場合である。また同じ初期半径から落下を始めた場合のいろいろな ϵ の値に対する軌跡を、図7に示す。

5.2. ϵ の値

ところで実際に空气中を落下する雨滴の場合、空気抵抗の大きさ $\epsilon = k/(m\Omega)$ はどれくらいの値になるのだろうか？ 実はこれが一番問題である。ここでは以下のように見積った。

ものの本によると、半径 r の小球（たとえが雨滴）に働く空気抵抗の大きさ k は、

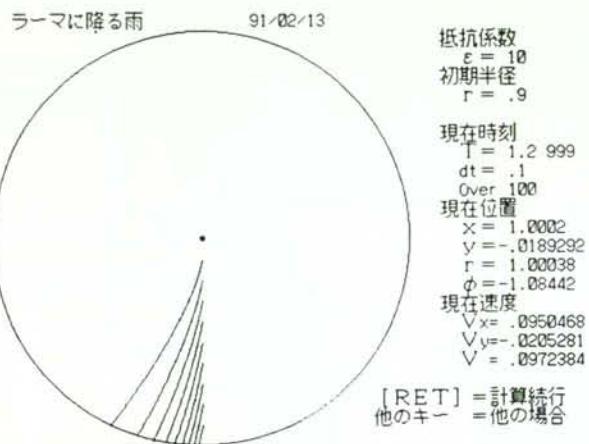
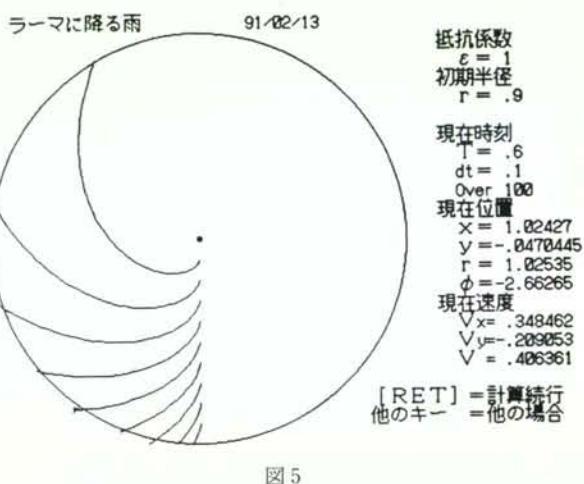


図 6

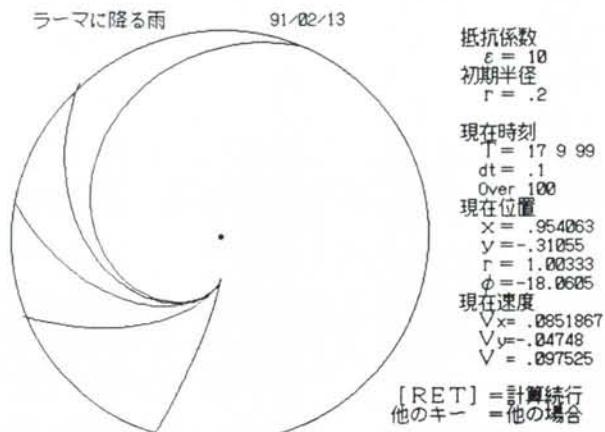


図 7

$$k = 6\pi\eta r \quad (37)$$

と表される。ただしここで、

$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Nsm}^{-2} \quad (38)$$

は、1気圧で20°Cの空気の粘性係数である。雨滴の半径 r は、典型的には、

$$r = 1 \text{ mm} \quad (39)$$

ほどなので、質量 m は、

$$m = 4.189 \times 10^{-6} \text{ kg} \quad (40)$$

となる。これらの式から、

$$k/m = 0.082 \text{ s}^{-1} \quad (41)$$

が得られる。一方、地表付近での半径 $r = 1 \text{ mm}$ の雨滴の終末速度 v_∞ はおよそ 7 m/s くらいと測定されている。(5)式より、 $k/m = g/v_\infty$ なので、 g に地表重力加速度を入れて、

$$k/m = 1.4 \text{ s}^{-1} \quad (42)$$

が得られる。(41)式と(42)式から、 k/m として、大体、

$$0.082 \text{ s}^{-1} < k/m < 1.4 \text{ s}^{-1} \quad (43)$$

としよう。

コロニーの半径を R 、表面での遠心力加速度を g としたとき、回転角速度 Ω は $\Omega = \sqrt{g/R}$ である。回転による遠心力加速度は 1 G (= 9.8 ms⁻²) だとし、半径 R を km 単位で測れば、

