相対論的輻射流体力学のススメ
1　定式化の現状と問題点

福　江　　　純
〈大阪教育大学　〒582–8582 柏原市旭ヶ丘 4–698–1〉
e-mail: fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

相対論的輻射流体力学の分野は，相対論的天体現象においては基礎的分野にもかかわらず，定式化の段階で不完全で未完成であり，まだまだ基礎研究が必要だし，解決すべき課題（お宝）がたくさん残っている．数年ほど修行してようやくレベル 50 ぐらいには達したと思うが，まだまだ先は長そうだ．そこで，とりあえず，現時点までにわかってきたこと，発掘できたお宝，発掘中のもの，隠されている謎など，数回にわけて報告してみたい．

1.　古い中心であり新しい辺境である分野

天体現象を理論的に研究するとき，用いる物理（力学，電磁気学，流体力学，プラズマ物理学）や考慮する素過程（化学反応，電離，素粒子反応）により，千差万別な取扱い方法がある．天体はしばしば光（電磁波）を放射しており，天体の性質や振舞いを調べるのは，天体から放射された光を観測するのが一般的であることから，光の放射過程や伝わり方を調べる手法は，非常に重要な理論的分野となっている．

もう少し定義的に書いてみると，基本的な天体である星や降着円盤などはおもに水素からできており，地球大気は窒素分子と酸素分子が主成分である．これら「気体・ガス (gas)」中における光，とくに大量の光子の流れである「放射・輻射 (radiation)」の伝わり方を調べる学問分野が，「放射輸送・輻射輸送 (radiative transfer)」だ．またガスの運動まで同時に調べる場合には，「放射流体力学・輻射流体力学 (radiation hydrodynamics)」と呼ばれる（図 1）．さらに相対論的効果まで考慮すると「相対論的輻射流体力学 (relativistic radiation hydrodyanamics)」となる．近年では，磁場まで考慮して，「（相対論的）輻射磁気流体力学 (relativistic radiation magnetohydrodynamics)」まで行われようとしている．

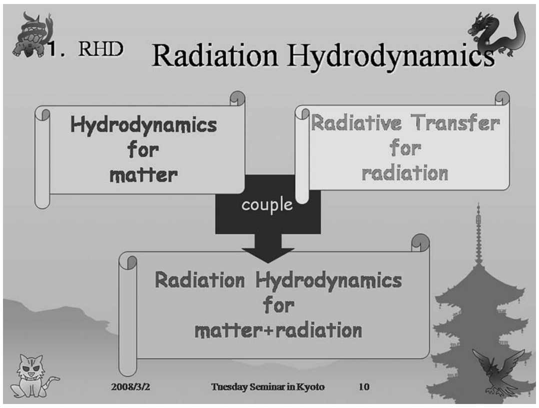

図 1　流体力学（hydrodynamics）と輻射輸送（radiative transfer）と輻射流体力学（radiation hydrodynamics）のおおまかな関係．

さて，天体における放射輸送の問題は，1920 年代にミルン[1] (E. A. Milne) やエディントン[2] (A. S. Eddington; 1882–1944) が始めて以来，解析的および数値的な取り扱いにおいてたいへんに長い歴史があり，近年では相対論的な数値シミュレー

ションも行われている．また対象とする天体は，当初は恒星大気や星雲そして地球大気などが中心だったが，最近では降着円盤や系外惑星，超新星爆発，初期宇宙，さらにブラックホール降着流，相対論的天体風，宇宙ジェットやガンマ線バーストなど，相対論的天体現象にも深く関係してきている．理論的分野としては，実に古くて，さまざまな手法（道具）が開発された古都であると同時に，常に未知の対象が現れ新たな手法（武器）が必要とされる謎に満ちた辺境でもある．

そのような世界へ進むのはなかなか勇気もいるしレベル (Lv) も必要だが，そろそろ失うものもないし Lv10 ぐらいになった数年前，誘惑に負けてついに足を踏み入れてしまった（笑）．案の定，先達の残した大量の地図やら山のような武器や道具の転がる複雑怪奇な迷路で，モンスターこそいない（だろう）が，迷い込んだら抜け出せない．しかしやはり予想どおりにめったやたら面白く，奥深いがお宝もごろごろ転がっている世界でもあった．こんな面白い分野が十分に知られていないのはもったいないだろう．本音を言えば，宝は独り占めにしたいところだが，力量的にも時間的にも無理っぽいので，後から探索する人の道しるべも兼ねて，表の世界にも紹介しようと思う．

幸か不幸か，恒星大気などでの輻射輸送を研究していた世代があらかた引退してしまい，輻射輸送自体の研究とくに相対論的輻射輸送にかかわる研究者（レイダース）があまりいない時代でもある．しかも相対論的モーメント定式化は不完全で未完成である．まだまだ基礎研究が必要だし，宝玉もごろごろ転がっていると思われる．一方で，数値シミュレーションには輻射輸送がどんどん取り入れられ，ますます輻射流体力学の必要性・重要性が高くなっている．したがって，今後はさらに発展していく分野であることは間違いない．

ぼくなどはまだこの世界では新参者だし，もっと先まで進んでいる先達もいるが，新参者の目から見た現状を紹介するのにも意味はあるだろう．

数年前に，まだ Lv20 ぐらいのとき，一度，報告書[3]を提出した．そのときのファイル名には番号 1 が振ってあるので，すぐに続きを書くつもりだったようだが，忘れてしまったらしい．その後も少しは研鑽を積んで，現在は自称 Lv50 ぐらいにはなったと思うけど，先はまだまだ長そうだし，Lv もまだ 1 桁ぐらい足らないだろう．ここらで自分自身の整理も兼ねて，いくつかの成果を報告しておくことにした．最初の報告書に目を通しておいてもらうとよりわかりやすいとは思うが，一応，独立に報告する予定である．

今回は，次回以降への導入として，輻射流体の取り扱いの概要を簡単にまとめ，相対論的輻射流体力学の定式化について，現状と問題点を整理する．またつづく連載で，相対論的輻射流体に関する応用や，問題点の解決への手がかりなどについての，最近の研究成果（探索結果）を報告する．

以下，**2** 節では輻射輸送と輻射流体力学について，その定式化や目的などを簡単に復習し (Lv20)，**3** 節でエディントン近似と拡散近似の違いを述べ (Lv20)，さらに **4** 節で変動エディントン近似と流束制限拡散近似を説明し (Lv30)，**5** 節で相対論的輻射流体力学について定式化と問題点を整理し (Lv40)，最後に **6** 節で未解決の課題などを提示してみたい (Lv60〜)．なお，レベル (Lv) については，学部で Lv1 から Lv3 ぐらい，大学院で Lv10 から数十として設定してある．

2.　輻射輸送と輻射流体力学の定式化

本節ではまず最初に，流体力学の定式化と比べながら，輻射流体力学の定式化を概観しておきたい．本稿では定式化の考え方やとらえ方を紹介するだけなので，きちんとした式などは，末尾に挙げた教科書を参考にしてほしい．

