2体の軌道決定法の新展開 —VERA・JASMINE等の高精度位置天文観測を期待して—

浅　田　秀　樹
〈弘前大学理工学部　〒036–8561 弘前市文京町3〉
e-mail: asada@phys.hirosaki-u.ac.jp

万有引力中の2体の軌道決定の問題とは,「2天体の軌道が視線に対して傾斜している場合，それらを天球面に射影した位置が観測量となる．その観測から真の軌道要素をいかに決定するのか？」という逆問題で，最も古典的な問題の一つである．これに対する片方の星が見えない「位置天文的連星」の場合にも使える「完全な厳密解」を筆者らはついに発見した．この発見に至る経緯と関連する話題について紹介する．

1. はじめに

紙と鉛筆のみで宇宙の研究をしたと家族に話しても，信じてくれない．世の中で天文学の研究といえば，望遠鏡で観測する，ロケットで衛星を打ち上げる，あるいは，コンピューターに向かって計算するものだと考えられているようだ．

ほとんどの読者は，万有引力に対する2体問題をかつて習った覚えがあると思う．2体の位置ベクトルを用いたニュートンの運動方程式から始めて，相対ベクトルを使って運動方程式を書き直して積分すると，楕円，放物線，双曲線の3種類の軌道が出てくる話である．2体の公転軌道面は，力学の計算ではあらかじめ特定している．しかし，実際の天文観測ではそうではない．食連星のような特殊な場合を除いてはあらかじめわからないのである．このため,「視線に対して公転軌道面が傾斜した2天体の天球面上の位置観測（図1）から，真の軌道要素をいかに決定するのか？」という軌道決定に関する問題があり，それが本稿で主題である.「そんなこと，もうわかっているじゃない！」と皆さんお思いだろう．かく言う私も，ほんの少し前までそう思っていた．

もちろん，軌道決定の問題には，ガウス，ラプラスらの偉人たちも取り組んだ．しかし，実は，未解決問題が残っていたのだ．筆者らがそれを厳密な形で解決した[1]．それも，三角関数と2乗根という初等関数だけ用いてである．要するに,「大

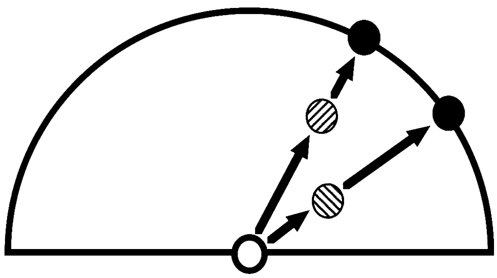

図1　天球面への投影．中心の円は観測者，内側が斜線の円は実際の星の位置，内側が塗りつぶされた円は星が天球面に射影された位置を表す．

学 1 年生でもわかる厳密解」の発見である．2 節では天体軌道決定の歴史を振り返り，3 節では筆者らの発見までの経緯を述べる．厳密解をすぐに見たい，知りたい方はこれらを飛ばして 4 節に進んでほしい．最後に，まさにコロンブスの卵のような発見話で，面白いなあと感心していただければ誠に幸いである．

2.　軌道決定法の歴史

ヨハネス・ケプラーが天体の運行に関する以下の法則を見いだしたのは，17 世紀始めのことである．

(1) 軌道は中心を一つの焦点とする円錐曲線（楕円，放物線，双曲線）をなす．

(2) 面積速度は一定．

(3) 楕円運動の周期の 2 乗は軌道長半径の 3 乗に比例する．

ここで，面積速度とは，天体が円錐曲線の焦点の周りに単位時間に掃く面積のことである．

さて，悠久の昔に話を戻そう．1801 年元日，シチリア島にあるパレルモ天文台の台長ピアッツィが小惑星を人類史上初めて発見した．この記念すべき小惑星第 1 号ケレスが太陽に接近したため間もなく観測できなくなり，行方不明になってしまった．見つけ出そうとして，同年，ガウスが最初に軌道計算法を編み出した．その結果，ケレスが翌年無事再発見された．

