

# 円筒世界の大気波動

—スペースコロニーの物理学⑧—

福江 純

〈大阪教育大学 〒582 大阪府柏原市旭ヶ丘4〉

## 1. 円筒世界の波動現象 (続)

スペースコロニー内における波動現象に関して、今回は円筒海の波について報告したが、今回は大気中の波についての解析結果を報告したい。海の波すなわち非圧縮性流体として近似できる流体中の波と、大気の波すなわち圧縮性流体である気体中の波との大きな違いは、後者では(前者で存在した)浮力を復元力とする重力波(横波)のモードに加えて、圧力を復元力とする音波(縦波)のモードが存在することである。さらに地球表面やスペースコロニー内部のような回転系においては、場合によって、遠心力を復元力とする慣性波や、コリオリの力を復元力とするロスビー波などというものも存在するから厄介である。

また水面のように自由表面を持った流体の場合には、表面を伝わる表面波(前回考察したもの)と流体内部を伝わる内部波があるが、大気の場合は自由表面などというものはないので(すなわち空気はスペースコロニー全体にあまねく満ちているということ)、存在するのは内部波だけである。

## 2. コロニー大気中の波

地球大気を伝わる波動は今までによく解析されている。スペースコロニーの大気中の波動も、基本的なやり方は地球大気(等温成層大気)の場合と同じである。ただし地球大気の場合とスペースコロニー大気の場合の大きな違いとして、まず一つはスペースコロニーの大気は平行平板とみなせない。すなわち場合によっては大気が円筒形状を

していることを考慮しなければならない。またもう1点は、疑似重力加速度が一定ではなく、場所(半径)によって異なる点である。さらに疑似重力加速度はコロニーの回転に伴う遠心力によって提供されるので、その影響もある。

具体的な解析方法については、かなり専門的になるし、また相当の紙数を必要とするため、ここでは省略し、以下では最終的な結果のみ示す。興味のある方は参考文献を参照して欲しい。

さて座標系としては、図1のようにコロニーの回転軸を $z$ 軸とする円筒座標( $r, \varphi, z$ )をとろう。コロニーの回転角速度を $\Omega$ とすれば、遠心力に伴う疑似重力加速度は $g=r\Omega^2$ である。また解析自体は一般的に行うことができるが、以下では簡単のために軸対称の波動を考えよう(図2)。

### 2.1. 分散関係式

波の波数 $k(=2\pi/\lambda; \lambda$ は波長)と角振動数 $\omega$ の間の関係式を、分散関係式と呼んでいる。分散関係式がわかれば、(少なくとも局所的には)波の

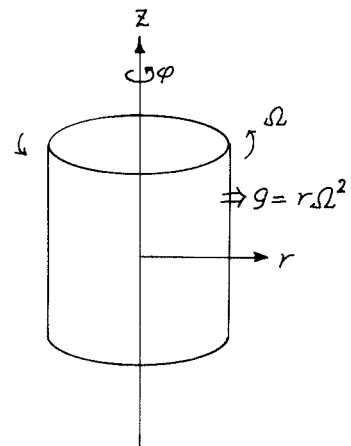


図1 スペースコロニーの座標図

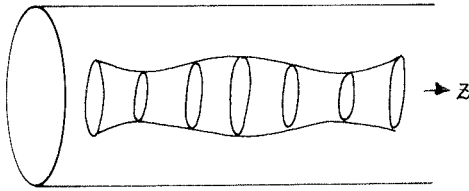


図2 軸対称な波

伝播の性質が大体わかるので、波動の解析では分散関係式を求めることが一つのゴールである。

さて円筒型スペースコロニーの大気中を伝わる軸対称な波動の分散関係式としては、最終的に、

$$\omega^4 - (c_s^2 k^2 + \chi^2 + \omega_{ac}^2) \omega^2 + c_s^2 k_z^2 (\chi^2 + N^2) = 0 \quad (1)$$