流体力学と輻射流体力学は，前者がガス系の力学，後者が“光子ガス”系の力学であり，基本方程式や定式化の手続きはほとんど同じである．大きく異なるのは，流体近似が希薄プラズマも含め

多くの局面でおおむね成り立っているのに対し（もっともそうでない場合も少なくないが），“輻射流体近似”が成り立つ条件が厳しくて破れやすいことだ．それが，相対論的輻射流体力学の定式化が不完全な原因でもあり，解決すべき課題が転がっている理由でもある．

2.1　ボルツマン方程式と輻射輸送方程式

多粒子系の振る舞いは，位相空間中での分布関数の時間変化を追いかければ，原理的には完全に記述できる．

たとえば，ガス系の場合，まず，ある 1 個の粒子を考えたとき，時刻 t における粒子の位置 $\boldsymbol{r}$ と速度 v がわかれば，その粒子の状態は完全に決まる（古典的決定論の立場であり，量子的な不確定性は考えない）．そのとき，通常の空間座標の代わりに，三つの空間座標と三つの速度座標をもつ，「位相空間 (phase space)」と呼ばれる 6 次元空間を考えると，時刻 t における粒子の状態は位相空間中の 1 点で指定できる（図 2）．そして粒子の振舞いは，時間的に変化する位相空間中の軌跡で表すことができる．もし粒子が N 個あれば，$6N$ 次元の位相空間を考えれば，N 個の粒子の状態は 6 N 次元位相空間中の 1 点で指定でき，多粒子系全体の振舞いは，原理的には，位相空間中の軌跡で表せるはずである（やはり古典的決定論の立場であり，カオスは考えない）．

このとき，粒子の状態を表す関数，すなわちある時刻に位相空間中のある一点（ある位置とある速度）にある粒子の個数を表す関数を「分布関数 (distribution function)」f と呼ぶ（厳密には，特定の一点にすると個数は 0 になるので，微小領域で考える）．また，位相空間中での分布関数の変化を記述する基本方程式・原理方程式が「ボルツマン方程式 (Boltzman equation)」である（図 3）．

もし粒子同士の相互作用がなければ，位相空間中での分布関数は保存されるが，ガス系では一般に粒子同士の「衝突 (collision)」があるため，その相互作用が分布関数の変化を引き起こす．ボルツマン方程式では，位相空間中での分布関数の変化を左辺に，衝突項（一般には源泉項）を右辺に置くならわしである．

ちなみに，ボルツマン (Ludwig Eduad Boltzmann; 1844–1906) が自分の名が冠されることになる方程式を導いたのは，1872 年のことだ．ガスが熱平衡になっている場合は，Maxwell–Boltzmann 分布と呼ばれる有名な解があるが，平衡からずれている場合は，ごく例外的な場合を除き，ボルツマン方程式の解は見つかっていない．

さて，基本方程式の立て方は光子ガス系でも同じで，方程式の形も似ている（図 3）．異なる点の一つは，通常のガスではガス粒子はいろいろな速度をもつが，光子の速度は，速度の大きさが光速度に固定されているため，速度ベクトルの代わりに，光子の進む方向を表す「方向ベクトル (direction cosine)」を考えることだ．また位相空間中での光子の分布を表す関数として，ふつうは光子の

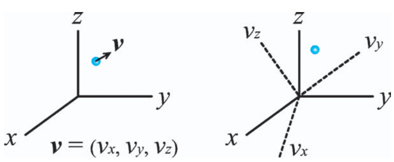

図 2　通常の実空間（左）と位相空間（右）．

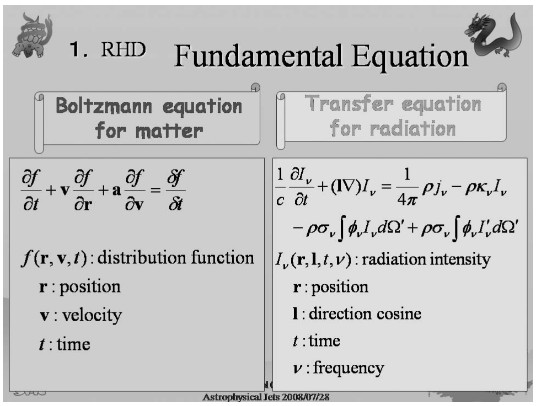

図 3　ガス系の振舞いを記述するボルツマン方程式と光子ガス系の振舞いを記述する輻射輸送方程式.

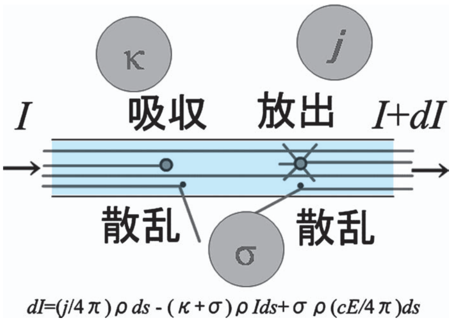

図4　光線中の光の吸収・放出および散乱.

個数ではなくエネルギーに注目して,「輻射強度 (radiation intensity)」I を考えることが多い（これは慣例的なものであり，光子の個数で考えることもできる．実際，相対論的な定式化では，保存量である光子の個数で立式してから，輻射強度に戻したりする.）．すなわち，ある位置である方向に流れる光子流―光線 (ray)―のエネルギーの時間変化を考えることになる.

ただし，特殊相対論の範囲内では，光子は重力などを受けないので，重力加速度などによって光子の分布が変化する状況は考えない．さらに，光子同士は衝突しないが，光子がガスから「放出 (emission)」されたり，光子がガスに「吸収 (absorption)」されたり，ガスに「散乱 (scattering)」されたり，光子とガスは相互作用する（図4）．そこで，基本方程式の右辺には，これら光子とガスの相互作用の項をすべて書き並べることになる.

こうしてできあがった光子ガス系の基本方程式・原理方程式が,「輻射輸送方程式 (radiative transfer equations)」である.

この輻射輸送方程式は光子ガスの振舞いを原理的には完全に記述しているはずなので，輻射輸送方程式を解けば輻射輸送の問題は原理的には完全に解ける．未知関数の放射強度に関しては線形方程式で，数学的にひねくれた非線形項もない．実際，ボルツマン方程式にせよ，輻射輸送方程式にせよ，最近では数値シミュレーションで力ずくで解いてしまうことも多い．ただし，一般には，もう少し解きやすくするために，衝突項を単純化したり（ガス系での Fokker–Planck 方程式や光子系での Kompaneets 方程式)，次に述べるように，速度空間/方向空間で方程式を丸めたりする.

なお，輻射輸送方程式は，数学的にひねくれた非線形項はないのだが，右辺のガスとの相互作用の項で，散乱項が輻射強度の積分を含んでいるため，単なる偏微分方程式ではなく,“微分積分方程式”になっている．解析的な計算においても数値シミュレーションでも，この散乱項が，輻射輸送方程式を解きにくくしている元凶の一因になっている.