他の惑星に起因する摂動を無視する範囲において，太陽系内の軌道決定の問題は，太陽を一つの焦点とする 2 次曲線のうち，観測点を通過するものを見つけ出す問題に帰着する．多くの場合，太陽を回る一つの天体の見える方向を少なくとも 3 回異なる時刻に観測すればよい．それ以降の観測データを加味した微分補正を考慮し，より信頼できる軌道決定の手法を与えたのがラプラスである．

その後，天文観測家たちは太陽系外の天体観測を行い，そして，多くの連星を発見してきた．そのとき，観測から真の軌道要素を決定する逆問題が生じる[2), 3)]．以下では，2 天体のケプラー運動のみ考える．すなわち，観測者と連星の共通重心は静止していると仮定する．

例えば，円を斜めから眺めよう．見かけ上，楕円になる．しかし，この見かけの楕円と，ケプラー軌道を真上から見たものとを，この段階では区別できない．真の軌道を知るには，見かけの軌道の形だけでは不十分で，星の位置の時間変化の情報が不可欠である．

実視連星の場合，連星を構成する両方の星が共に観測できる．この場合，主星から伴星の相対位置が直接の観測量となる．この相対ベクトルは，始点を焦点とする楕円上を終点が動く．よって，実視連星の場合，「焦点の位置がわかっている 2 次曲線で観測点を通過するものを探す」という問題に帰着される．

この問題を 1827 年に最初に解いたのは，フランス人のサバリ (Savary) で，次いで，エンケ (Encke, 1832)，3 番手がハーシェル (Herschel, 1833) である．その後も多くの研究者によりさまざまな軌道計算法が編み出された．なかでも，コワルスキ (Kowalsky, 1873)，ティーレ (Thiele, 1883)，そしてインネス (Innes, 1926) の方法がよく知られている．そして，シリウスの観測により，その伴星が白色矮星であることがわかった話は非常に有名である．

さて，2 天体の素性を考えてみよう．19 世紀までは，星とはあまねく光り輝いて見えるものだと思われていた．よって，昔は実視連星で事足りた．しかし，実視連星でない場合もある．それこそ，「位置天文的連星」と呼ばれる“新種”の連星系で，ブラックホール，中性子星等のように光らない，もしくはあまりに暗過ぎて見えない，いわば暗黒天体と光っている星とのペアである．現在は集光能力の限界で検出できなくても，将来観測精度があがれば見えるものもあるだろう．この新種の連星系に対して，「相対位置」は観測量ではな

い．一方の端点が観測できないからである．この位置天文的連星の軌道決定の厳密解こそが，未発見であった．

さらに，ポアンカレ以降，現在に至るまで，3 体以上のカオスの研究が天体力学における主流となっていった．こうして，2 体の天体力学はほとんど顧みられなくなり，力学や天体力学の教科書に「歴史的事実」としておさまっている[4]．こうした歴史を考えると，われわれが見つけなければ，今回の厳密解は永久に失われていたかもしれない．