という式が得られた。ただしここで、

$$k^2 = k_r^2 + k_z^2 \quad (2)$$

$$\chi^2 = 4\Omega^2 \quad (3)$$

$$\omega_{ac}^2 = N^2 + \frac{(2-\gamma)^2}{4} \frac{g^2}{c_s^2} + \frac{3c_s^2}{4r^2} \quad (4)$$

$$N^2 = (\gamma-1) \frac{g^2}{c_s^2}; g = r\Omega^2 \quad (5)$$

である。また  $k_r$  は  $r$  方向の波数、 $k_z$  は  $z$  方向の波数、 $\gamma$  は空気の比熱比、 $c_s$  は音速である。さらに  $\chi$  はエピサイクリック振動数、 $\omega_{ac}$  は音波遮断振動数、 $N$  は浮力振動数(プラントバイサラ振動数)と呼ばれるものである。加速度  $g$  が  $r$  に依存するので、 $N$  や  $\omega_{ac}$  も  $r$  に依存する。

分散関係式(1)式は  $\omega^2$  について2次式であり、2種類の解  $\omega_+^2$  と  $\omega_-^2$  を持つ ( $\omega_+^2 \geq \omega_-^2$ )。2次方程式の解の公式から、これら2種類の解は、

$$\omega_+^2 = \frac{1}{2} [c_s^2 k^2 + \chi^2 + \omega_{ac}^2 + \sqrt{(c_s^2 k^2 + \chi^2 + \omega_{ac}^2)^2 - 4c_s^2 k_z^2 (\chi^2 + N^2)}] \quad (6)$$

$$\omega_-^2 = \frac{1}{2} [c_s^2 k^2 + \chi^2 + \omega_{ac}^2 - \sqrt{(c_s^2 k^2 + \chi^2 + \omega_{ac}^2)^2 - 4c_s^2 k_z^2 (\chi^2 + N^2)}] \quad (7)$$

と表される。

## 2.2. 診断図と伝播図

上の分散関係式の解の振舞いを調べるために、

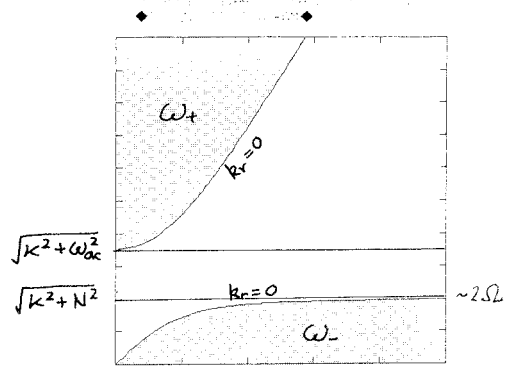


図3 コロニー大気の診断図

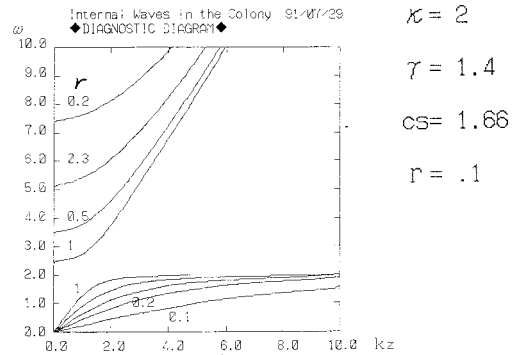


図4 コロニー大気の診断図(数値例)

診断図(波数と角振動数の平面上に解をプロットしたもの)と伝播図(座標と角振動数の平面上に解をプロットしたもの)を作成してみよう。

まずコロニー大気の場合、横軸に  $z$  方向の波数  $k_z$  を、縦軸に角振動数  $\omega$  をとった診断図は図3のようになる。平行平板大気の場合と同じく、波には、音波モードと重力波モードがある。すなわち  $\omega_+$  は診断図の上の方に偏在しているし、 $\omega_-$  は下の方に偏在している。前者が音波モード、後者が重力波モードである。

一方、地球大気のような平行平板大気の場合と異なる点としては、一つは、音波モードの波が存在しなくなる最低の振動数が、音波遮断振動数  $\omega_{ac}$

ではなく、 $\sqrt{\kappa^2 + \omega_{ac}^2}$ であることだ。これは回転の効果の影響である。またもう一つは、やはり回転の効果の影響として、重力波モードの波が存在しなくなる最大の振動数が、浮力振動数 $N$ ではなく、 $\sqrt{\kappa^2 + N^2}$ であることである。