ちなみに，だれが最初に輻射輸送方程式を導いたのか，ちょっと調べただけではよくわからなかった．ご存じの方はご教示願いたい.

2.2　流体力学方程式と輻射モーメント方程式

ガス系にせよ，光子ガス系にせよ，基本方程式は独立変数（三つの座標成分，三つの速度成分，時間，場合によっては振動数）が多く，扱いにくいことこの上ない．またたいていは，物質量/輻射量や速度/輻射エネルギー流束など，局所的な物理量の時間変化が知りたいわけで，個々のガス粒子の速度分布だとか光線の方向分布などまではわからなくてもいい．そこでふつうは，速度空間/方向空間については局所的に平均化して，実空間での物理量の変化を表す方程式を導く.

たとえば，ガス系の場合，衝突が十分に頻繁に起こり，局所的にはガスは十分に緩和され熱平衡になっていると仮定する（恒星系や希薄プラズマでは成り立たない)．そして，ボルツマン方程式を速度空間で積分して，局所的な物理量に関する方程式に変換していく（図5, 図6).

まずボルツマン方程式を速度空間で単純に積分したもの（0次のモーメント）が,「連続の式 (continuity equation)」である．分布関数の速度積分はガスの「密度 (density)」(0次モーメント量）となり，個々の粒子の速度の平均はガス流全体の

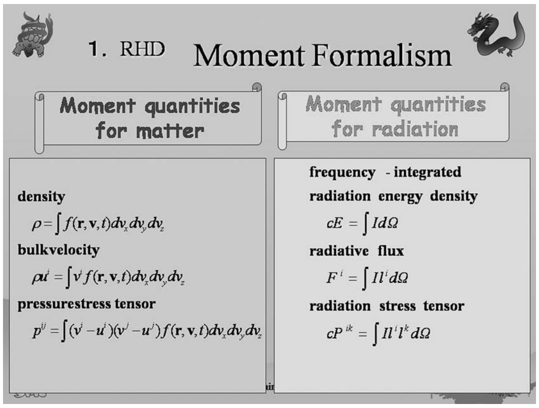

図 5　流体のモーメント量（ガス密度，平均速度ベクトル，圧力ストレステンソル）と輻射のモーメント量（輻射エネルギー密度，輻射流束ベクトル，輻射応力テンソル）．

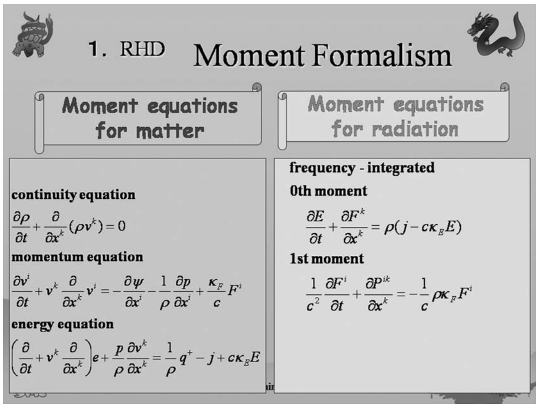

図 6　流体力学方程式と輻射モーメント方程式．

「平均運動速度 (bulk velocity)」(1 次モーメント量）になる．通常は物質の生成などは考えないので，右辺の源泉項はなく，連続の式はガス密度の保存を表すことになる．

またボルツマン方程式に個々のガス粒子の速度を掛けて速度空間で積分すると（1 次のモーメント），ガスの「運動方程式 (momentum equation)」が出てくる．このとき，分布関数に個々の速度を二つ掛けた積分が現れて，そこから 2 次のモーメント量としてガスの「圧力ストレステンソル (pressure stress tensor)」が出てくるが，一般には，個々の粒子の運動が等方的であり，したがって“圧力は等方的”だと仮定して，圧力テンソルを簡単にする．運動方程式の左辺は加速度項（慣性項）で，右辺には，重力やガスの圧力勾配項そして輻射圧の項などが置かれる．

さらに個々の速度を二つ掛けて積分すると（2 次のモーメント），ガスの全エネルギー保存を表す式になり，力学的エネルギーを差し引くことによって，ふつうに使われる「エネルギー方程式 (energy equation)」になる．エネルギー式の左辺は内部エネルギーの変化を表し，右辺の源泉項には，粘性や核反応などの加熱項，ガスが光を放射することによる冷却項，逆にガスが光を吸収することによる加熱項などがくる．

この 2 次のモーメント式では 3 次のモーメント量が現れるのだが，衝突が頻繁に起こってガスがほぼ局所熱平衡になっていると仮定することで（衝突時間が系の変化の時間より十分短いとする），モーメントの無限連鎖を 2 次の段階で打ち切ることができる．この方法によって初めて熱平衡から少しずれた流体力学の定式化が可能になった．衝突時間が短いとして微小摂動量にして展開する方法は，1917 年，当時スウェーデンのウプサラ大学にいたエンスコグ (David Enskog; 1884–1947) が学位論文で提出した方法で，違う方法で同じ結果を得たチャップマン (Sydney Chapman; 1988–1970) と合わせ，「チャップマン–エンスコグ近似 (Chapman–Enskog closure)」と呼ばれる．

光子ガス系の場合も，ガス系とほぼ同様な手続き―「モーメント定式化 (moment formalism)」と呼ぶ―でモーメント方程式が導出できる．ただし，速度空間での積分ではなくて，輻射（光線）の方向に関する積分になる．またガス系では個々の粒子の速度分布が局所的にほぼ等方だと仮定したが，光子ガス系では輻射場が局所的にはほぼ等方だと仮定することになる．実はこの仮定，すなわち，光線の方向依存性が弱くて輻射場の“非等方性”はあまり強くない，という仮定は，**光学的厚**

みが 1 程度の領域や相対論的な領域で，破綻することが少なくない．

ともあれ，輻射輸送方程式を方向空間で単純に積分したものが「0 次のモーメント式 (0th moment equation)」だ．ガス系に対する「連続の式」のような固有名はないようである．また輻射強度の角度積分は単位体積あたりの輻射のエネルギー（単位は [erg/cm^3]）を表す「輻射エネルギー密度 (radiation energy density)」E となり，方向余弦を掛けて角度積分したベクトル量は単位時間単位面積あたりに輻射が運ぶエネルギー（単位は [erg/cm^2/s]）を表す「輻射流束ベクトル (radiative flux vector)」F^iとなる．

なお，0 次のモーメントは，ガス系ではガス密度の保存を表したが，光子ガス系では，実は，輻射場のエネルギー保存を表す式になっている．したがって，輻射流体力学方程式の 0 次モーメント式の左辺は，単位体積あたりの輻射エネルギーの時間変化を表しており，右辺の源泉項には，ガスから放射されて輻射場に加わったエネルギー項やガスに吸収されて輻射場から減った項などが置かれる．