3.　発見までの経緯

まず，筆者が軌道決定になぜ興味をもったのか？ 1995 年マイヨールらが，太陽系以外で，初めて惑星を発見した[5]．恒星・惑星の系も，恒星は共通重心周りを公転する．このわずかなふらつき運動の視線方向の成分をマイヨールらは検出したのである．この話が，筆者にも興味深かった．では，もし位置天文によって恒星の位置揺らぎの視線に垂直な成分が測れたとしたら，系外惑星がもっとわかるのではないか．これまでにも連星が位置天文的観測によって調べられてきた．単独星なら年周視差を使って幾何学的距離（視差距離）が決められる．最近では，ヒッパルコス衛星を用いたサーベイ観測が有名だ[6)–8]．しかし，このヒッパルコス衛星でさえ，星の明るさにもよるが 300 光年程度までしか測量できない．天の川銀河の大きさは円盤部分だけで，半径数万光年である．これくらいの範囲まで星の視差距離や速度を直接測れれば，銀河の重力多体系としての相空間（統計力学で現れる，位置・運動量の空間）での分布関数が観測的に決定できる．重力多体系の分布関数はその遠距離相互作用のため，マックスウェル分布にはならない．実は，天の川銀河における星の分布関数でさえまだよくわかっていないのが現状である．この決定を目指して，各国が位置天文観測衛星の計画をもっている[8]．ヨーロッパの GAIA[9]，米国の SIM[10]，そして日本の JASMINE である[11]．すでに，電波天文の分野では，わが国の VERA と呼ばれる長基長の電波干渉計を用いた観測が世界をリードしつつあるのだ[6),7]．

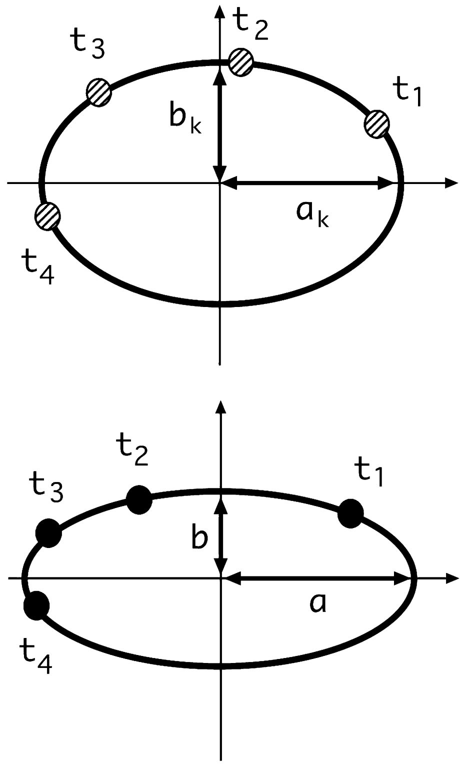

図 2　星の位置の時間変化の概念図．上の図は，元のケプラー軌道での四つの異なる時刻での星の位置．下の図は，これらの位置を天球面に射影したもの．

筆者は，こうした観測の進歩を期待して，まず手始めに，研究室の学生に卒業研究で，系外惑星による主星のふらつきを位置天文的に観測するとどうなるかについて計算してもらった．多数の理論曲線のテンプレートを用意してフィットさせた．しかし，スマートではない．それでは，その射影した星の位置から真の軌道要素をどうやって逆算すればよいのか？ そのとき，筆者にはこれに対する答えがわからなかった．これこそ，「未解決問題」だったのだ．

この卒業研究の指導を終えた直後から1年間，筆者は文部科学省の在外研究員として外国にいた．研究室に戻り，当時修士課程の大学院生だった赤坂俊郎君*1と彼の指導教官である葛西真寿助教授に再会した．赤坂君から，修士論文に向けた「系外惑星の探査法」に関する研究の準備状況の報告を受けた．惑星があると主星はふらつく．彼は天球面上に射影した位置揺らぎのグラフを，適当なパラメーターの値に対して作成していた（図2）．その図を用いながら，逆問題について再び考えてみた．当然，誰も解析的な解はわからなかった……．筆者はグラフをしばらく眺めていた．数週間経った頃，突然，ひらめいた．

4. 厳密解の発見

厳密解について詳しく説明しよう．太陽系の場合，あるいは，実視連星の場合，視楕円の焦点の位置が分かっているので，最低三つの観測点があれば，視楕円を決定できる．一方，位置天文的連星の場合，式(1)のとおり楕円を表す一般の2次曲線は五つのパラメーターがすべて自由なため，最低五つの観測点が必要である．

$$\alpha\bar{x}^2+\beta\bar{y}^2+2\gamma\bar{x}\bar{y}+2\delta\bar{x}+\varepsilon\bar{y}=1 \qquad (1)$$