具体的に数値計算したものを図4に示す。ただし図4では、物理量の単位として、後述するラーマの設定値を用いた。そして長さの単位としてラーマの内径 $R (=8 \text{ km})$ 、時間の単位としてラーマの回転角速度の逆数 $1/\Omega (=38.2 \text{ s})$ をとって、パラメータを無次元化した。したがってたとえば速度の単位は、内径での回転速度 $R\Omega = 209 \text{ m/s}$ になる。その結果、音速を $c_s = 347 \text{ m/s}$ とすると、無次元化した音速として、 $347/209 = 1.66$ が得られる。また $\kappa = 2\Omega$ は、無次元化すると2になる。これらが図4で用いられたパラメータである。

さらに、伝播図は図5のようになる。図5の横軸は、コロニーの半径 $r$ 、縦軸は角振動数 $\omega$ である。平行平板大気の場合と異なって、 $g$ や $\omega_{ac}$ や $N$ が半径 $r$ の関数であるため、 $\omega_+$ や $\omega_-$ も $r$ に依存する。すなわちある振動数 $\omega$ の波を考えたときには、その(軸対称な)波が伝播できる領域と伝播できない領域が存在する。具体的に数値計算したものを図6に示す。パラメータは図4と同じである。

コロニー大気中の軸対称波動に関する以上の性質については、次節でもう一度まとめよう。

### 3. ラーマへの応用

さて以上得られた結果をもとに、ラーマの場合の具体的な数値を求めてみよう。

まずラーマの大気成分および物理状態は地球の空気と同じと仮定する。すなわち、

$$\text{気体定数 } R_g = 8.314 \times 10^7 \text{ erg g}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (8)$$

$$\text{温度 } T_0 = 300 \text{ K} \quad (9)$$

$$\text{平均分子量 } \mu = 29 \quad (10)$$

$$\text{比熱比 } \gamma = 7/5 \quad (2 \text{ 原子分子}) \quad (11)$$

とする。このとき音速は、

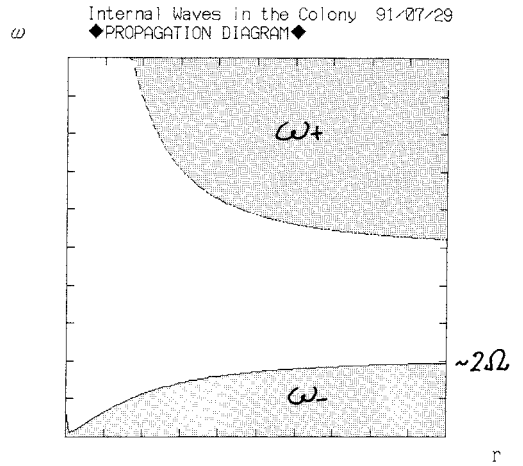


図5 コロニー大気の伝播図

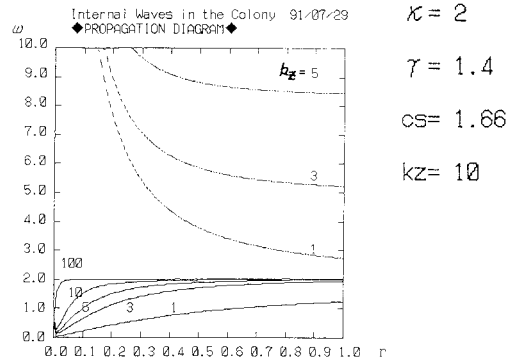


図6 コロニー大気の伝播図 (数値例)