ガス系と光子ガス系の扱いはほぼ同じだといいながら，エネルギーに関して対応が対称的でないように見える．ぼくもこの点は長年，気持ち悪かったのだが，光子の質量が 0 で，質量に関する式が不要になるためだと思っていた．しかし，いま考えてみると，この対称性の崩れは，むしろ非相対論と相対論の違いと考えたほうがよさそうだ．ガス系は非相対論で扱っているので，粒子の質量と内部エネルギーを分けて考えているが，光子はもともと相対論的粒子であり質量とエネルギーを区別しない．だから，ガス系でも，質量と内部エネルギーを区別せずに，ガス粒子の静止質量を合わせた相対論的全エネルギーの式にすれば，より対称的になるはずだ．ただし，相対論的流体方程式でも，粒子数の保存の式は別に立式するから，やっぱり，光子の質量が 0 なのが重要なのかなぁー．また宿題になってしまった．

次に輻射輸送方程式に方向余弦を掛けて角度積分すると「1 次のモーメント式 (1st moment equation)」が得られる．この式は間違いなく光子ガスの運動量の変化を表す“運動方程式”である．このとき，輻射強度に方向余弦を二つ掛けて角度積分したテンソル量が現れて，これは単位面積あたりの輻射の応力（単位は [dyn/cm^2]）を表す「輻射応力テンソル (radiation stress tensor)」P^{ik}となる（単位は輻射エネルギー密度と同じ）．輻射場が完全に等方であれば（たとえば黒体放射），輻射応力はとても単純化されるが，先にも触れたように，輻射場の等方性は破れやすい．この輻射流体力学の 1 次モーメント式の左辺は光子ガスの運動量の変化を表し，輻射がガスを押して運動量を与えた反作用の項が源泉項として現れる．光子の質量は 0 なので，重力などの項はない．

さて，ガス系のモーメント方程式と同様，光子ガス系のモーメント方程式も無限に連鎖する方程式系で，有限の次数の範囲では，方程式の数よりも変数の数のほうが多い．したがって，そのままでは方程式系は完結しない（閉じない）ので，方程式を閉じさせるためには，変数の間に何らかの補助的な関係式を必要とする．その関係式を closure relation と呼んでいるが，どうにもいい訳が付けられない．直訳的には，完結式とか閉止式とかいうあたりだろうが，どうもしっくりこない．意味的にはウロボロスに自分の尻尾をくわえさせて円環を閉じるような感じなので，閉環式みたいなところだろうか．はなはだ不本意ながら，ここでは，「クロージャー関係 (closure relation)」と呼んでおく．

3. エディントン近似と拡散近似

輻射輸送方程式を角度方向に展開してモーメントを取っていく輻射流体力学のモーメント定式化では，無限次数まで取ったモーメント方程式と，角度情報を含むもとの輻射輸送方程式が数学的に

は等価になる．とはいうものの，モーメントを無限に取るのではちっとも楽にならないので，有限次数で打ち切る近似をする．その結果，方程式より変数の数のほうが多くなるので，変数の間の何らかの関係式—クロージャー関係—が必要になる．また打ち切り誤差のようなものが残ることになる．

クロージャー関係としては実にさまざまな関係式が提案されているが，あまりにいろいろあって，どんな形が適切なのかが十分に評価できないというところが，新参者の正直な感想である（といいつつ，クロージャー関係を問題にするわけだが）．ただし，モーメント方程式系を閉じる方法の中で，もっとも基本的でかつ単純なものは，エディントン近似と拡散近似（ロスランド近似）だとしていいだろう．

まず一つの方法として，輻射場が等方的だと仮定し，輻射圧と輻射エネルギー密度の間に関係式を立てるのが，「エディントン近似 (Eddington approximation)」である（図 7）．非等方性が弱いとして角度方向に展開した場合の第一近似でもある．

輻射場が等方的なら，ガス系の圧力のように，輻射場の輻射応力テンソルも等方的になり，その等方的な「輻射圧 (radiation pressure)」P は輻射エネルギー密度の 1/3 に等しくなる．すなわち，xyz の 3 方向のそれぞれに対して，

$$P^{xx}=P^{yy}=P^{zz}=P=E/3$$

が成り立つ．また，この 1/3 という係数を「エディントン因子 (Eddington factor)」と呼ぶ．

Eddington approximation

radiation fields ⇒ isotropic

$$P^{ik}=\frac{\delta^{ik}}{3}E$$

図 7　エディントン近似.

エディントン近似では，輻射場の等方性が必要なだけで，光学的に厚いか薄いかは関係ない．たとえば，宇宙背景放射のような一様な輻射場中や，無限に広がった一様光源の上では，光学的に薄くても単純なエディントン近似が成り立ち，エディントン因子は 1/3 になる．一方，一様に光っている球体の外部では，輻射場は非等方なので，エディントン近似は成り立たなくなる．すなわち球体の表面ではエディントン因子は 1/3 だが，球から離れるに従ってエディトン因子は大きくなり，球が点光源として見える無限遠方でエディントン因子は 1 になる（図 8, 図 9）．

また輻射場が光学的に厚く輻射輸送が拡散的に起こる場合が「拡散近似 (diffusion approximation)」である（図 10）．さらに拡散近似において，輻射場が黒体放射的な場合を「ロスランド近似 (Rosseland approximation)」と呼ぶ（ので，いいと思う）．

輻射輸送が拡散的になるためには，系のサイズに比べて光子の平均自由行程が十分に短く，光子が平均自由行程だけちょこっと進んでは吸収や散乱を受け，方向をランダムに変え，大局的には，温度など物理量の勾配の（負の）方向へ輻射エネルギーがじわじわと流れていく状況が必要になる．というか，そのような過程が光子拡散である．

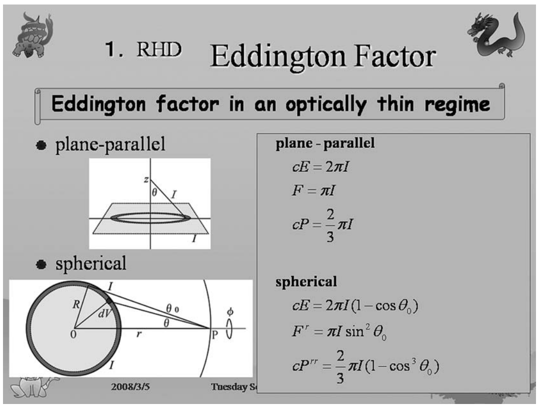

図 8　一様に光っている無限平面上空と一様に光っている球体周辺における輻射場の値.