新しい座標 (x, y) を用いて，この求めた視楕円を標準形に書き直す．

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

ただし，a と b は視楕円の長半径と短半径である．

各時刻 t_i における星の位置は，$\mathbf{P}_i=(x_i, y_i)=(a\cos u_i, b\sin u_i)$ である．ここで u_i は，視楕円における離心角と呼ばれる．簡単のため，反時計回りの運動を考える．つまり，$i>j$ に対して，$u_i>u_j$ とする．以下の導出を時計回りの場合に対応させるには，後で出る式(5)の符号を反転させればよい．

楕円軌道の場合には，位置を時間の関数として陽に表すことが不可能である．力学の教科書にも載っているケプラーの方程式は，軌道面上の天体の位置を表す離心近点離角 E_i と時刻 t_i を結びつけるもので，

$$t_i=t_0+\frac{T}{2\pi}(E_i-e_K\sin E_i) \qquad (3)$$

と書ける．ここで，T は公転周期，t_0 は近点通過時刻を表す．この方程式は，離心率 e_K がゼロ（円軌道）と1（直線軌道）の場合を除いて，厳密には解けない「超越方程式」と呼ばれる．したがって，離心率で級数展開して逐次的に計算することがよく行われる[4]．

筆者の素朴な発想は，「解析的に解けない式（ケプラー方程式）が複数個登場することは，解析的に解けないことの証明にはならないのでは」というものであった．もしうまい組み合わせを考えれば何とかなるかもしれない……．

試しに，観測間の時間間隔を $T(j, k)=t_j-t_k$ で定義しよう．

一方，ケプラー軌道の未知量は，長半径 a_K，離心率 e_K，そして公転周期 T の三つである．よって，時間間隔変数の独立な数が三つになるように，四つの観測点 $t_4>t_3>t_2>t_1$ を選ぶ．例えば $T(3, 1)=T(3, 2)+T(2, 1)$ なので，簡単のため $\{T(2, 1), T(3, 2), T(4, 3)\}$ を考える．観測時刻そのものではなく，この時間間隔を使うのがポイントである．少なくとも，近点通過時刻 t_0 という余計なものが現れない．