$$c_s = \sqrt{\gamma R_g T_0 / \mu} = 347 \text{ m s}^{-1} \quad (12)$$

になる。これも地球大気の場合と同じである。

さらにラーマの諸元をまとめておくと、

$$\text{ラーマの円筒世界の内径 } R = 8 \text{ km} \quad (13)$$

$$\text{ラーマの自転周期 } 2\pi/\Omega = 4 \text{ 分} \quad (14)$$

したがって、

$$\text{ラーマの回転角速度 } \Omega = 0.0262 \text{ s}^{-1} \quad (15)$$

$$\text{ラーマの回転角速度の逆数 } \Omega^{-1} = 38.2 \text{ s} \quad (16)$$

$$\text{内径での回転速度 } R\Omega = 209 \text{ m s}^{-1} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{内径での遠心力加速度 } R\Omega^2 &= 5.48 \text{ m s}^{-2} \\ &= 0.56 G \end{aligned} \quad (18)$$

となる。このときスケールハイト $H$ は、

$$H = \sqrt{2R_g T_0 / \mu} / \Omega = 15.8 \text{ km} \quad (19)$$

になる。

### 3.1. 高周波領域 (音波)

まず波数が非常に大きくまた振動数が非常に大きな極限 (高周波領域) を考えよう。より厳密には、

$$\omega^2 \gg \kappa^2 = 4\Omega^2 \quad (20)$$

では、(1)式から、

$$\omega = c_s k \quad (21)$$

となるが、平行平板大気の場合と同様、これは音波に外ならない。

ところで人間の可聴範囲の音の振動数は、大体、

$$\nu = 100\text{Hz} \sim 1000\text{Hz} \quad (22)$$

である。したがって、その範囲の音波の角振動数は、

$$\omega = 2\pi\nu = 600 \sim 6000\text{s}^{-1} \quad (23)$$

程度になる。(15)式と(23)式を比べればわかるように、通常の音波は、(20)式の条件を十分満足する。

さらに音速を  $c_s = 347\text{ m/s}$  とすると、(21)式より、通常の音波の波数は、

$$k = \omega/c_s = 1.8 \sim 18\text{ m}^{-1} \quad (24)$$

あるいは対応する音波の波長は、

$$\lambda = c_s/\nu = 2\pi/k = 3.5 \sim 0.35\text{ m} \quad (25)$$

となる。音波の波長は、案外と長いんだ (とはいうものの、コロニーのサイズに比べれば、十分短い)。

このような高周波の領域では大気中の波は通常の音波であり、 $0 \leq r \leq R$  の全領域で伝播する。

### 3.2. 低周波領域

しかし波の角振動数  $\omega$  がコロニーの回転角振動数  $\Omega$  程度になると、あるいは波の波長  $\lambda$  がコロニーのサイズ  $R$  ぐらいになると、いろいろなモードが現れてくる。まず、媒質が圧縮性を持つために存在する、圧力を復元力とする音波のモード。2番目に、媒質が (今の場合は遠心力によって) 成層構造をしているために存在する、浮力を復元力とする重力波のモード。そしてさらに3番目として、2節の診断図などではあまり明らかではないのだが、媒質が回転しているために (軸対称でも) 存在する、遠心力を復元力とする慣性波のモ

ードである。最後の慣性波のモードは、常に重力波のモードや音波のモードとカップルしているために、診断図ではあまり明らかではなかった。これらの3つのモードを順にみていく。

#### (1) 慣性波

慣性波は遠心力を復元力とする波である。すなわち平衡状態である半径を回転している粒子があって、角運動量を保存したままその半径が少し小さく (大きく) になると、遠心力が強 (弱) くなるために、もとの方向に戻される。こうして起こる振動をエピサイクリック振動とか慣性振動と呼ぶ。またそのエピサイクリック振動の角振動数すなわち慣性波の角振動数をエピサイクリック振動数  $\kappa$  と呼び、コロニーの内部のように剛体回転している系では、(3)式のように回転角速度の2倍になる。すなわち、慣性波の特徴的な振動数は、

$$\kappa = 2\Omega = 0.0524\text{ s}^{-1} \quad (26)$$

である。

またこれに対応する振動数  $\nu$  と周期  $T_1$  は、それぞれ、

$$\nu = \kappa/2\pi = 0.00833\text{ Hz} \quad (27)$$

$$T_1 = 1/\nu = 2\text{ 分 (回転周期の半分)} \quad (28)$$

になる。

ちなみに地球上では、慣性波は周期  $2\pi/(2\Omega \sin\phi)$  の振動現象として、海中などで検出されている。ただしここで  $\Omega$  は地球の回転角速度であり、 $\phi$  は緯度である。また  $2\Omega \sin\phi$  はコリオリパラメータと呼ばれている。