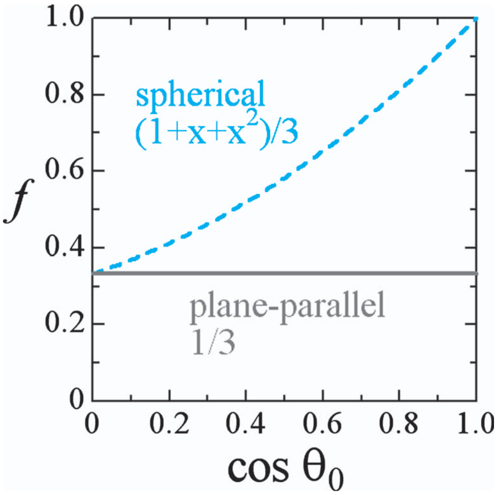

図 9　一様に光っている無限平面上空と一様に光っている球体周辺におけるエディントン因子の値．横軸（および図中の x）は球体を見込む角度の余弦．

Diffusion approximation

radiation fields ⇒ isotropic

+ optically thick

$$F^i = -\frac{c}{\kappa_R \rho}\frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{c}{3\kappa_R \rho}\frac{\partial E}{\partial x^i}$$

図 10　拡散近似．

さらに拡散近似では，物理量の時間的空間的変化が小さいと仮定する．輻射場の 1 次のモーメント式で定常性を仮定すれば，輻射流束ベクトルが輻射応力テンソルの勾配に比例することになり，エディントン近似を用いれば，輻射エネルギー密度の勾配に比例することになる．輻射流束は，xyz の 3 方向のそれぞれに対して，

$$F^x = -(1/\kappa\rho)\mathrm{d}P^{xx}/\mathrm{d}x = -(1/3\kappa\rho)\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$$
$$F^y = -(1/\kappa\rho)\mathrm{d}P^{yy}/\mathrm{d}y = -(1/3\kappa\rho)\mathrm{d}E/\mathrm{d}y$$
$$F^z = -(1/\kappa\rho)\mathrm{d}P^{zz}/\mathrm{d}z = -(1/3\kappa\rho)\mathrm{d}E/\mathrm{d}z$$

のようになる．

ここでエディントン近似と拡散近似の適用限界

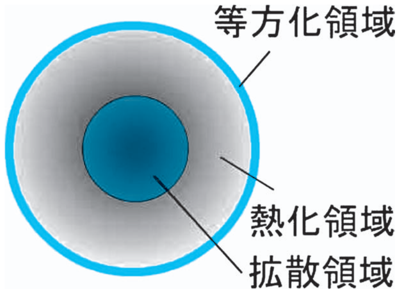

図 11　一般的なガス塊における輻射場の状態（Castor，2004，2007 より）．十分に光学的に厚い内部領域では，ガスと輻射はほぼ完全に熱平衡になっており，輻射場は黒体放射で，拡散近似が成り立っている．その周辺では，ガスと輻射は近似的に熱平衡で，拡散近似も少し悪くなる．光学的厚みが 1（平均自由行程）程度の表面境界層では，拡散近似は破れ，輻射場は黒体放射ではない．ただし，散乱などによって輻射場は簡単に等方的になるので，この境界層でもエディントン近似は成り立っている．

についてまとめておこう．先にも触れたように，エディントン近似は輻射場が等方的であればいいので，光学的に厚いか薄いかは関係ない．実際，初期宇宙などでも宇宙背景放射は等方的だが光学的には薄い．一方，拡散近似は光学的に厚いことが必要だ．逆に，光学的に厚ければ，輻射場は等方的になると考えてよいので（いまの範囲で），エディントン因子は自動的に成り立つ．したがって，一般的には，拡散近似の適用範囲はエディントン近似より狭い（図 11）．

もう一つ，拡散近似で重要な点は，物理量，いまの場合は，輻射強度が時間的・空間的にゆっくりとしか変化しないという仮定だ．だから 1 次のモーメント式で定常を仮定したものが拡散方程式になっている．これは実はかなり重要な仮定で，かつ場合によっては致命的な仮定である．

拡散過程で，光子が拡散する実効速度は光速に比べて非常に小さくなり，だいたい光速を光学的厚みで割ったぐらいになってしまう．たとえば，光学的厚みが 100 になっただけで，拡散速度は光

速の 1/100 に落ちてしまう．恒星大気などのようにガスが静止している場合には何の問題もないが，ガスが運動している場合，ガスの流れが少し速くなっただけで，光子拡散の実効速度を容易に超えることが可能になる．そんな場合でも，ガスとともに動く共動系で考えればいいように思うかもしれないが（実際，相対論的流れでは輻射がガスとともに移動する光子捕捉が起こる），速度場が一様ではなく速度勾配があれば，共動系においてさえ，拡散近似はあっという間に破綻するだろう．したがって，後でも述べるが，ダイナミックな計算で拡散近似を使うのはかなり不安が残る．

4. 変動エディントン近似と流束制限拡散近似

輻射場が等方的ならエディントン近似が使えるし，さらに光学的に厚ければ拡散近似（ロスランド近似）が使える．逆に，輻射場の非等方性が強かったり，光学的に薄い領域では，これらの近似は破綻する．たとえば，星の大気表層付近や，巨星あるいは回転星の膨張希薄大気，光学的に厚い恒星風や降着円盤風などでは，光学的な厚みが急に変化したり輻射場の非等方性が強くなり，これらの近似は急激に悪化する．

恒星周辺などの光学的に薄い領域では，輻射圧は流れの方向へだけ働き，他の方向への輻射圧はない（一様平面光源など特殊な配位を除く）．したがって輻射流の方向を z 方向とすると，

$$P^{xx}=0\,,\ P^{yy}=0\,,\ P^{zz}=E$$

となる．また同様に，輻射のエネルギー E が輻射流の方向に光速 c で運ばれるので，輻射流束は，

$$F^{x}=0\,,\ F^{y}=0\,,\ F^{z}=cE$$

となる．すなわち，光学的に薄い領域でのエディントン因子は 1 となる（図 9 参照）．

そこでエディントン近似を一般化して，輻射圧（輻射応力テンソル）と輻射エネルギー密度の比

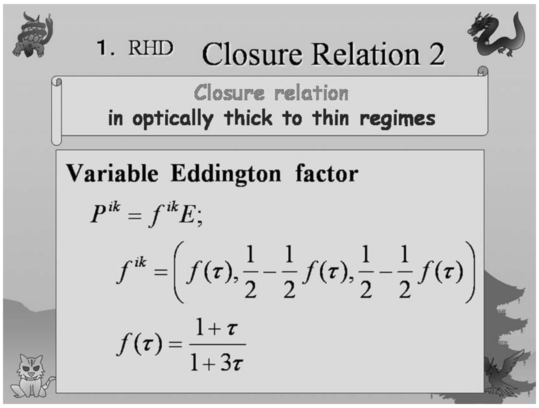

図 12　変動エディントン近似の一例．

率であるエディントン因子の値を 1/3 に固定せず光学的厚みの関数とし，光学的に厚い領域では 1/3, 光学的に薄い領域では 1 になるように変化させることがある．この方法が「変動エディントン近似 (variable Eddington approximation)」で，光学的厚みの関数として変化する“係数”$f(\tau)$ を「変動エディントン因子 (variable Eddington factor)」と呼ぶ（図 12）．あるいは，より一般には，輻射応力テンソルと輻射エネルギー密度の比として，光学的厚みの関数として「エディントンテンソル (Eddington tensor)」f^{ik}を与える．