さて，図2を見て気づくことは，天球面に射影した後，元の共通重心は，視楕円の焦点とは異なる場所に移っていることである．もう少しじっく

---

*1 他大学の法学部卒業後，弘前大学大学院理学研究科修士課程へと転身してきたというユニークな経歴の持ち主である．

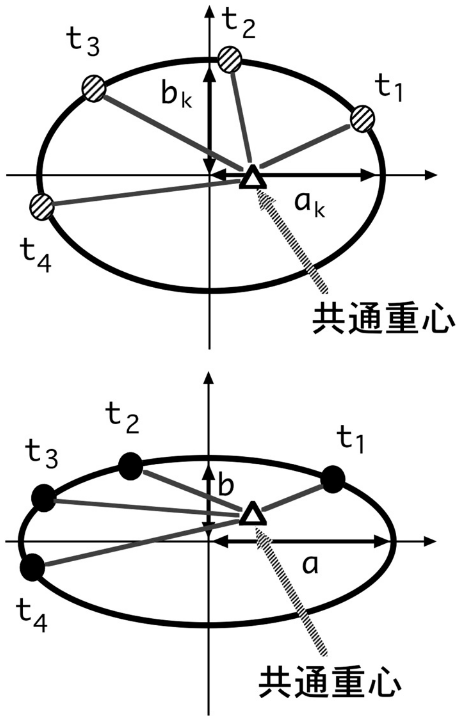

図 3　星の位置の時間変化の概念図（その 2）．図 2 に共通重心の位置（三角）を加えた．共通重心を頂点とする各パイ図形が見える．

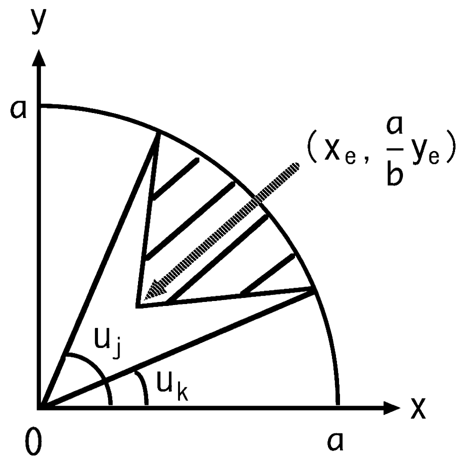

図 4　パイ図形．視楕円における図形全体を y 方向に a/b 倍した．斜線部分の面積を b/a 倍すれば，本来の歪んだパイ図形の面積が得られる．結果は式 (5) で与えられる．

り図を眺めてみよう．すると，共通重心を頂点にもつ歪んだパイ図形が浮かびあがってくる（図 3）．このパイ図形の正体は，元のケプラー軌道の楕円をある焦点を頂点に各時間間隔で分割したパイ図形を射影したものに過ぎない．当然，この焦点こそ共通重心である．すると，軌道傾斜の因子がすべてのパイ図形に共通なので，いわば，「視楕円上の面積速度一定」の法則

$$\frac{S(j,k)}{T(j,k)}=\text{一定} \tag{4}$$

に気づく．ここで，射影後のパイ図形の面積を $S(j,k)$ で表した．式 (4) は，共通重心を射影した位置を決定する方程式なのだ．

それでは，共通重心を射影した位置を $P_e=(x_e, y_e)$ と記して，面積 $S(j,k)$ を求めよう．それには，円になるように短軸方向に引き伸ばし，円上のパイの面積計算に帰着させるのが非常に簡単である（図 4）．結果は，

$$S(j,k)=\frac{1}{2}ab\left[u_j-u_k-\frac{x_e}{a}(\sin u_j-\sin u_k)+\frac{y_e}{b}(\cos u_j-\cos u_k)\right] \tag{5}$$

となる．式 (4) は，未知量 (x_e, y_e) に対する連立 1 次方程式となり，解はすぐ求まる．その解は

$$x_e=-a\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1} \tag{6}$$

$$y_e=b\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1} \tag{7}$$

と表せる．ここで，A_j の具体形は，

$$A_j=T(j+1,j)\sin u_{j+2}+T(j+2,j+1)\sin u_j-T(j+2,j)\sin u_{j+1} \tag{8}$$

であり，B_j と C_j は，A_j にて，各々，$\sin u\to\cos u$ および $\sin u\to u$ としたものである．

さて，真の軌道や軌道傾斜に関する情報を取り

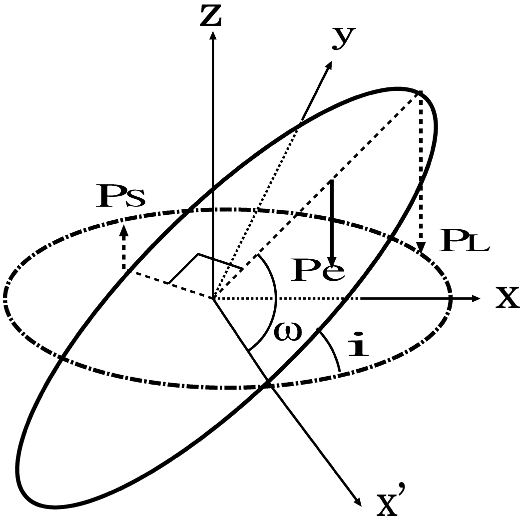

図 5　ケプラー軌道を射影したもの．視線は z 軸方向下向き．実線はケプラー軌道を，破線は視楕円を表す．

出そう．

視楕円の中心から点 P_e を通る半直線と視楕円との交点を P_L と記す（図 5）．すると，視楕円の中心と P_L を結ぶ線分は，P_e で分割されている．その比こそ，e_K である．なぜなら，線分の比は射影しても変わらないからである．よって，

$$e_K = \sqrt{\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2}} \tag{9}$$