$$\Omega = 0.1/\sqrt{R_{\text{km}}} \text{ s}^{-1} \quad (44)$$

と表せる。(43)式を(44)式で割って最終的に、

$$0.82\sqrt{R_{\text{km}}} < \varepsilon < 14\sqrt{R_{\text{km}}} \quad (45)$$



図 8

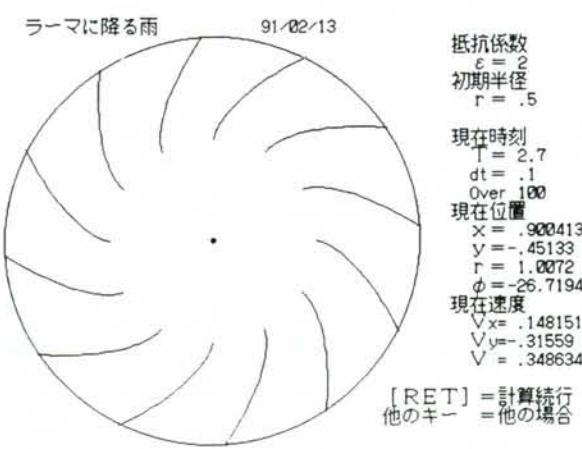


図 9

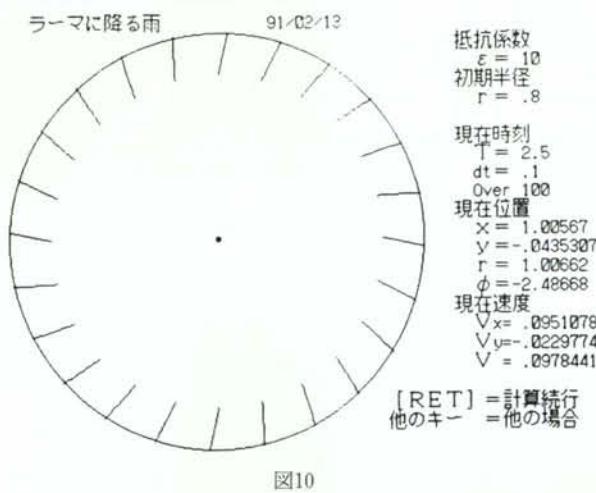


図10

が得られる。(45)式から表面加速度が1Gで回転しているコロニーの場合、半径が1kmより十分小さければ ϵ は1より十分小さく半径が1km程度ならば ϵ は1程度さらに半径が1kmより大きければ ϵ も1より大きくなることがわかる。

また雨滴が落下を始める高度だが、地球上の雲の場合、雲底は典型的には高度500m程度だ。

これらを考え合わせると、半径の小さいコロニーの場合($R \ll 1\text{km}$)、無次元化した空気抵抗も小さく($\epsilon \ll 1$)、さらに雨滴は回転軸近傍から落下を始めるので、きつく巻いたスパイラル状に落下する(図8)。そして雨は横殴りの降り方をするだろう。コロニーの半径が少し大きくなると($R \approx 1\text{km}$)、空気抵抗 ϵ も1程度になり、雨滴はコロニーの中空から落下を始める(図9)。この程度の降り方なら、少し傘を傾ければ十分である。最後にラーマのような大きなコロニーでは($R \gg 1\text{km}$)、地球上の雨の降り方とそんなに違わないと思われる(図10)。

6. まとめ

以上をまとめれば、当初の目的に対して以下の結論が得られた。

①コロニー内では、遠心力による(疑似重力)加速度は一定ではなく、回転軸からの距離に比例

して増加する。そのため、雨滴(一般には落下粒子)に対して終末速度は存在しない。

②コロニー内で雲の発生が地球上と類似している場合(とくに雲底が地表500mから1kmにあり、そこから雨滴の落下がはじまる場合)、半径が数kmより小さなコロニーでは常に横殴りの雨が降る。ラーマのような半径が10kmのオーダーになると、雨の降り方は地球上とあまり変わらない。より一般的に言えば、コロニーの半径の3割より高い位置から雨滴が落下を始め、かつ空気抵抗が小さい場合、地表ではかなり横殴りの雨が降る。

とはいものの、ここでは問題を随分簡単化している点には注意する必要がある。今回の考察にあたって、気象学の本を2冊買い込んでじめて気象学を勉強したが、結構面白かった反面、奥が深くて一夜づけではとても全容を理解できていない。専門家の方のご批判を願う次第である。またグローバルな大気構造にはじまり、大気循環、風など局地的な空気の流れ、大気中の波動現象、降雨、降雪など降水一般、さらには海の構造、海流、海の波、河川、湖など陸水現象などなど、地球の場合と比較してみても、スペースコロニーの気象学・海洋学・陸水学にはまだ解くべき問題が残っているように思える。

ところでそういうガンドム(パートI)でアムロがララアと初めて会ったときには、ごく普通の雨が降っていたなあ。人工雨の場合にどうなるかも今後の課題である。

参考文献

- 福江 純 1990, ハードSF研究所公報, 39, 46.
- O'Neill, G. K. 1974, *Physics Today*, Sept., 32.
- Matsuda, T. 1983, *J. Phys. Soc. Japan*, 52, 1904.
- アーサー・C・クラーク『宇宙のランデブー』(南山 宏訳) 早川書房 (1985年)
- 小倉義光『一般気象学』東京大学出版会 (1984年)
- ポートン『大気物理学』みすず書房 (1981年)