たとえば，球対称な場合の変動エディントン因子としては，光学的深さを τ として，Tamazawa et al. (1975)[4] によって提案された

$$f(\tau)=(1+\tau)/(1+3\tau)$$

などがある（図 13）．

このような変動エディントン因子を上手に用いると，光学的に厚い領域から光学的に薄い領域にかけて，輻射輸送を連続的に調べることが可能になる．この変動エディントン因子もさまざまな形が提案されている．

エディントン因子を変化させる方法とは別に，拡散近似を光学的厚みが薄い領域まで“拡張する”方法もある．

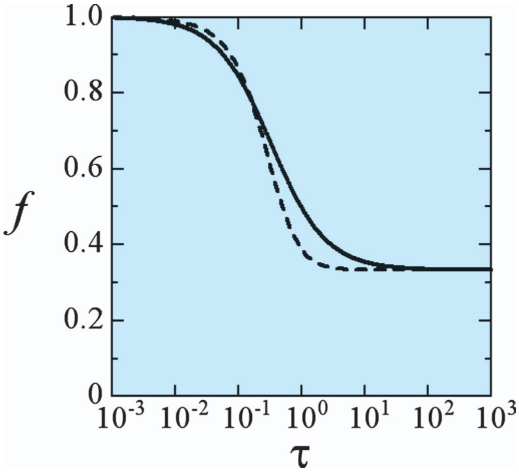

図 13　光学的厚み τ の関数として表した変動エディントン因子 $f(\tau)$. 光学的厚みが大きい領域では 1/3 だが，光学的厚みが薄い領域では 1 になる． 実線は Tamazawa et al. (1975)，破線は流束制限拡散近似から変換して得られる値.

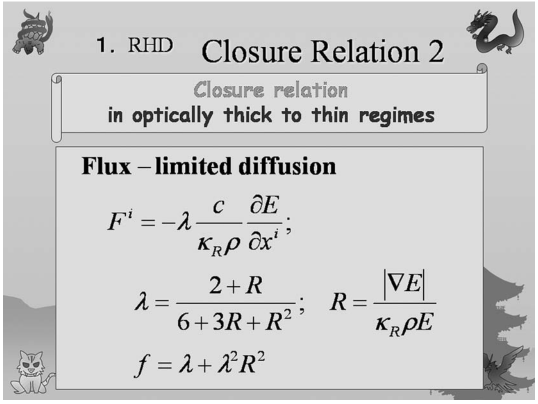

図 14　流束制限拡散近似の一例.

拡散近似は，オーダーとしては，

$$F = cE/(3\tau)$$

と表せる．光学的に厚い領域では問題ないが，光学的に薄くなると発散してしまう．しかし，実際には，輻射は光速以上で輸送することはできないので，F が cE を超えることはない．拡散近似のままではまずいのは明らかだ．

それならば，拡散近似の式を少し変形して，拡散項の微分形はそのままだが，適当な因子 λ を乗じ，因子 λ が光学的に厚い領域では 1/3，光学的に薄い領域では 0 となるように変化させ，発散を打ち消せばいいのではないか．このような方法を「流束制限拡散近似 FLD (flux limited diffusion approximation)」と呼び，因子 λ を「流束制限子 (flux limitter)」と呼ぶ.

流束制限子としては，最初に流束制限拡散近似が提案されて以来[5]，やはりさまざまなものが提案されている（図 14）.

変動エディントン因子にせよ，流束制限拡散近似にせよ，さまざまな形のものが提案されているし，“物理的”な観点からそれらの提案の妥当性が主張されている．しかし，ぼくの理解が不十分なためかもしれないが，正直なところ，どれも似たり寄ったり，五十歩百歩で，納得ができる主張は読んだことがないし，どうにも胸落ちしない.

なお，いろいろな論文を読んだ感触では，輻射によって駆動される相対論的な定常流（ブラックホール風やブラックホール降着流）では，変動エディントン因子が使われる場合が多いようだ．定常流を計算するためにはしばしば常微分方程式を解くわけだが，変動エディントン因子はクロージャー関係を代数式で与えるので，常微分方程式を解く数値計算には都合がいいのだろう.

一方，数値シミュレーションでは流束制限拡散近似が使われることが多いように思われる．こちらは代数式ではなく微分方程式だが，局所物理量で決定できるしベクトル的に表現されているので，共動系で計算する数値シミュレーションに相性がいい．ただし，拡散近似は，その根本で定常性が必要なので，ダイナミックな数値シミュレーションでどれくらい信頼性がおけるかは，はなはだ疑問に感じる．また数値シミュレーションは“定量的”であることが命だが，流束制限拡散近似は“定性的”だという点も危うい感じがする.

5. 相対論的輻射モーメント方程式

光線は方向性をもっているので，振動数は除いても，ある場所（3 次元）である方向（3 次元）に伝播し，かつ時間的にも変化している．すなわち，光線（輻射強度）は，七つの独立変数によって決まる量で，輻射輸送方程式も，七つの独立変数をもった偏微分積分方程式である．

さらに，相対論的になると，観測者によって観測される物理量が変わってくるので，「静止系 (inertial frame)」/「実験室系 (lab frame)」と「共動系 (comoving frame)」/「流体系 (fluid frame)」を区別しなければならない（静止系は添え字なし，共動系は 0 あるいは co をつける）．そしてそれらの系の物理量はローレンツ変換で変換できるが，その際に，ドップラー効果とか光行差とか，相対論的な効果が入ってくる．さらに一般相対論までいくと空間の曲がりなど一般相対論的効果もビシバシ入ってくるので，とんでもないことになる．そもそも一般相対論的な輻射流体力学は定式化自体が困難を極めていて，球対称の場合や形式的な定式化は別として，一般相対論的な輻射流体力学の方程式がきちんと成分で書き下されたのは，ごく最近のこと[6), 7)]なのだ．

相対論的な輻射輸送・輻射流体力学では，静止系と共動系があるために，定式化でも，静止系と共動系の二つの立場が生じることになる．もちろん数学的には全く同じだが，式の見かけは異なるし，取り扱いも一長一短がある．

もう少し具体的に書くと，基本方程式である「相対論的輻射輸送方程式 (relativistic radiative transfer equation)」を書き下すとき，基本方程式の左辺，すなわち位相空間中での光子の分布関数の保存は，静止系で記述したほうが単純な形になる．一方，基本方程式の右辺，すなわち，光子とガスの相互作用の項は，“ガスが静止した”共動系で記述したほうが簡単な形になる（図 15）．

非相対論的な場合（図 6）との主な違いは，相対論的な効果（ローレンツ因子 γ のついた項など）の因子があちこちに掛かることだ．また 0 次のモーメント式や 1 次のモーメント式では，ガスが輻射場に仕事をする項などが現れている．