が得られる．

軌道傾斜等を決めるには，もう一工夫が必要である．

詳細を省いて，結果のみを記そう．図 5 のように，軌道傾斜角と近点引数を i と ω で記す．軌道傾斜角を決める式は

$$\cos i = \frac{1}{2}\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 4}\right) \tag{10}$$

で，ξ は以下のとおり，初等関数で定義される．

$$C = \frac{1}{e_K}\sqrt{x_e^2 + y_e^2} \tag{11}$$

$$D = \frac{1}{abe_K}\sqrt{\frac{a^4 y_e^2 + b^4 x_e^2}{1 - e_K^2}} \tag{12}$$

$$\xi = \frac{(C^2 + D^2)\sqrt{1 - e_K^2}}{ab} \tag{13}$$

残りも順次求めることができて，

$$a_K = \sqrt{\frac{C^2 + D^2}{1 + \cos^2 i}} \tag{14}$$

$$\cos 2\omega = \frac{C^2 - D^2}{a_K^2 \sin^2 i} \tag{15}$$

となる．こうして，観測量から初等関数のみを使って，ケプラー軌道の長半径 a_K，離心率 e_k，軌道傾斜角 i，そして近点引数 ω を書き表すことができた．すなわち，「2 体の軌道決定の問題」を厳密に解いたのだ．

5.　おわりに

2 体の軌道決定の問題は，近代ヨーロッパ人の独壇場であった．しかし，現代の日本人がオリジナルな発見をした．過去の厳密解は特殊な場合である実視連星のみに適用可能であり，今回の厳密解は，位置天文的連星も含めたあらゆる場合に当てはまる[1]．すでに述べたように，これからの 21 世紀中に，位置天文観測による宇宙の精密測量が大きく進むに違いない[6), 8)]．その中で，今回の公式が今後の天文学の発展に寄与してくれることを筆者は願う．

最後になったが，この小文が無事掲載された暁には，紙と鉛筆のみの天文学研究という「珍獣」が現在なお生き残っていることを，この解説記事を見せて信じてもらおうと考えている．

謝　辞

原稿に対して貴重なコメントをいただいた多くの方々に感謝いたします.

参考文献

1) Asada H., Akasaka T., Kasai M., 2004, PASJ 56 L35
2) Aitken R. G., 1964, *The Binary Stars* (Dover, NY)
3) 渡辺敏夫, 1964,「新天文学講座 14: 天体の軌道計算」(恒星社)
4) 木下　宙, 1998,「天体と軌道の力学」(東京大学出版会)
5) Mayor M., Queloz D., 1995, Nature 378, 355
6) 笹尾哲夫, 小林秀行, 川口則幸, 真鍋盛二, 2002, 日本物理学会誌 57, 314
7) VERA: http://veraserver.mtk.nao.ac.jp/index-J.html
8) 郷田直輝, 2000, 天文月報 93, 60
9) GAIA: http://astro.estec.esa.nl/GAIA/
10) SIM: http://sim.jpl.nasa.gov/
11) JASMINE: http://www.jasmine-galaxy.org/

Breakthrough in Orbit Determination of a Binary
—In Expectation of Astrometric Observations with High Precision such as VERA and JASMINE—

Hideki Asada
Faculty of Science and Technology, Hirosaki University, Hirosaki 036–8561, Japan

Abstract: There exists a very classical inverse problem regarding orbit determination of a binary system: “When an orbital plane of two bodies is inclined with respect to the line of sight, observables are their positions projected onto a celestial sphere. How do we determine the orbital elements from observations?” An “complete exact solution” has been found. It is reviewed with some related topics.