#### (2) 重力波

重力波の特徴的な振動数は、(5)式で定義される浮力振動数 (プラントバイサラ振動数) である。数値を入れると、

$$N = (\gamma - 1)^{1/2} r \Omega^2 / c_s \\ = 0.01(r/R)\text{s}^{-1} \quad (29)$$

になる。浮力振動数は半径によって変わり、コロニーの中心では0になる。すなわち中心軸上では、重力波は伝播できない。そこでは加速度が0なのだから当然である。

対応する振動数  $\nu_0$  と周期  $T_0$  は、それぞれ、

$$\nu_0 = N/2\pi = 0.00159 (r/R) \text{ Hz} \quad (30)$$

$$T_0 = 1/\nu_0 = 10.5 (R/r) \text{ 分} \quad (31)$$

になる。

慣性波と重力波の式を比較すると、慣性波の方が特徴的な振動数が大きく、重力波に比べて卓越していることがわかる。

### (3) 音波

低周波領域における音波の特徴的な角振動数は、(4)式で定義される音波遮断振動数である。数値を入れると、

$$\begin{aligned} \omega_{ac} &= \sqrt{N^2 + (2-\gamma)^2 g^2 / (4c_s^2) + 3c_s^2 / (4r^2)} \\ &= 0.011066 \sqrt{(r/R)^2 + 11.52(R/r)^2} \\ &= 0.0392 \text{ s}^{-1} \quad (r=R) \end{aligned} \quad (32)$$

になる。

さらに対応する振動数  $\nu_{ac}$  と周期  $T_{ac}$  は、それぞれ、

$$\nu_{ac} = \omega_{ac} / 2\pi = 0.00623 \text{ Hz} \quad (r=R) \quad (33)$$

$$T_{ac} = 1/\nu_{ac} = 2.67 \text{ 分} \quad (r=R) \quad (34)$$

になる。ただしこれらの値は内壁 ( $r=R$ ) で評価した。

### (4) カップリング

実際には、慣性波と音波や重力波はカップリングしている。その結果、波数が大きい極限で重力波モードが漸近していく振動数は  $N$  ではなく、 $\sqrt{x^2 + N^2}$  である (図3)。数値を入れれば、

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + N^2} &= 0.0524 \sqrt{1 + 0.0364(r/R)^2} \text{ s}^{-1} \\ &= 0.05334 \text{ s}^{-1} \quad (r=R) \end{aligned} \quad (35)$$

になる。また対応する周期は、

$$\begin{aligned} 2\pi / \sqrt{x^2 + N^2} &= 120 / \sqrt{1 + 0.0364(r/R)^2} \text{ s} \\ &= 1.96 \text{ 分} \quad (r=R) \end{aligned} \quad (36)$$

である。

一方、音波モードが存在しなくなる振動数は、 $\omega_{ac}$  ではなく、 $\sqrt{x^2 + \omega_{ac}^2}$  であり (図3)、数値を入

れば、

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \omega_{ac}^2} &= \\ &= 0.0524 \sqrt{1 + 0.0446(r/R)^2 + 0.5134(R/r)^2} \text{ s}^{-1} \\ &= 0.0654 \text{ s}^{-1} \quad (r=R) \end{aligned} \quad (37)$$

となる。また対応する周期は、

$$\begin{aligned} 2\pi / \sqrt{x^2 + \omega_{ac}^2} &= \\ &= 120 \sqrt{1 + 0.0446(r/R)^2 + 0.5134(R/r)^2} \text{ s} \\ &= 1.60 \text{ 分} \quad (r=R) \end{aligned} \quad (38)$$