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\, I = \rho\gamma^3 \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{l}_0}{c}\right)^3 \times \left[\frac{j_0}{4\pi} - \left(\kappa_0^{\rm abs} + \kappa_0^{\rm sca}\right) I_0 + \frac{3}{4}\kappa_0^{\rm sca}\frac{c}{4\pi}\left(E_0 + l_{0i}l_{0j}P_0^{ij}\right)\right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla F} = \rho\gamma\left(j_0 - c\kappa_0^{\rm abs}E_0\right) - \rho\gamma\left(\kappa_0^{\rm abs} + \kappa_0^{\rm sca}\right)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_0}{c}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial F^i}{\partial t} + \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} &= \rho\gamma\frac{v^i}{c^2}\left(j_0 - c\kappa_0^{\rm abs}E_0\right) \\ &\quad -\rho\left(\kappa_0^{\rm abs} + \kappa_0^{\rm sca}\right)\frac{\gamma-1}{v^2}\frac{v^i}{c}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_0\right) \\ &\quad -\frac{1}{c}\rho\left(\kappa_0^{\rm abs} + \kappa_0^{\rm sca}\right)F_0^i.\end{aligned}$$

図 15　相対論的な輻射輸送方程式（上）と 0 次のモーメント式（中）および 1 次のモーメント式（下）．添え字のない量は静止系，添え字 0 のついた量（および密度）は共動系で測った量．

さて，方程式は簡単なほうがいいに決まっているので，左辺を静止系，右辺を共動系にした「混合系 (mixed frame)」で表せば，見かけはもっとも簡単になるわけだが，どっちみちローレンツ変換をかませることになるので，結局は，どちらかの系にそろえることになる．

その際，左辺を変換して（速度微分などが入って左辺は汚くなる），全体を共動系でそろえる立場がある．共動系での数値シミュレーションだと，こちらの方式が便利だろう．

一方，右辺を変換して（輻射抵抗 (radiation drag) の項などが現れて右辺はごちゃごちゃする），全体を静止系でそろえる立場もある（図 16）．降着円盤の教科書 Kato et al. (1998, 2008) などではその立場を取っているし，大家のミハラスらも静止系で立式している[8)]．こちらは，輻射抵抗などの働き方が見やすくなったり，静止系での境界条件が単純になったりする利点がある．

そのような違いはあるが，静止系の量と共動系

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla \boldsymbol{F}=\rho\gamma\left(j_0-c\kappa_0^{\mathrm{abs}}E+\kappa_0^{\mathrm{abs}}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c}\right)$$
$$+\rho\gamma^3\kappa_0^{\mathrm{sca}}\left[\frac{v^2}{c}E+\frac{v_iv_j}{c}P^{ij}-\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c}\right]$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial F^i}{\partial t}+\frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k}=\frac{\rho\gamma}{c}\left(\frac{v^i}{c}j_0-\kappa_0^{\mathrm{abs}}F^i+\kappa_0^{\mathrm{abs}}v_kP^{ik}\right)$$
$$-\frac{\rho\gamma}{c}\kappa_0^{\mathrm{sca}}\left[F^i-\gamma^2Ev^i-v_kP^{ik}+\gamma^2v^i\left(\frac{2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c^2}-\frac{v_jv_k}{c^2}P^{jk}\right)\right]$$

図 16　両辺とも静止系の輻射量で表した 0 次と 1 次のモーメント式． 1 次のモーメント式の 2 行目で，［　］内の第 2 項と第 3 項などで現れている速度に比例する項が，いわゆる輻射抵抗（コンプトン抵抗）．

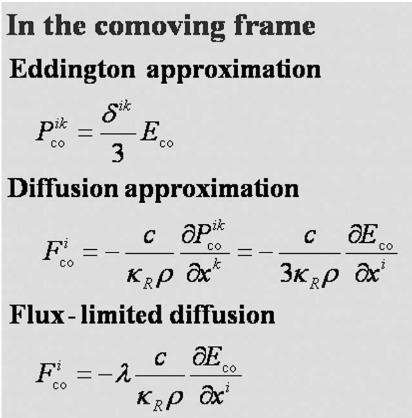

図 17　共動系でのクロージャー関係．

の量を注意深く区別すれば，相対論的輻射輸送方程式のモーメントを取って，0 次のモーメント式，1 次のモーメント式など，「相対論的モーメント方程式 (relativistic moment equations)」を導出していくことは，重力場を考えない範囲では，いくぶん面倒だが難しくはない．

また問題のクロージャー関係については，従来はしばしば，共動系ではガスは静止して見えるだろうということで，エディントン近似にせよ流束制限拡散近似にせよ，共動系で非相対論の場合と同様に設定し，必要なら静止系へ変換していた（図 17）．

ただし，相対論的な運動がある場合，共動系（流体静止系）で，本当に流体全体が静止して見え

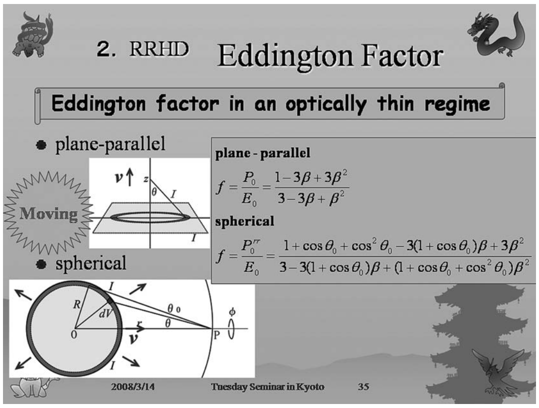

図 18　一様に光っている運動する無限平面上空と一様に光っている膨張する球体周辺のエディントン因子．

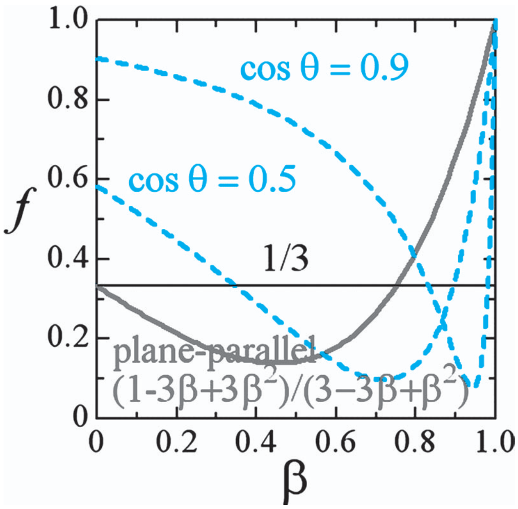

図 19　一様に光っている運動する無限平面上空（実線）と一様に光っている膨張する球体周辺（破線）におけるエディントン因子の値．横軸は光速を単位とする速度．

るかどうか保証できない．

たとえば一様に光っている無限に拡がった平面（図 8）が，鉛直方向に速度 v（あるいは光速を単位とする速度 $\beta=v/c$）で動いているとしよう．このとき動く無限平面上空の輻射場を静止系で解析的に求めることでき，さらに無限平面とともに動く共動系に変換すれば，共動系でのエディントン

因子を解析的に求めることができる（図 18）.

そして実際に求めてみると，共動系で期待される 1/3 とはならずに，速度の関数として変化するのである（図 19）．速度が小さい領域でエディントン因子が 1/3 より小さくなるのは相対論的光行差による横方向からの入射が原因で，速度が光速に近づくにつれて 1 に近づくのは光行差による前方方向への集中であることがわかっている．球対称の場合はさらに複雑に変化する（たとえば，Koizumi and Umemura, 2008）.

6. 解くべき課題

最初の報告でも触れたように，

○ブラックホール降着流

○相対論的天体風，亜光速宇宙ジェット

○相対論的爆発，ガンマ線バースト

○ニュートリノ輸送

○初期宇宙の動的諸現象

などなど，多様で多彩な相対論的天体現象があり，相対論的輻射輸送や相対論的輻射流体力学の手法は，ますますその重要性が高まっている．

しかしながら，基礎理論としては，すでに書いたように，相対論的輻射流体力学の定式化は，その方程式系をきちんと閉じる点でまだ完全ではない．では，どうすればよいか．

もちろん，基本方程式・原理方程式を数値的に解けばいいのかもしれないし，最後はそうなるかもしれない．しかしいまのところ，フルに相対論的な場合はできていないようだ．それにまた，原理方程式を真正面から解くのは，棍棒を振り回して敵をなぎ倒すような感じで，まぁ，あまりエレガントな方法ではないし，物理的な見通しはわかりにくく，何より，ぼくのような体力のない人間には無理な方法でもある．いや，多数派の数値家さんを敵に回すつもりはないが，マイノリティーは弱者なのである．

とにかく体力のない人間は，研ぎ澄まされた銘刀村雨なり魔法属性のついた神剣エクスカリバーなり，低い体力をカバーするアイテムが必要だ．だからこそ，ごつごつした原理方程式そのものではなく，そのエッセンスを抽出したモーメント方程式が必要であり，最後のカギがクロージャー関係なのだ．

その場合，すでにある剣を使うという方法と，新たに刀を鍛える・探す方法があるだろう．

前者の立場が，とりあえず，現在使える範囲でエディントン因子を与えて，解ける範囲で解くという立場だ．この数年は，その立場で，相対論的輻射流体方程式を解いたり[9]，相対論的輻射輸送問題を解析したり[10]してきた．

後者の立場は，素過程まで立ち戻って，エディントン因子なりその他のクロージャー関係なりを，きちんと決めるという正攻法の立場だ．少しずつだが，数値的な計算[11]や局所的な解析[12]などが進みつつある．

今後の連載では，これらの最近の成果や関連研究について，順に紹介していきたい．

筑波大学の梅村雅之さん，小泉貴之さん，秋月千鶴さんたちとの議論で，いくつかの論点が明確になりました．夜の議論も含め感謝します．

教　科　書

Castor J. I., 2004, Radiation Hydrodynamics (Cambridge University Press): 2007 年に出たペーパーバックで初めて読んだけど，他のものと比べて一番読みやすかった．ここで挙げた英文教科書の中ではもっとも読みやすくためになる本だと思う.

Chandrasekhar S., 1960, Radiative Transfer (Dover Publishing, Inc.): 古典であり，読まなくても買って手元に置いておく本.

Gray D. F., 1992, The Observation and Analysis of Stellar Photospheres (Cambridge University Presss): まだちゃんと読んでいないが，スペクトル線輸送なども詳しく扱っており，何冊目かに読むとちょうどいいだろう．早く読みたい.

Kato S., Fukue J., Mineshige S., 2008, Black-Hole Accretion Disks—Towards a New Paradigm (Kyoto University Press): これも読まなくても買う本（笑）．じゃなくて，

付録に方程式の導出がコンパクトにまとめてあり，本文の応用と合わせて，案外と有用．

Mihalas D., 1970, Stellar Atmospheres (W. H. Freeman and Co.): これももう古典だが，恒星大気の輻射輸送については，いまでももっともよい本だと思う．

Mihalas D., Mihalas B. W., 1984, Foundations of Radiation Hydrodynamics (Oxford University Press): この分野ではバイブルだが，ぼくはあまり感銘を受けなかった．ただし数値的な取り扱いは微にいり細にいり書いてあるので，数値シミュレーションするなら必読書だろう．

Peraiah A., 2002, An Introduction to Radiative Transfer: Methods and applications in astrophysics (Cambridge University Press): 基本的な部分はもちろん，逐次近似的な手法や，数値計算の手法など，さまざまな解法が丁寧に説明してある．

Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, Radiative Processes in Astrophysics (John Wiley & Sons): 輻射輸送はあまり書いていないが，放射の素過程に詳しいので，一度（三度くらいは）は読んでおくべき本．

Shu F. H., 1991, The Physics of Astrophysics Vol. 1: Radiation (University Science Books): 最初に読んだときは勉強になったが，その後，いい教科書も出たので，まぁ読まなくてもいいかも．

加藤正二，1989,『天体物理学基礎理論』（ごとう書房）: 日本語で書かれた理論天文学の教科書では，いまだに本書の右に出るモノはない．相対論的放射過程などにも詳しい．今回，またざらっと見たけど，まだ半分も理解できていないことがわかった．遠島になったら必ず持参する．

小暮智一，2002,『輝線星概論』『星間物理学』（ごとう書房）: 輻射輸送に紙数を割いた数少ない日本語の教科書．全体に非常に丁寧に書かれている．

参考文献

1) Milne E. A., 1921, MNRAS 81, 382
2) Eddington A. S., 1926, The Internal Consititution of Stars (Cambridge University Press)
3) 福江　純，2006, 天文月報 99, 505
4) Tamazawa S., Toyama K., Kaneko N., Ono Y., 1975, ApSpSci 32, 403
5) Levermore C. D., Pomraning G. C., 1981, ApJ 248, 321
6) Park M.-G., 2006, MNRAS 367, 1739
7) Takahashi R., 2007, MNRAS 382, 1041
8) Mihalas D., Auer L. H., 2001, JQSRT 71, 61
9) Fukue J., 2005, PASJ 57, 1023; Fukue J., 2006, PASJ 58, 461; Akizuki C., Fukue J., 2008, PASJ 60, 337
10) Fukue J., 2008a, PASJ 60, 137; Fukue J., 2008b, PASJ 60, in press
11) Koizumi T., Umemura M., 2008, submitted to MNRAS
12) Fukue J., 2008c, PASJ 60, 377; Fukue J., 2008d, PASJ 60, in press

Let's Challenge the Relativistic Radiation Hydrodynamics: 1 Status and Problems of Moment Formalism

Jun Fukue

Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University, Asahigaoka 4–698–1, Kashiwara, Osaka 582–8582, Japan

Abstract: The field of the relativistic radiation hydrodynamics is very wide and deep but fundmental for various relativistic astrophysical phenomena. However, its moment formalism is insufficient and imperfect. Thus, it is necessary to do many fundamental researches, and there remain many treasures to be found. After a few years training and reaching about the level 50, we show and introduce the present status, founded orbs, expected ones, and hidden enigmas.