である。

## 4. まとめと議論

以上の数値をみてわかるように、コロニー内の低周波の波では、慣性波のモードが卓越しており、音波モードの振動数 (周期) も重力波モードの振動数 (周期) も共に、慣性波の振動数 (周期) に近いものになっている。言い替えれば、低周波領域では、遠心力が波の伝播を支配しているといってもよい。そのときの特徴的な周期は、コロニーの自転周期の半分程度、ラーマの場合で言えば2分弱である。

さらに何度も触れたことだが、伝播できる波の振動数にはギャップが存在する (図4や図5参照)。あるいは波の周期でいえば、(36)式と(38)式から、ラーマの場合コロニーの内壁で評価すると、1.60分より短い周期の波は音波として伝わり、1.96分より長い周期の波は重力波として伝わるが、

1.60分と1.96分

の間の波は伝われない。このギャップは、低周波領域における情報の伝達という観点からは興味深いものがあるだろう。

またここでは簡単のために軸対称で  $z$  方向に伝わる波について調べたが、非軸対称で回転方向に伝わる波についてもある程度の予想ができる (図7)。まず高周波の波はやはり音波であり、コロニー内のどの方向へも自由に伝わる。一方、低周波の波でとくに振動数が小さく重力波モードしか存

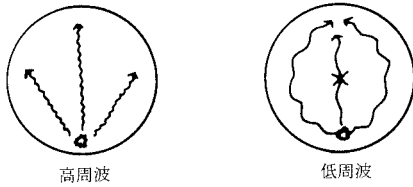


図7 波の伝播

在しない場合、重力波は加速度の小さい回転軸付近を伝播できないので、たとえばコロニーの反対側へ直接伝播できない。図7のように回転方向に沿って伝播することになるだろう。その際、回転方向と反回転方向に伝わる波の速度は異なるはずである。

以上では進行波を中心に考えたが、最後に定在波について少し触れておく。z方向に伝わる波のうちで、非常に波長の長い波は、コロニーの端の影響を受けて、定在波になる(図8)。このとき図8からわかるように、波の波長をλ、コロニーの長さをLとすると、λ/2の整数倍がLに等しくなければならない。すなわち、

$$n \times (\lambda/2) = L; n=1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

したがって、定在波の場合はz方向の波数は任意ではなく、

$$k_z = 2\pi/\lambda = n\pi/L; n=1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

のようなとびとびの値をとる。とくに図4などで計算に用いている、コロニーの内径Rで無次元化した波数は、

$$\begin{aligned} Rk_z &= n\pi(R/L) \\ &= 0.16n\pi \\ &= 0.50n \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ただしR=8 km, L=50 kmとした(ラーマの値)。

スペースコロニーの物理学、一応、今回をもって一区切りとさせていただきます。最後あたりはかなり消化不良を起こした人も少なくないかと思いますが、もしそうなら申し訳ありません。一方で、SFと天文学と物理学の学際領域にあるスペースコロニーの問題について、少しでも興味を持

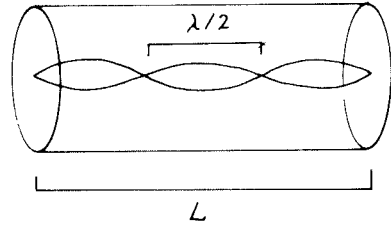


図8 定在波

っていただけたなら幸いです。いずれにせよ長くつき合って頂いた皆さんに感謝します。また今回の連載にあたって、いろいろと世話をいただいた天文月報編集理事の梅村雅之氏と半田利弘氏にも、この場を借りて深く感謝いたします。

### 参考文献

福江 純 1991, ハード SF 研究所公報, 41, 60.  
 アーサー・C・クラーク『宇宙のランデブー』(南山 宏訳) 早川書房 (1985年)  
 ランダウ&リフシッツ『流体力学』東京図書 (1970年) ……これはバイブル  
 森岡茂樹『気体力学』朝倉書店 (1982年) ……大学レベルのテキスト  
 木村龍治『地球流体力学入門』東京堂出版 (1983年) ……大学レベルのテキスト  
 加藤正二『天体物理学基礎理論』ごとう書房 (1989年) ……大学院レベルのテキスト

☆

☆

☆

☆